

## وارون‌سازی هموار سه‌بعدی داده‌های گرانی‌سنجی و تخمین بهینه پارامتر منظم‌سازی با روش تخمین گر نارایب خطرپذیری احتمالی؛ مطالعه موردی: ذخیره سولفیدی سن‌نیکلاس، مکزیک

علی نجاتی کلاته<sup>۱</sup>، میثم مقدسی<sup>۲\*</sup>، محمد رضایی<sup>۳</sup> و یاسر دهبان<sup>۲</sup>

<sup>۱</sup> دانشیار، دانشکده مهندسی معدن، نفت و ژئوفیزیک، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود، ایران  
<sup>۲</sup> دانشجوی دکتری، دانشکده مهندسی معدن، نفت و ژئوفیزیک، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود، ایران  
<sup>۳</sup> استادیار، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه ملایر، ملایر، ایران

(دریافت: ۱۴۰۰/۰۱/۱۸، پذیرش: ۱۴۰۰/۱۰/۲۱)

### چکیده

وارون‌سازی داده‌های گرانی‌سنجی از اهمیت زیادی در تفسیر داده‌های اکتشافی برخوردار است. در این روش، تخمین توزیع چگالی مدل زیرسطحی با استفاده از داده‌های اندازه‌گیری شده سطحی صورت می‌گیرد. وارون‌سازی داده‌های گرانی‌سنجی در یک مسئله وارون، به صورت یک مسئله فروبرآورد یا بدحالت طبقه‌بندی می‌شود. یکی از نکات کلیدی در حل مسائل وارون داده‌های ژئوفیزیکی، تعیین مقدار بهینه پارامتر منظم‌سازی است. نقش پارامتر منظم‌سازی، متعادل کردن اثر نسبی بین دو تابع عدم‌برازش و تابع ثبات‌ساز است. برای این منظور روش‌های مختلفی در وارون‌سازی سه‌بعدی داده‌های گرانی‌سنجی وجود دارد. در این پژوهش از روش تخمین گر نارایب خطرپذیری احتمالی برای تعیین مقدار بهینه پارامتر منظم‌سازی جهت وارون‌سازی سه‌بعدی داده‌های گرانی‌سنجی با روش دوقطری‌سازی لنگزوس استفاده شده است. به این منظور الگوریتمی تهیه شده است که مقدار بهینه پارامتر منظم‌سازی را برای وارون‌سازی محاسبه می‌کند. جهت ارزیابی عملکرد و اعتبارسنجی الگوریتم تهیه‌شده، از داده‌های گرانی‌سنجی حاصل از یک مدل مصنوعی و داده‌های واقعی گرانی‌سنجی ذخیره سولفیدی سن‌نیکلاس در کشور مکزیک استفاده شده است. نتایج این روش، به عنوان یک الگوریتم نامقید و هموار در مقایسه با اطلاعات زمین‌شناسی نشان می‌دهد به کارگیری این الگوریتم می‌تواند تخمین مناسبی از توزیع چگالی در ساختارهای زیرسطحی ماده معدنی ارائه دهد.

**واژه‌های کلیدی:** وارون‌سازی هموار، پارامتر منظم‌سازی، روش UPRE، گرانی‌سنجی

## ۱ مقدمه

وارون‌سازی داده‌های ژئوفیزیکی یکی از مهم‌ترین مراحل در تفسیر کمی داده‌های ژئوفیزیکی است. در تحقیق حاضر، نتایج وارون‌سازی داده‌های گرانی‌سنجی اطلاعات مفیدی درباره ساختارهای زیرسطحی، تباین چگالی و عمق توده‌های زیرسطحی ارائه می‌دهد (لی و الدنبرگ، ۱۹۹۸). وارون‌سازی داده‌های گرانی‌سنجی پیچیدگی‌های زیادی به همراه دارد. اصلی‌ترین مشکل مسائل وارون‌سازی داده‌های گرانی‌سنجی، نایکتایی ذاتی در پاسخ‌های این مسائل است. طبق نظریه گاوس، از یک دسته داده مشخص گرانی‌سنجی می‌توان توزیع‌های فراوانی را از منابع زیرسطحی نتیجه گرفت (بلیکلی، ۱۹۹۶). با در نظر گرفتن اطلاعات اولیه برای یک مسئله وارون، می‌توان بر نایکتایی پاسخ نهایی مسئله تا حدودی غلبه کرد (فارکوهارسون، ۲۰۰۸). یکی از موضوعات مورد علاقه پژوهشگران در تفسیر داده‌های میدان پتانسیل جهت اکتشافات معدنی، برآورد و تشخیص مرز ماده معدنی با سنگ میزبان است. به همین منظور لاست و کوییک (۱۹۸۳) به توسعه روش وارون‌سازی فشرده با کمینه کردن حجم کل توده منشاء پرداختند. رنه (۱۹۸۶) الگوریتمی را برای مدل‌سازی وارون داده‌های میدان پتانسیل ارائه داد که در آن، مدل در اطراف یکی از پارامترهای مدل رشد پیدا می‌کند. مدل حاصل از این روش، مدلی فشرده است و مرز بین توده و محیط اطراف در مدل تفکیک‌پذیر خواهد بود. فولاکار و همکاران (۲۰۰۸) روشی را برای پارامترسازی ترکیبی در وارون‌سازی داده‌های میدان پتانسیل ارائه دادند که با استفاده از آن می‌توان مرز بین واحدهای زمین‌شناسی را به‌عنوان یک پارامتر مدل وارد فرایند وارون‌سازی کرد و مدل‌های پیچیده‌ای را به‌دست‌آورد که با ساختارهای زمین‌شناسی سازگاری دارد. مارتینز و همکاران (۲۰۱۰) روش وارون‌سازی هموار را برای وارون‌سازی داده‌های

گرادیومتری گرانی بر مبنای روش لی و الدنبرگ (۱۹۹۸) برای وارون‌سازی توسعه دادند. رضایی و همکاران (۲۰۱۷) روش وارون‌سازی در فضای داده با قید پراکنندگی را برای وارون‌سازی سه‌بعدی داده‌های گرانی همراه با قید کران بالا و پایین پارامترهای فیزیکی توسعه دادند. عابدی و همکاران (۲۰۱۳) الگوریتم دوقطری‌سازی لنگروس را برای وارون‌سازی سه‌بعدی داده‌های مغناطیس با شرط تیخونوف مرتبه صفر به‌کار گرفتند. آنها نشان دادند این الگوریتم از الگوریتم گرادیان مزدوج سریع‌تر به جواب می‌رسد.

روش انتخاب پارامتر منظم‌سازی نیز عامل دیگری است که نقش مهمی در سرعت وارون‌سازی داده‌های ژئوفیزیکی و کیفیت مدل حاصل از این فرایند دارد (قائدرحمتی و همکاران، ۱۳۹۴). یکی از مسائل مهم در روش‌های منظم‌سازی از جمله روش تیخونوف، انتخاب مقدار مناسب پارامتر منظم‌سازی است (فارکوهارسون و الدنبرگ، ۲۰۰۴). الدنبرگ و لی (۲۰۰۵) از روش‌های منحنی  $L$  (L Curve)، اصل اختلاف (Discrepancy Principle) و اعتبارسنجی متقاطع تعمیم‌یافته (Generalized Cross-Validation, GCV) برای وارون‌سازی هموار داده‌های میدان پتانسیل استفاده کردند. وطن‌خواه و همکاران (۲۰۱۵) از روش‌های اصل  $\chi^2$  و تخمین گر ناریب خطرپذیری احتمالی برای اولین بار در وارون‌سازی متمرکز داده‌های گرانی استفاده کردند. مقدسی و همکاران (۲۰۱۹) به محاسبه پارامتر منظم‌سازی با استفاده از روش متعادل‌سازی قید فعال (Active Constraint Balancing, ACB) در وارون‌سازی سه‌بعدی داده‌های گرانی‌سنجی پرداختند. بائر و لوکاس (۲۰۱۱) در یک مطالعه کامل، اغلب روش‌های موجود در انتخاب پارامتر منظم‌سازی را مقایسه کردند و نتیجه گرفتند که در عمل، مقایسه این روش‌ها کار ساده‌ای نیست

اندازه‌گیری شده می‌توان نوشت:

$$\mathbf{d}_{obs} = \mathbf{d} + \mathbf{e} \quad (2)$$

وارون‌سازی خطی داده‌های گرانی‌سنجی برای محاسبه بردار پارامترهای مدل ( $\rho$ ) با استفاده از داده‌های اندازه‌گیری شده، توزیع چگالی توده‌های زیرسطحی را مشخص می‌کند.

## ۲-۲ وارون‌سازی داده‌ها

در مدل‌سازی وارون، پارامترهای مدل با کمینه کردن تابع هدف تیخونوف به دست می‌آیند که بد حالت بودن (ill-posed) آن کمتر است (تیخونوف و همکاران، ۱۹۷۷). تابع هدف تیخونوف به صورت زیر تعریف می‌شود (لی و الدنبرگ، ۲۰۰۳):

$$\min: \phi(\rho) = \phi_d(\rho) + \beta \phi_p(\rho) \quad (3)$$

که  $\phi_d = \|W_d(G\rho - d_{obs})\|_2^2$  تابع عدم برازش وزن‌دهی شده داده‌ها است.  $\phi_p(\rho) = \|D\rho\|_2^2$  تابع ثابت‌ساز تیخونوف و  $\rho$  پارامترهای مدل است. ماتریس  $W_d$  ماتریس قطری است:

$W_d = \text{diag}\left(\frac{1}{\sigma_1}, \dots, \dots, \frac{1}{\sigma_m}\right)$  مقدار  $\sigma_i$  در رابطه ماتریس وزن‌دهی داده‌ها مربوط به میزان انحراف معیار در سطح نوفه مربوط به هر داده است. پارامتر  $D$  عملگر منظم‌ساز است. همچنین برای جبران حساسیت نداشتن داده‌ها به پارامترهای مدل عمیق‌تر و جلوگیری از پیدایش پدیده واپاشی کرنل، ماتریس وزن‌دهی عمقی مطابق  $W_{depth} = \text{diag}\left(\frac{1}{(z_1)^\alpha}, \dots, \dots, \frac{1}{(z_n)^\alpha}\right)$

به کار گرفته شده است که  $z_j$  عمق پارامتر مدل  $z$  از سطح برداشت داده‌ها است. عبارت  $\alpha$  در ماتریس وزن‌دهی عمقی برای داده‌های گرانی‌سنجی برابر مقدار ۲ است (لی و الدنبرگ، ۱۹۹۸). باید توجه داشت که ماتریس وزن‌دهی عمقی را در تابع هدف مشخص شده در رابطه (۳) به جای ماتریس منظم‌ساز  $D$  در تابع ثابت‌ساز تیخونوف جایگزین کرد.

و اگر یک روش منظم‌سازی برای یک مسئله خاص جواب مناسبی بدهد، نمی‌توان گفت که این روش برای تمامی مسائل مناسب است. به کارگرفتن یک روش منظم‌سازی خاص برای یک مسئله خاص تا حدودی به طبیعت مسئله بستگی دارد.

هدف از این پژوهش، ارزیابی روش تخمین گر نارایب خطرپذیری احتمالی در انتخاب پارامتر منظم‌سازی بهینه برای وارون‌سازی هموار داده‌های گرانی‌سنجی با استفاده از روش دوقطری‌سازی لنگروس است. به این منظور با استفاده از یک مدل مصنوعی و محاسبه داده‌های حاصل از آن با مدل‌سازی پیشرو و سپس وارون‌سازی، به بررسی توانمندی روش تخمین گر نارایب خطرپذیری احتمالی در انتخاب بهینه پارامتر منظم‌سازی پرداخته و سپس از این روش در وارون‌سازی داده‌های گرانی‌سنجی ذخیره سولفیدی سن‌نیکلاس در کشور مکزیک استفاده می‌شود.

## ۲ روش تحقیق

### ۲-۱ روش پیشرو

در وارون‌سازی خطی داده‌های میدان پتانسیل، معمولاً حجم زیر سطح زمین به بلوک‌های کوچکی با ابعاد ثابت تقسیم می‌شود. تباین خاصیت فیزیکی (در اینجا چگالی) هریک از این بلوک‌های کوچک، پارامترهای مدلی است که باید در فرایند وارون‌سازی برآورد کرد. رابطه بین پارامترهای مدل و داده‌ها به صورت زیر بیان می‌شود:

$$G\rho = \mathbf{d} \quad (1)$$

که  $d_{N \times 1}$  بردار داده‌های اندازه‌گیری شده،  $\rho_{M \times 1}$  بردار پارامترهای مدل (چگالی) و  $G$  ماتریس حساسیت (کرنل) در وارون‌سازی است. در وارون‌سازی خطی سه‌بعدی داده‌های میدان پتانسیل معمولاً تعداد پارامترهای مدل از تعداد داده‌ها بیشتر است. به همین دلیل این دسته از مسائل وارون را مسائل وارون فرورآورد (underdetermined) می‌نامند. همچنین به دلیل وجود نوفه  $e$  در داده‌های

خطرپذیری احتمالی معروف است، کمینه کند (وگل)،  
 (۲۰۰۲):

$$\frac{1}{N} \|p_{\beta}\|_2^2 = \frac{1}{N} \|G\rho - G\rho_{true}\|_2^2 \quad (۶)$$

که  $p_{\beta}$  خطای احتمالی،  $N$  تعداد داده‌ها و  $\rho_{true}$  بردار پارامترهای مدل واقعی است؛ بنابراین برای یافتن پارامتر منظم‌سازی بهینه با استفاده از اصل فوق، تابع تخمین‌گر ناریب خطرپذیری احتمالی طوری بیان می‌شود که نیازی به بردار پارامترهای مدل واقعی ( $\rho_{true}$ ) نباشد (وگل)،  
 (۲۰۰۲):

(۷)

$U(\beta) = \frac{1}{N} \|G\rho_{\beta} - d^{obs}\|_2^2 + \frac{2\sigma^2}{N} \text{trace}(H_{\beta}) - \sigma^2$   
 $\sigma$  انحراف معیار تخمینی نوفه موجود در داده‌هاست و پارامتر  $H_{\beta}$  به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$H_{\beta} = G(G^T G + \beta I)^{-1} G^T \quad (۸)$$

برای محاسبه بردار پارامترهای مدل  $\rho_{\beta}$  و  $H_{\beta}$  می‌توان از روش‌های تکرارپذیر استفاده کرد. در این پژوهش از روش دوقطری سازی لنگزوس که روشی تکرارپذیر است، برای محاسبه  $\rho_{\beta}$  و  $H_{\beta}$  استفاده شده است. در صورت زیاد بودن تعداد پارامترهای مدل، محاسبه جمع قطر اصلی ماتریس  $H_{\beta}$  (رد ماتریس  $H_{\beta}$ ) در رابطه (۷) به صورت مستقیم دشوار است؛ بنابراین از روش تخمین‌گر تصادفی رد هاجینسون استفاده می‌شود (هاچینسون، ۱۹۹۰). در این روش رد ماتریس  $H_{\beta}$  را می‌توان از رابطه زیر محاسبه کرد:

$$\text{trace}(H_{\beta}) = u^T H_{\beta} u \quad (۹)$$

$u$  یک بردار تصادفی است که از اعداد ۱ و -۱ تشکیل شده است و احتمال وقوع هر یک از این اعداد برابر با ۰/۵ است؛ بنابراین اگر تعداد پارامترهای مدل زیاد باشد، تابع تخمین‌گر ناریب خطرپذیری احتمالی (UPRE) به صورت زیر تخمین زده می‌شود:

$$U(\beta) = \frac{1}{N} \|G\rho - d^{obs}\|_2^2 + \frac{2\sigma^2}{N} u^T H_{\beta} u - \sigma^2 \quad (۱۰)$$

$\beta$  پارامتر منظم‌سازی است که بین تابع عدم برازش داده‌ها و تابع ثبات‌ساز تیخونوف توازن برقرار می‌کند. در صورتی که مقدار  $\beta$  عددی بزرگ باشد، تابع هدف به سمت تابع ثبات‌ساز تیخونوف میل می‌کند (تمایل به پارامترهای مدل دارد) و در صورتی که  $\beta$  عددی کوچک باشد، تابع هدف به سمت تابع عدم برازش داده‌ها میل می‌کند؛ بنابراین با انتخاب عددی بزرگ برای  $\beta$ ، مدل نهایی وارون‌سازی شده در عمق بیشتر و با لبه‌های هموار و بدون نشان دادن جزئیات به دست می‌آید. همچنین با انتخاب عددی کوچک برای  $\beta$ ، جزئیات بیشتری مدل می‌شود. اگر این مقدار خیلی کوچک باشد، نوفه هم مدل می‌شود؛ بنابراین انتخاب بهینه  $\beta$  (پارامتر تنظیم) بسیار مهم است. تابع هدف مشخص شده در رابطه (۳) برای کمینه شدن به شکل نهایی رابطه (۴) تبدیل می‌شود:

$$\phi(\rho) = \arg \min \left\{ \|W_d(G\rho - d^{obs})\|_2^2 + \beta \|W_{depth} D\rho\|_2^2 \right\} \quad (۴)$$

$$(G^T W_d^T W_d G + \beta D^T D W_{depth} I) \rho = G^T W_d^T W_d d^{obs} \quad (۵)$$

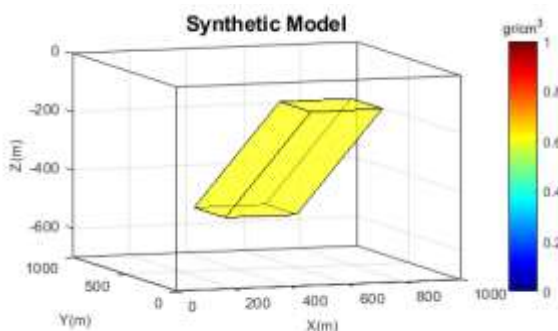
که  $G^T$  ترانهاده ماتریس  $G$  است. با حل رابطه (۵)، می‌توان بردار پارامترهای مدل ( $\rho$ ) را به دست آورد. در وارون‌سازی داده‌ها، ابتدا پارامتر منظم‌سازی ( $\beta$ ) از روش تخمین‌گر ناریب خطرپذیری احتمالی محاسبه می‌شود، سپس پارامترهای مدل از حل رابطه (۵) با استفاده از روش دوقطری سازی لنگزوس محاسبه می‌شوند.

## ۲-۲-۱ برآورد پارامتر منظم‌سازی به روش

### تخمین‌گر ناریب خطرپذیری احتمالی (UPRE)

ایده اساسی در این روش آن است که جواب مناسب برای یک مسئله وارون، جوابی است که تخمین‌گر آماری، میانگین مربع نرم خطای احتمالی زیر را که به رابطه

لنکروس، ابتدا ماتریس حساسیت ( $G$ ) به صورت یک ماتریس دوقطری محاسبه می‌شود (کالوتی و همکاران، ۲۰۰۰). استفاده از یک ماتریس دوقطری پراکنده که ذخیره‌سازی آن در رایانه نیاز به حجم زیادی ندارد، به دلیل داشتن ابعاد کمتر نسبت به ماتریس  $G$  باعث سرعت بخشیدن به حل مسئله وارون می‌شود (عابدی و همکاران، ۲۰۱۳). مسئله حداقل مربعات دستگاه معادلات خطی به شکل  $G\rho = d$  را می‌توان با کمینه کردن نرم ۲ عدم برازش ( $\min \|G\rho - d\|_2^2$ ) حل کرد. در نهایت، می‌توان نشان داد که جواب  $\rho$  بعد از  $k$  مرحله تکرار الگوریتم وارون‌سازی به روش دوقطری‌سازی لنکروس به دست می‌آید (پیاژه و سندرز، ۱۹۸۲).



شکل ۱. نمایش سه‌بعدی مدل مصنوعی دایک.

### ۳ مدل مصنوعی

جهت ارزیابی الگوریتم ارائه‌شده، وارون‌سازی داده‌های حاصل از دو مدل مصنوعی با استفاده از این روش انجام شده است. مدل‌های مصنوعی استفاده‌شده در این پژوهش به شکل یک دایک با شیب ۴۵ درجه نسبت سطح افق و با تباین ۱ گرم برسانتی‌متر مکعب (شکل ۱) و یک مکعب مدفون با تباین ۱ گرم برسانتی‌متر مکعب با محیط پیرامون خود در نظر گرفته شده است (شکل ۲). ابعاد شبکه فرضی برداشت داده در سطح  $50 \times 50$  متر لحاظ شد. حجم زیر سطح زمین به سلول‌های مکعبی با ابعاد ۵۰ متر تقسیم شده است که با توجه به ابعاد مدل، تعداد این سلول‌های مکعبی

جهت انتخاب پارامتر منظم‌سازی به روش UPRE، ابتدا چند عدد مختلف برای پارامتر منظم‌سازی انتخاب می‌شود. سپس تابع  $U(\beta)$  برای تک‌تک این اعداد با استفاده از رابطه (۱۰) محاسبه می‌شود. در نهایت، آن عددی برای پارامتر منظم‌سازی بهینه انتخاب می‌شود که تابع  $U(\beta)$  را کمینه کند (رضایی و همکاران، ۱۳۹۴). در پژوهش حاضر برای درک بهتر کارایی روش UPRE نتایج اعمال داده‌های مصنوعی و داده‌های واقعی بر این الگوریتم با نتایج روش اصل اختلاف مقایسه شده است. سادگی در محاسبات، یکی از برترین مزایای روش اصل اختلاف در تخمین بهینه پارامتر منظم‌سازی است (الدبرگ و لی، ۲۰۰۵). روش‌های UPRE و اصل اختلاف زمانی به کار گرفته می‌شوند که مقدار نوفه و مقدار انحراف معیار نوفه معلوم باشد.

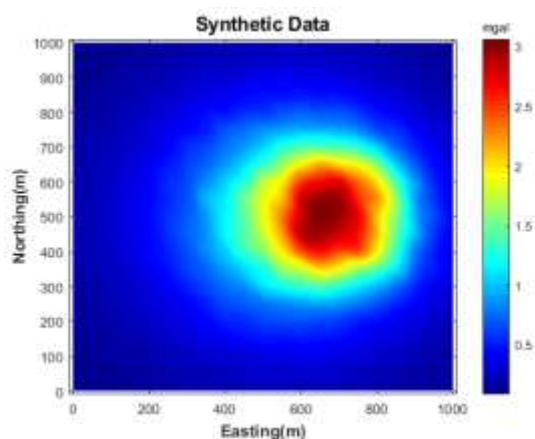
### ۲-۲-۲ روش دوقطری‌سازی لنکروس (LSQR)

روش دوقطری‌سازی لنکروس روشی تکرارپذیر است که بردارهای پایه متعامد را برای زیرفضای کرلیف  $K_k$  ایجاد می‌کند (پیاژه و سندرز، ۱۹۸۲). در این روش دستگاه معادلات اصلی با یک دستگاه معادلات با ابعاد کمتر جایگزین می‌شود؛ در نتیجه سرعت حل مسئله با دقت زیادی افزایش می‌یابد (عابدی و همکاران، ۲۰۱۳). به عبارت دیگر، دستگاه معادلات اصلی مسئله، به یک زیرفضا با ابعاد کوچک‌تر تصویر می‌شود. کوچک شدن فضای حل مسئله باعث افزایش سرعت حل مسئله با حفظ اطلاعات کلی مسئله می‌شود. اگر دستگاه معادلات به صورت رابطه (۵) باشد، می‌توان بردار پارامترهای مدل را با استفاده از رابطه زیر به دست آورد:

(۱۱)

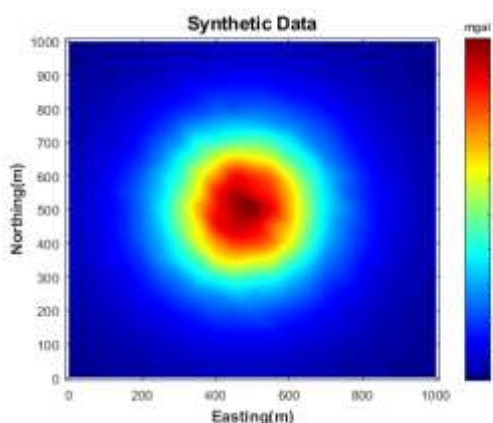
$$\rho = (G^T W_d^T W_d G + \beta D^T D W_{depth})^{-1} G^T W_d^T W_d d^{obs}$$

به منظور حل مسئله وارون با روش دوقطری‌سازی

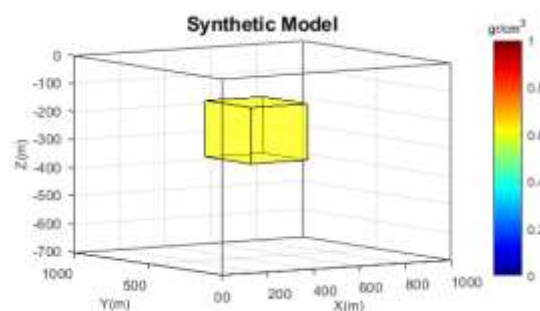


شکل ۳. داده‌های حاصل از مدل مصنوعی دایک با اعمال ۵٪ نوفه تصادفی.

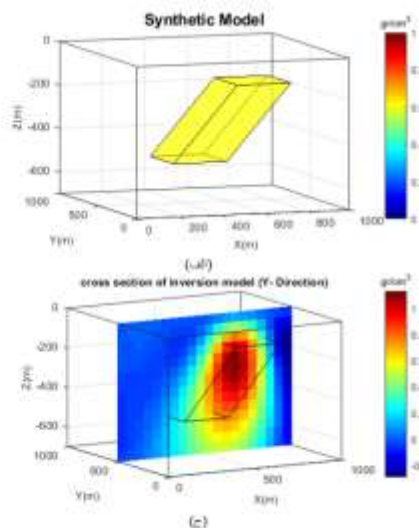
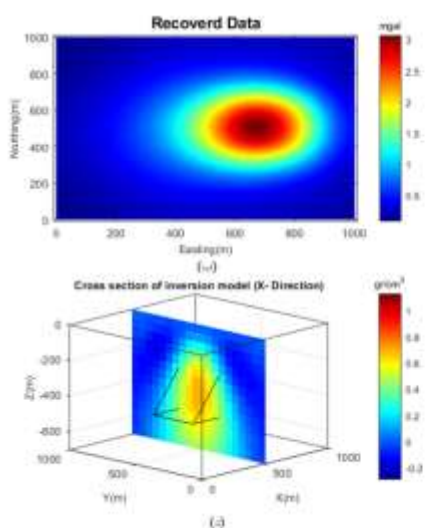
۲۰×۲۰×۱۰=۴۰۰۰ است. ابتدا داده‌های حاصل از این مدل‌های مصنوعی با استفاده از مدل‌سازی پیشرو تولید شد. سپس برای ارزیابی میزان پایداری الگوریتم، ۵ درصد نوفه تصادفی با توزیع نرمال بر داده‌های مربوط به هر مدل اعمال شد (شکل‌های ۳ و ۴). در شکل ۵ نقشه داده‌های پیش‌بینی‌شده در فرایند وارون‌سازی داده‌های حاصل از مدل مصنوعی دایک و همچنین گسترش عمقی مدل بازیابی‌شده در امتداد Z با X ثابت و Y ثابت نمایش داده شده است. همچنین نتایج وارون‌سازی داده‌های متعلق به مدل مصنوعی مکعب در شکل ۴ و گسترش عمقی فرایند وارون‌سازی در شکل ۶ نشان داده شده است.



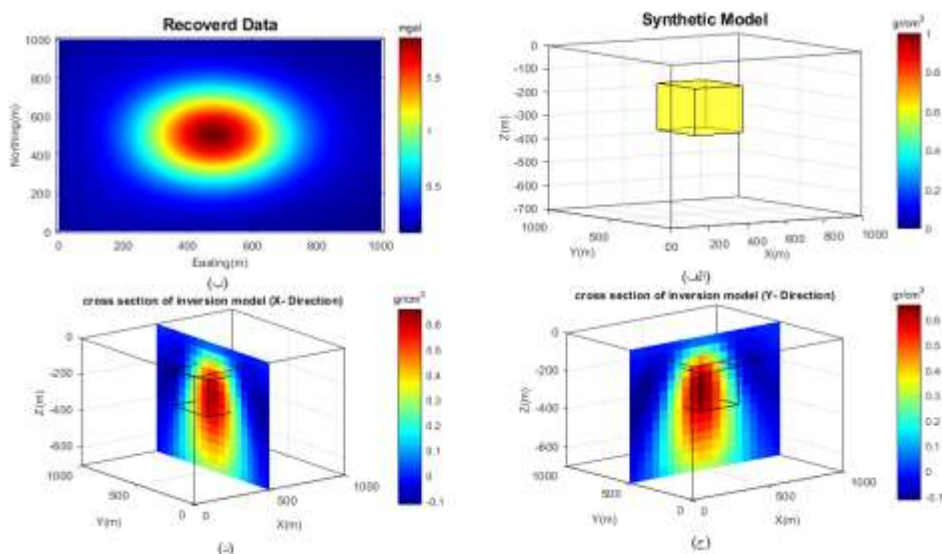
شکل ۴. داده‌های حاصل از مدل مصنوعی مکعب با اعمال ۵٪ نوفه تصادفی.



شکل ۲. نمایش سه‌بعدی مدل مصنوعی مکعب.



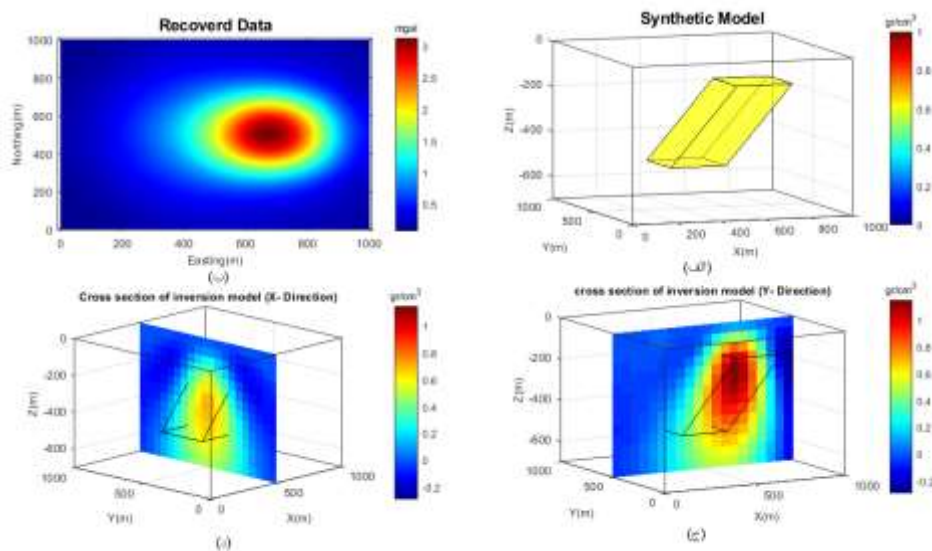
شکل ۵. (الف) موقعیت و نمایش سه‌بعدی مدل مصنوعی دایک در فضای زیرسطحی (ب) داده‌های بازیابی‌شده حاصل از مدل مصنوعی دایک (ج-د) گسترش عمقی مدل‌سازی سه‌بعدی داده‌های مصنوعی دایک با استفاده از روش UPRE برای محاسبه پارامتر منظم‌سازی.



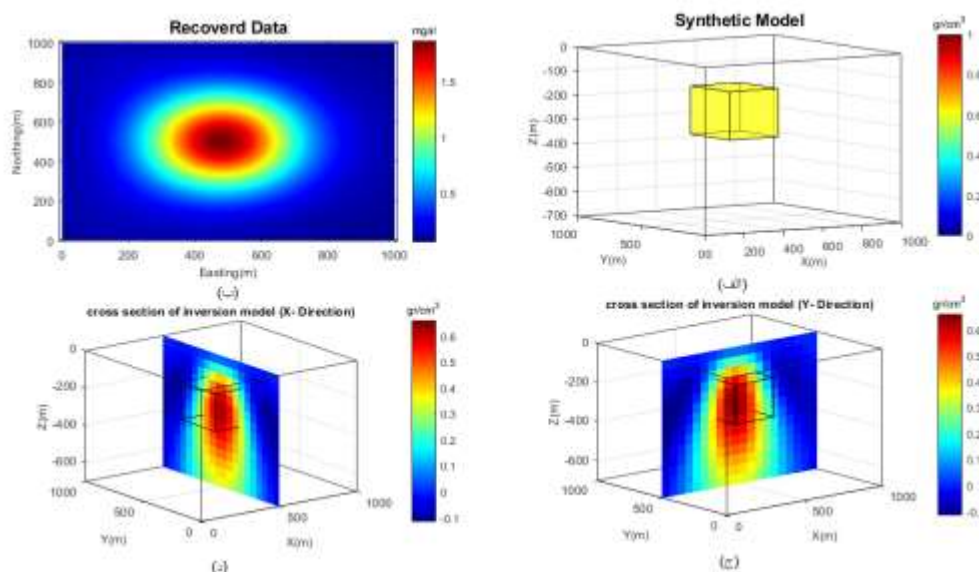
شکل ۶. (الف) موقعیت و نمایش سه‌بعدی مدل مصنوعی مکعب در فضای زیر سطحی (ب) داده‌های بازیابی شده حاصل از مدل مصنوعی مکعب (ج-د) گسترش عمقی مدل‌سازی سه‌بعدی داده‌های مصنوعی مکعب با استفاده از روش UPRE برای محاسبه پارامتر منظم‌سازی.

بازتولید می‌کند. نتایج وارون‌سازی در شکل‌های ۵ و ۶ با استفاده از روش دوقطری‌سازی لکروس نشان می‌دهد ابعاد بلوک‌ها به‌خوبی تعیین شده است.

شکل‌های ۵ و ۶ گسترش عمقی مدل بازیابی شده را نشان می‌دهند. همان‌طور که مشاهده می‌شود، الگوریتم پیشنهادی، مدل مدنظر را در اعماق مختلف مفروض



شکل ۷. (الف) موقعیت و نمایش سه‌بعدی مدل مصنوعی دایک در فضای زیرسطحی (ب) داده‌های بازیابی شده حاصل از مدل مصنوعی دایک (ج-د) گسترش عمقی مدل‌سازی سه‌بعدی داده‌های مصنوعی دایک با استفاده از روش اصل اختلاف برای محاسبه پارامتر منظم‌سازی.



شکل ۸. (الف) موقعیت و نمایش سه بعدی مدل مصنوعی مکعب در فضای زیرسطحی (ب) داده‌های بازیابی شده حاصل از مدل مصنوعی مکعب (ج-د) گسترش عمقی مدل‌سازی سه بعدی داده‌های مصنوعی مکعب با استفاده از روش اصل اختلاف برای محاسبه پارامتر منظم‌سازی.

جدول ۱. مقایسه زمان اجرا و تعداد تکرارها و مقدار عدم برازش بین روش‌های اصل اختلاف و UPRE برای داده‌های مصنوعی.

تعداد تکرارها	مقدار عدم برازش	زمان اجرای برنامه (ثانیه)	روش پارامتر منظم‌سازی
۷	۱۴/۷	۷/۵۴	UPRE - دایک
۹	۱۴/۷	۳۸/۴۵	اصل اختلاف - دایک
۵	۱۶/۶۲	۶/۶۶	UPRE - مکعب
۵	۱۶/۶۶	۷۲/۲۵	اصل اختلاف - مکعب

روش اصل اختلاف انجام شده است. برای مقایسه هرچه بهتر نتایج، زمان فرایند وارون‌سازی و مقدار عدم برازش و تعداد تکرارها در جدول ۱ آورده شده است.

#### ۴ وارون‌سازی داده‌های واقعی

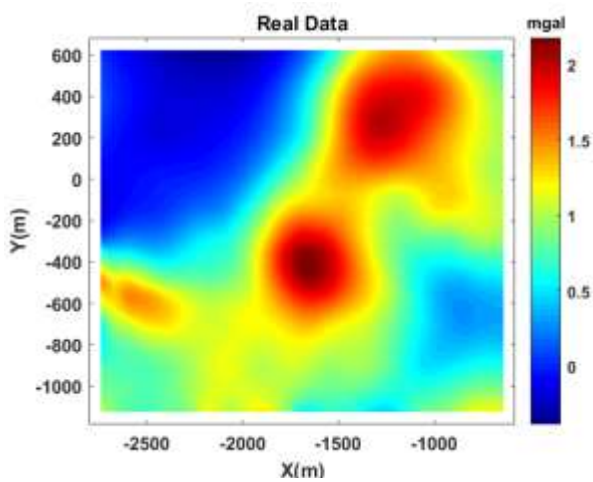
برای ارزیابی الگوریتم ارائه شده، این الگوریتم بر داده‌های گرانی‌سنجی مربوط به ذخیره سولفیدی سن‌نیکلاس در استان زاکاتکاس کشور مکزیک اعمال شده است. بی‌هنجاری مربوط به این داده‌ها، ناشی از یک توده مس و روی سولفیدی است که با سنگ‌های آتشفشانی درهم آمیخته فلیسیک و مافیک میزبان احاطه شده است. وجود یک گسل عمیق شرقی - جنوب غربی در محدوده،

به منظور مقایسه هرچه بیشتر عملکرد این روش، مقدار پارامتر منظم‌سازی با استفاده از UPRE و اصل اختلاف محاسبه شده است. نتایج مدل‌سازی وارون با استفاده از روش اصل اختلاف برای محاسبه پارامتر منظم‌سازی در شکل‌های ۷ و ۸ به نمایش درآمده است.

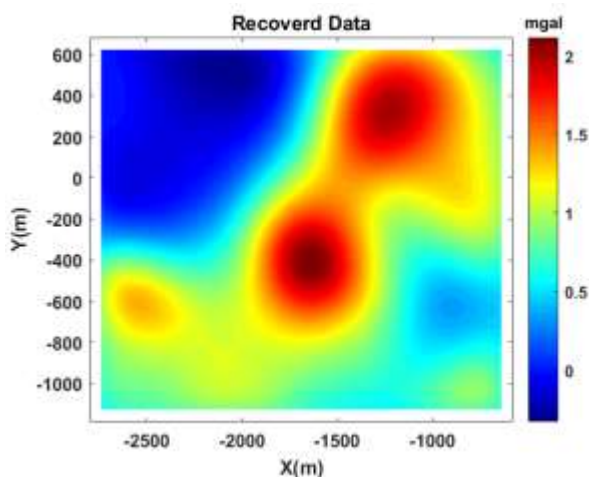
نتایج وارون‌سازی با استفاده از هر دو روش نشان می‌دهد ابعاد و گسترش عمقی مدل مصنوعی به صورت مطلوب تخمین زده شده است. نتایج وارون‌سازی داده‌های مصنوعی و محاسبه مقدار بهینه پارامتر منظم‌سازی با استفاده از دو روش تخمین گرنااریب خطرپذیری احتمالی UPRE و اصل اختلاف نشان می‌دهد فرایند وارون‌سازی در روش UPRE در زمان و تعداد تکرار کمتری نسبت به



مختلف نشان داده شده است. با توجه به نتایج شکل ۱۲ مشاهده می‌شود الگوریتم پیشنهادی، تخمین مناسبی از شکل و ابعاد مدل ارائه می‌کند. مقایسه شکل‌های ۱۲-الف و ۱۲-ب به وضوح نشان می‌دهد گسترش عمقی توده سولفیدی از عمق بالایی ۱۰۰ متر تا عمق پایینی ۶۰۰ متر است. همچنین مقدار پارامتر منظم‌سازی با استفاده از روش UPRE برای وارون‌سازی داده‌های واقعی برابر ۲/۳ بوده است (شکل ۱۳).

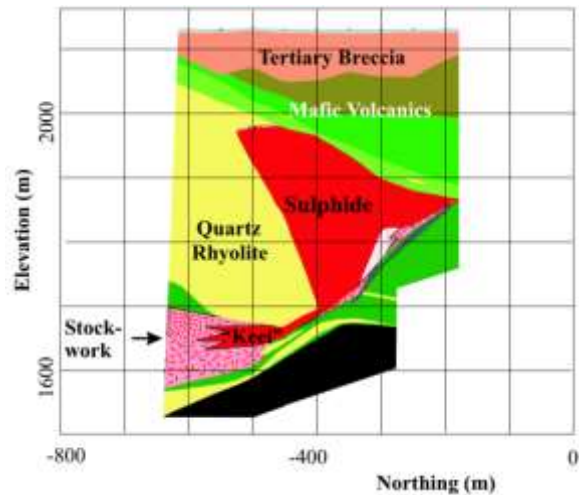


شکل ۱۰. داده‌های گرانی‌سنجی ذخیره سن نیکلاس، مکزیک.



شکل ۱۱. داده‌های حاصل از فرایند وارون‌سازی برای داده‌های واقعی.

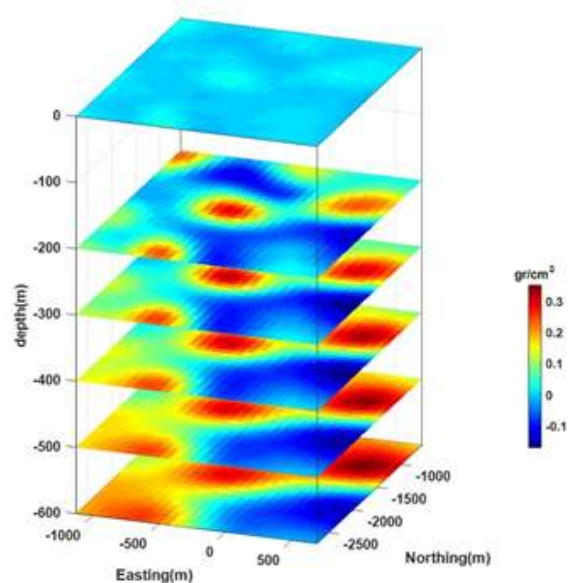
شرایط مناسبی را برای کانی‌زایی فراهم کرده است (شکل ۹) (فیلیس و همکاران، ۲۰۰۱).



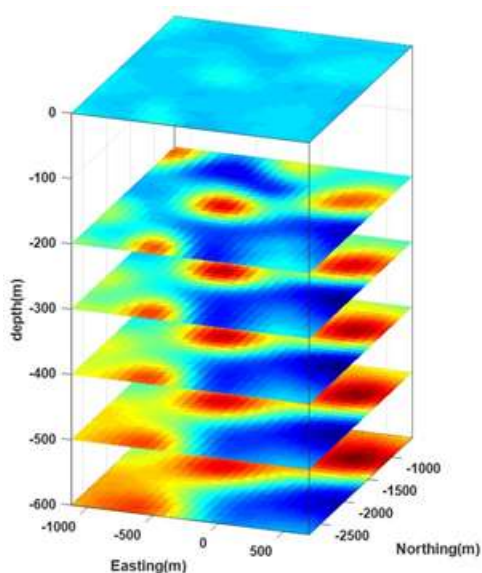
شکل ۹. مقطع قائم زمین‌شناسی در فاصله  $y = -1700$  منطبق بر ذخیره سولفیدی سن نیکلاس (فیلیس و همکاران، ۲۰۰۱).

تباین چگالی بین توده سولفیدی و سنگ میزبان در حدود  $3/5$  گرم بر سانتیمتر مکعب است (فیلیس و همکاران، ۲۰۰۱). داده‌های اولیه گرانی با فاصله بین خطوط ۱۰۰ متر و ۲۰۰ متر و فواصل بین ایستگاهی ۲۵ متر و ۱۰۰ متر برداشت شده است. در این پژوهش، داده‌ها به صورت یک شبکه منظم  $70 \times 70$  درآمده است. در شکل ۱۰ نقشه بی‌هنجاری داده‌های مشاهده‌ای منظم‌شده نمایش داده شده است. برای وارون‌سازی سه‌بعدی داده‌ها، حجم زیرسطحی منطقه مورد مطالعه به  $31 \times 26 \times 21 = 16926$  سلول گسسته با ابعاد ۷۰ متر به ترتیب در راستای  $x$ ،  $y$  و  $z$  تقسیم می‌شود. در شکل ۱۱ داده‌های وارون‌سازی شده با الگوریتم طراحی شده در این مقاله نمایش داده شده است. با مقایسه شکل‌های ۱۰ و ۱۱ می‌توان دید که الگوریتم پیشنهادی توانسته است با تقریب بسیار خوبی داده‌های واقعی را بازتولید کند. در شکل ۱۲ مدل سه‌بعدی واقعی ناشی از داده‌های گرانی‌سنجی سن نیکلاس در اعماق

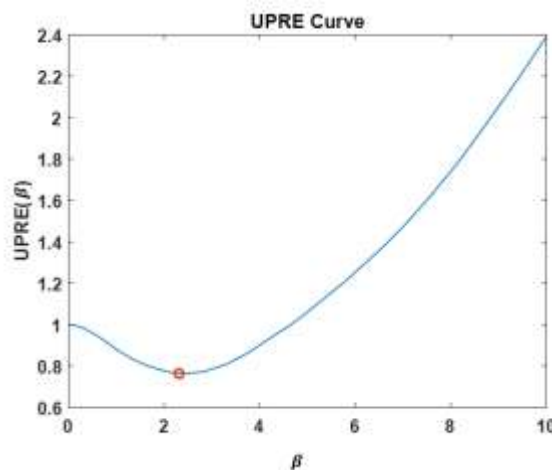
نتایج وارون‌سازی با استفاده از هر دو روش نشان می‌دهد ابعاد و گسترش عمقی مدل مصنوعی به صورت مطلوبی تخمین زده شده است. باید توجه داشت مزیت بارز روش تخمین گر نارایب خطرپذیری احتمالی نسبت به روش اصل اختلاف که در این پژوهش با یکدیگر مقایسه شدند، در مدت زمان اجرای الگوریتم وارون‌سازی، مقدار عدم برازش داده‌های مشاهده‌ای و محاسبه‌ای و همچنین تعداد تکرار الگوریتم وارون‌سازی است که نسبت به روش اصل اختلاف مقادیر کمتری دارد. برای مقایسه هرچه بهتر نتایج، زمان فرایند وارون‌سازی و مقدار عدم برازش و تعداد تکرارها در جدول ۲ آورده شده است.



شکل ۱۲. گسترش عمقی حاصل از مدل‌سازی سه‌بعدی داده‌های واقعی با استفاده از روش UPRE برای محاسبه پارامتر منظم‌سازی.



شکل ۱۴. گسترش عمقی حاصل از مدل‌سازی سه‌بعدی داده‌های واقعی با استفاده از روش اصل اختلاف برای محاسبه پارامتر منظم‌سازی.



شکل ۱۳. منحنی تغییرات پارامتر منظم‌سازی و انتخاب مقدار بهینه پارامتر منظم‌سازی.

برای مقایسه هرچه بهتر نتایج وارون‌سازی داده‌های واقعی با استفاده از روش UPRE، نتایج مدل‌سازی وارون با استفاده از روش اصل اختلاف برای محاسبه پارامتر منظم‌سازی در شکل ۱۴ به‌نمایش درآمده است.

جدول ۲. مقایسه زمان اجرا و تعداد تکرارها و مقدار عدم برازش بین روش اصل اختلاف و UPRE برای داده‌های واقعی

تعداد تکرارها	مقدار عدم برازش	زمان اجرای برنامه (ثانیه)	روش پارامتر منظم‌سازی
۹	۲۶/۴	۴۸/۳۶	UPRE
۱۱	۵۰/۰۵	۶۴/۵۲	اصل اختلاف

۴۵-۳۰

## ۵ نتیجه‌گیری

- در مطالعه حاضر به وارون‌سازی هموار سه‌بعدی داده‌های گرانی‌سنجی با استفاده از روش دوقطری‌سازی لنگزوس و محاسبه پارامتر منظم‌سازی با استفاده از روش تخمین گر ناریب خطرپذیری احتمالی پرداخته شده است. با توجه به اینکه در الگوریتم پیشنهادی، هیچ قید زمین‌شناسی و ژئوفیزیکی در فرایند وارون‌سازی اعمال نشده است، نتایج بررسی‌ها نشان می‌دهد روش تخمین گر ناریب خطرپذیری احتمالی روشی مناسب برای تخمین مقدار بهینه پارامتر منظم‌سازی در وارون‌سازی سه‌بعدی داده‌های گرانی به روش دوقطری‌سازی لنگزوس است. این الگوریتم تقریب مناسبی از هندسه توده‌ها، گسترش عمقی و جانبی توده‌ها و همچنین تباین چگالی آنها با محیط پیرامون خود هم در مدل مصنوعی و هم در داده‌های واقعی ارائه می‌دهد. با مقایسه اطلاعات مربوط به جدول ۲ مشاهده می‌شود الگوریتم پیشنهادی توانسته است در همگرایی مسئله وارون در زمان کمتر و با تکرار کمتر، کارایی مطلوبی نسبت به روش اصل اختلاف از خود نشان دهد.
- منابع**
- آقاجانی، ح.، مرادزاده، ع.، نجاتی کلاته، ع.، رضایی، م.، ۱۳۹۴، برآورد خودکار پارامتر منظم‌سازی به روش تخمین گر ناریب خطرپذیری احتمالی در وارون‌سازی سه‌بعدی مقید داده‌های مغناطیسی: نشریه پژوهش‌های ژئوفیزیک کاربردی، ۳(۲)، ۱۴۵-۱۵۴.
- قائدرحمتی، ر.، مرادزاده، ع.، سونگ کن، ل.، فتحیان‌پور، ن.، ۱۳۹۴، بهبود وارون‌سازی دوبعدی داده‌های مگنتوتلوریک با استفاده از روش‌های خودکار انتخاب پارامترهای منظم‌سازی: مجله ژئوفیزیک ایران، ۹(۱)، balancing method for 3D inversion of gravity data: Journal of Mining and Environment, 10(2), 357-364.
- Abedi, M., Gholami, A., Norouzi, G. H., and Fathianpour, N., 2013, Fast inversion of magnetic data using Lanczos bidiagonalization method: Journal of Applied Geophysics, 90, 126-137.
- Bauer, F., and Lukas, M. A., 2011, Comparing parameter choice methods for regularization of ill-posed problems: Mathematics and Computers in Simulation, 81(9), 1795-1841.
- Blakely, R. J., 1996, Potential Theory in Gravity and Magnetic Applications: Cambridge University Press.
- Calvetti, D., Morigi, S., Reichel, L., and Sgallari, F., 2000, Tikhonov regularization and the L-curve for large discrete ill-posed problems: Journal of Computational and Applied Mathematics, 123(1-2), 423-446.
- Farquharson, C. G., and Oldenburg, D. W., 2004, A comparison of automatic techniques for estimating the regularization parameter in non-linear inverse problems: Geophysical Journal International, 156(3), 411-425.
- Farquharson, C. G., 2008, Constructing piecewise-constant models in multidimensional minimum-structure inversions: Geophysics, 73(1), K1-K9.
- Fullagar, P. K., Pears, G. A., and McMonnies, B., 2008, Constrained inversion of geologic surfaces—pushing the boundaries: The Leading Edge, 27(1), 98-105.
- Hutchinson, M. F., 1990, A stochastic estimator of the trace of the influence matrix for Laplacian smoothing splines: Communication in Statistics - Simulation and Computation, 19(2), 443-450.
- Last, B. J., and Kubik, K., 1983, Compact gravity inversion: Geophysics, 48, 713-721.
- Li, Y., and Oldenburg, D. W., 1998, 3-D inversion of gravity data: Geophysics, 63(1), 109-119.
- Li, Y., and Oldenburg, D. W., 2003, Fast inversion of large-scale magnetic data using wavelet transforms and a logarithmic barrier method: Geophysical Journal International, 152(2), 251-265.
- Martinez, C., Li, Y., Krahenbuhl, R., and Braga, M., 2010, 3D Inversion of airborne gravity gradiometry for iron ore exploration in Brazil: SEG Technical Program Expanded Abstracts 2010, 1753-1757.
- Moghadasi, M., Nejati Kalateh, A., and Rezaie, M., 2019, Automatic estimation of regularization parameter by active constraint

- Oldenburg, D. W., and Li, Y., 2005, Inversion for applied geophysics: A tutorial: Investigations in Geophysics, **13**, 89-150.
- Paige, C. C., and Saunders, M. A., 1982, LSQR: An algorithm for sparse linear equations and sparse least squares: ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS), **8**(1), 43-71.
- Phillips, N., Oldenburg, D., Chen, J., Li, Y., and Routh, P., 2001, Cost effectiveness of geophysical inversions in mineral exploration: Applications at San Nicolas: The Leading Edge, **20**(12), 1351-1360.
- Rene', R. M., 1986, Gravity inversion using open, reject, and "shape-of-anomaly" fill criteria: Geophysics, **51**, 988-994.
- Rezaie, M., Moradzadeh, A., Kalate, A. N., and Aghajani, H., 2017, Fast 3D focusing inversion of gravity data using reweighted regularized Lanczos bidiagonalization method: Pure and Applied Geophysics, **174**(1), 359-374.
- Tikhonov, A. N., and Arsenin, V. I., 1977, Solutions of ill-posed problems: V. H. Winston & Sons.
- Vatankhah, S., Ardestani, V. E., and Renaut, R. A., 2015, Application of the  $\chi^2$  principle and unbiased predictive risk estimator for determining the regularization parameter in 3-D focusing gravity inversion: Geophysical Journal International, **200**(1), 265-277.
- Vogel, C. R., 2002, Computational Methods for Inverse Problems: SIAM, U S.

## 3D smooth inversion of gravity data and estimation of optimum regularization parameter by unbiased predictive risk estimator (UPRE) method, case study: San Nicolas Sulfide Deposit, Mexico

Ali Nejati Kalateh<sup>1</sup>, Meysam Moghadasi<sup>2\*</sup>, Mohammad Rezaie<sup>3</sup> and Yaser Dehban<sup>2</sup>

<sup>1</sup> *Associated professor, Faculty of Mining, Petroleum and Geophysics Engineering, Shahrood University of Technology, Shahrood, Iran*

<sup>2</sup> *PhD student, Faculty of Mining, Petroleum & Geophysics Engineering, Shahrood University of Technology, Shahrood, Iran*

<sup>3</sup> *Assistant professor, Faculty of Engineering, Malayer University, Malayer, Iran*

(Received: 07 April 2021, Accepted: 11 January 2022)

### Summary

Inversion of gravity data is one of the important steps in the interpretation of practical gravity data. The goal of 3D inversion is to estimate the density distribution of an unknown subsurface model from a set of known gravity observations measured on the surface. The inversion result can be obtained by minimization of Tikhonov objective function. Inversion of gravity data is an underdetermined and ill-posed problem. In addition, the non-uniqueness of the solution is the main issue of the inversion. One way to achieve a suitable model result in the inversion is to carry out the inversion with smoothness and smallness constraint. The determination of an optimal regularization parameter is highly important in gravity data inversion. Regularization parameter makes a trade-off between misfit and regularization function. In this paper, an attempt has been made to use Unbiased Predictive Risk Estimator (UPRE) method in selecting the best regularization parameter for 3D inversion of gravity data using Lanczos bidiagonalization (LSQR) algorithm. The UPRE method has been adapted for the solution of inverse problems. The UPRE method is based on a statistical estimator of the mean squared norm of predictive value. In this method, the optimal regularization parameter minimizes the UPRE function. We have developed an algorithm for 3D inversion of gravity data that uses the UPRE method for choosing optimal regularization parameter, and then, the inverse problem is solved by the LSQR algorithm. To evaluate the reliability of the introduced method, the gravity data of a synthetic model contaminated by 5 percent random noise has been inverted using the developed method. The discrepancy principle method was also applied for comparison of its results with the UPRE results. Then, the algorithm was used for inversion of real gravity data obtained from San Nicolas deposit in Mexico. The results of three-dimensional (3D) inversion of gravity data from this sulfide deposit show that the LSQR algorithm can provide an adequate estimate of gravity density and geometry of subsurface structures of mineral deposits. A comparison of the inversion results with geological information clearly indicates that the proposed algorithm can be used for 3D inversion of gravity data to estimate precisely the density distribution and geometry of ore bodies. The obtained results indicate that the discrepancy method is weaker than UPRE method to choose regularization parameter, but the UPRE method finds a unique optimal regularization parameter. Finally, the introduced algorithm has been used for 3D inversion of gravity data from sulfide deposit in San Nicolas. The results are consistent with geological information.

**Keywords:** Smooth inversion, regularization parameter, UPRE method, gravity

---

\*Corresponding author:

moghadasimeysam70@gmail.com