

## تأثیر خطای مدل رقومی ارتفاعی بر اثر مستقیم و غیرمستقیم توپوگرافی

مهدی گلی<sup>۱\*</sup>

<sup>۱</sup> استادیار ژئودزی، دانشگاه صنعتی شاهرود، دانشکده مهندسی عمران، شاهرود، ایران

(دریافت: ۱۴۰۱/۰۳/۲۲، پذیرش: ۱۴۰۱/۰۶/۱۲)

### چکیده

هنگام تعیین زمین‌وار (ژئوئید) سانتیمتری در مناطق کوهستانی، توپوگرافی (اجرام بالای زمین‌وار) مؤلفه‌ای شایان توجه است؛ از این رو بخشی از خطای تعیین زمین‌وار متأثر از خطای اثر توپوگرافی است. داده اصلی در محاسبه اثر توپوگرافی، مدل‌های ارتفاعی رقومی (DEM) است؛ بنابراین دقت اثر توپوگرافی، صرف‌نظر از نحوه مدل‌سازی عددی آن، به خطای DEM وابسته است. این مطالعه به بررسی تأثیر خطای DEM بر اثر مستقیم و غیرمستقیم توپوگرافی در تعیین زمین‌وار می‌پردازد. در این پژوهش اثر مستقیم و غیرمستقیم توپوگرافی با مدل دوم هلمرت و به روش موریتز-پلینن محاسبه می‌شود. خطای اثر توپوگرافی با اعمال قانون انتشار خطا بر روابط انتگرالی محاسبه آن به‌دست می‌آید. برای سرعت بخشیدن به محاسبات عددی، از تبدیل فوریه سریع استفاده می‌شود. محاسبات عددی این مطالعه برای منطقه کوهستانی البرز مرکزی و با استفاده از دو مدل رقومی ارتفاعی جهانی SRTM و AW3D30 با قدرت تفکیک مکانی یک ثانیه کمانی (حدود ۳۰ متر) انجام شد. نتایج عددی نشان می‌دهد اختلاف مقادیر متوسط اثر مستقیم و غیرمستقیم توپوگرافی به‌دست‌آمده از این دو مدل به ترتیب ۰/۱ میلی‌گال و ۱ میلی‌متر است؛ بنابراین اختلاف معنی‌داری در دو مدل رقومی برای محاسبه اثر توپوگرافی وجود ندارد. همچنین اثر خطای مدل رقومی SRTM بر اثر مستقیم و غیرمستقیم توپوگرافی در بازه ۰ تا ۰/۶ میلی‌گال و خطای اثر مستقیم توپوگرافی در بازه ۰ تا ۱/۷ سانتیمتر متغیر است. در نهایت، خطای مدل رقومی SRTM در تعیین زمین‌وار در منطقه آزمون به ۱/۸ سانتیمتر می‌رسد. نتایج عددی حاکیست خطاهای برآوردشده برای اثر توپوگرافی در تعیین دقت زمین‌وار جاذبی در مناطق کوهستانی شایان توجه هستند.

**واژه‌های کلیدی:** شبیه‌سازی عددی، فرورانش، رئولوژی، لیتوسفر قاره‌ای، دگرشکلی کششی، پسروی درازگودال

## ۱ مقدمه

مدل رقومی ارتفاعی (DEM)، داده اصلی برای محاسبه اثر توپوگرافی در ژئودزی و ژئوفیزیک است. به لطف فناوری‌های نوین در فتوگرامتری و سنجش از دور، مدل‌های جهانی متنوعی با تفکیک مکانی ۳۰ متر برای اغلب مناطق زمین در دسترس است؛ برای مثال در منطقه ایران در کنار مدل‌های رقومی سازمان نقشه‌برداری که از نقشه‌های پوششی ۱:۲۵۰۰۰ استخراج شده‌اند، مدل‌های ارتفاعی مختلفی نظیر SRTM، ASTER و AW3D30 با تفکیک ۳۰ متر نیز در دسترس کاربران است.

مدل‌های ارتفاعی رقومی بنا بر روش تهیه و پارامترهای هندسی زمین نظیر شیب و پوشش منطقه (پوشش گیاهی، برف و یخ) با خطاهای اتفاقی و نظام‌مند همراه هستند. تاکنون مطالعات مختلفی درباره ارزیابی کیفی مدل‌های ارتفاعی رقومی جهانی در مناطق مختلف ایران انجام شده است؛ برای نمونه سیف و ابراهیمی (۱۳۹۱) دقت مدل SRTM با گام ۹۰ متر و نسخه دوم مدل GDEM محصول ماهواره ASTER را با دقت مدل رقومی سازمان نقشه‌برداری موسوم به NIDEM در سه ناحیه مختلف ایران مقایسه کردند و انحراف معیار اختلافات برای دو مدل SRTM و GDEM را در قیاس با NIDEM به ترتیب برابر ۸/۷ و ۹/۱ متر به دست آوردند. نادری و همکاران (۱۳۹۵) مدل‌های ارتفاعی SRTM و GDEM را در مناطق مرکزی ایران با داده‌های کنترل زمینی مقایسه کردند و نشان دادند در مناطق غیرکوهستانی، دقت مدل SRTM به میزان چشمگیری بیشتر از مدل GDEM است، اما دقت آنها در مناطق کوهستانی تقریباً یکسان است. همچنین در آن مطالعه، دقت (RMS) کلی مدل‌های ارتفاعی SRTM و GDEM در مقایسه با نقاط کنترل زمینی به ترتیب ۸/۹۳ و ۹/۸۴ به دست آمد و حدود ۳٪ از نقاط مدل ASTER خطایی بیش از ۲۰ متر داشتند. این نسبت برای مدل SRTM حدود ۳٪ بود. کابلی‌زاده و همکاران (۱۳۹۹) مدل‌های رقومی SRTM و GDEM را با داده‌های توپوگرافی زمینی

در استان خوزستان مقایسه کردند و RMS اختلافات را به ترتیب ۶/۹۴ و ۳/۴۶ متر به دست آوردند. نادری و همکاران (۲۰۲۰) فواصل اطمینان برای RMSE سه مدل رقومی GDEM، SRTM و AW3D30 را محاسبه کردند. بر اساس آن پژوهش، مدل رقومی AW3D30 بهترین دقت را در مقایسه با نقاط کنترل زمینی در مناطق مرکزی و غربی کشور دارد. مجموع مطالعات فوق نشان می‌دهد دقت مدل SRTM در ایران معادل دقت جهانی آن و در حدود ۸ متر است.

علی‌رغم مطالعات فراوان در زمینه ارزیابی کیفیت مدل‌های ارتفاعی رقومی، تلاش‌های بسیار اندکی درباره نحوه انتشار خطای DEM بر اثر توپوگرافی در تعیین زمین‌وار انجام شده است. اغلب مطالعات قبلی از تأثیر خطاهای DEM بر تصحیح توپوگرافی صرف نظر کرده و تنها به نحوه گسسته‌سازی انتگرال نیوتن (ویلدفایفر، ۲۰۰۸) و مخلوف و ایلک، ۲۰۰۸) و تأثیر گام DEM بر اثر توپوگرافی (سولیس و همکاران، ۲۰۰۹ و گلی، ۱۳۹۷) پرداخته‌اند. از جمله محدود مطالعات در زمینه تأثیر خطای DEM بر اثر توپوگرافی، پژوهش زلاچوسکا و کرینسکی (۲۰۰۹) است. در آن مطالعه روابط تحلیلی برای محاسبه مقادیر بیشینه خطای موقعیت مسطحاتی و ارتفاعی نقطه انتگرال‌گیری و DEM در تصحیح توپوگرافی کلاسیک به دست آمده است. مک‌کوبی و همکاران (۲۰۱۷) نخستین بار با استفاده از قانون انتشار خطا، تأثیر خطای DEM را بر اثر توپوگرافی کلاسیک محاسبه و برای تسریع محاسبات از تبدیل فوریه سریع استفاده کردند.

هدف از پژوهش حاضر، بررسی اثر انتخاب مدل ارتفاعی در تعیین زمین‌وار و محاسبه دقت اثر مستقیم و غیرمستقیم توپوگرافی در ایران است. برای این منظور ابتدا اثر مستقیم و غیرمستقیم توپوگرافی با دو مدل ارتفاعی SRTM و AW3D30 مقایسه می‌شود. سپس با استفاده از قانون انتشار خطا، دقت اثر مستقیم و غیرمستقیم توپوگرافی

$$\delta g(P) = \frac{G\rho}{2} R^2 \iint_S \frac{(h_Q - h_P)^2}{l_0^3} dS, \quad (1)$$

$$l_0 = \left[ (x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2 \right]^{1/2}$$

که نقطه محاسبه روی توپوگرافی با ارتفاع  $h_P$  است.  $h_Q$  ارتفاع نقطه انتگرال گیری و  $R$  شعاع متوسط زمین است. اثر مستقیم توپوگرافی مدل دوم هلمرت، همان اثر توپوگرافی کلاسیک است که به طور معمول در ژنودزی و ژئوفیزیک برای محاسبه بی‌هنجاری بوگه کامل استفاده می‌شود (مک کوبی و همکاران، ۲۰۱۷). اثر غیرمستقیم توپوگرافی در مدل هلمرت نیز از رابطه (۲) به دست می‌آید (وانگ و رپ، ۱۹۹۰):

$$\delta N(P_0) = -\frac{\pi G\rho h_P^2}{\gamma_0} - \frac{G\rho}{6\gamma_0} \iint_S \frac{h_Q^3 - h_P^3}{l_0^3} dS \quad (2)$$

که  $\gamma_0$  شتاب گرانشی نرمال در نقطه محاسبه روی بیضوی است. انتگرال‌های (۱) و (۲) را می‌توان با تبدیل فوریه سریع محاسبه کرد:

$$\delta g(P) = \frac{G\rho}{2} \Delta S \{ (h_Q^2 * l_0^{-3}) + h_P^2 (1 * l_0^{-3}) - 2h_P (h_Q * l_0^{-3}) \} \quad (3)$$

که  $\mathcal{F}$  و  $\mathcal{F}^{-1}$  به ترتیب تبدیل مستقیم و معکوس فوریه و  $\cong$  عملگر هم‌آمیخت (کانولوشن) است:  $(f * g) = \mathcal{F}^{-1} \{ \mathcal{F}(f) \mathcal{F}(g) \}$  در این رابطه  $\Delta S = R^2 \cos \varphi \Delta \lambda \Delta \varphi$  مساحت متوسط سلول‌های DEM است.  $\Delta \lambda$  و  $\Delta \varphi$  تفکیک مکانی DEM در راستای عرض و طول ژئودتیک است. برای محاسبه اثر غیرمستقیم توپوگرافی با استفاده از تبدیل فوریه داریم:

$$\delta N(P) = -\frac{\pi G\rho h_P^2}{\gamma_0} - \frac{G\rho}{6\gamma_0} \Delta S \{ (h_Q^3 * l^{-3}) - h_P^3 (1 * l^{-3}) \} \quad (4)$$

خطای DTE و ITE متأثر از خطای موقعیت مسطحاتی و ارتفاعی نقطه محاسباتی و دقت ارتفاعی و مسطحاتی DEM است. زلاجوسکا و کرینسکی (۲۰۰۹) مقادیر بیشینه خطای مؤلفه‌های ارتفاعی و مسطحاتی را برای اثر کلاسیک توپوگرافی برآورد کردند. بر اساس نتایج آن پژوهش و

با توجه به خطای مدل ارتفاعی برآورد می‌شود.

## ۲ محاسبه اثر توپوگرافی با روش موریتز-پلینن

برای تعیین زمین‌وار با انتگرال استوکس، باید داده‌های گرانی در سطح زمین‌وار معلوم باشند. هم‌زمان نیاز است تمام اجرام بالای زمین‌وار داخل آن قرار بگیرند. برای نیل به این هدف، پژوهشگران مختلفی مدل دوم هلمرت را به کار گرفته‌اند (برای نمونه موریتز، ۱۹۶۸؛ ونیچک و کلوزبرگ، ۱۹۸۷؛ ونیچک و مارتینک، ۱۹۹۴ و هک، ۲۰۰۳). در این روش اجرام توپوگرافی با یک لایه بسیار نازک با چگالی سطحی روی زمین‌وار جایگزین می‌شوند. این جایگزینی، یک اثر مستقیم و یک اثر غیرمستقیم بر میدان گرانش دارد. اثر مستقیم توپوگرافی، DTE، گرادیان تفاضل پتانسیل توپوگرافی و توپوگرافی لایه تحکیم‌شده روی زمین‌وار است. اثر غیرمستقیم، تصحیح هندسی لازم برای بازگشت از فضای هلمرت به زمین واقعی است.

در روش موسوم به ونیچک-مارتینک (مارتینک و ونیچک، ۱۹۹۴)، DTE گرادیان (ارتفاعی) پتانسیل توپوگرافی و گرادیان توپوگرافی لایه تحکیم‌شده در سطح زمین محاسبه و به بی‌هنجاری‌های هوای آزاد اعمال می‌شوند. کمیت حاصل یعنی بی‌هنجاری هلمرت به توپوگرافی وابسته است و در کوهستان‌ها تغییرات زیادی دارد. در روش موریتز-پلینن (موریتز، ۱۹۶۸ و وانگ و رپ، ۱۹۹۰)، DTE گرادیان (ارتفاعی) تفاضل پتانسیل توپوگرافی در سطح زمین و پتانسیل لایه تحکیم‌شده در سطح زمین‌وار است. در این روش با اعمال DTE بر بی‌هنجاری‌های هوای آزاد، بی‌هنجاری‌های فی (Faye) محاسبه می‌شود. در این مطالعه خطای اثر توپوگرافی با روش موریتز-پلینن بررسی می‌شود.

در روش موریتز-پلینن، اثر مستقیم توپوگرافی در تقریب صفحه‌ای از رابطه زیر به دست می‌آید (جکلی و سرپاس، ۲۰۰۳):

انتگرال گیری قرار می گیرند، در حالت پیوسته خواهیم داشت:

$$\sigma_{\delta g(P)}^2 = 2G^2 \rho^2 R^4 \iint_S \frac{(h_Q - h_P)^2 (\sigma_{DEM}^2 - C)}{l_0^6} dS \quad (9)$$

همانند قبل، مقدار انتگرال فوق را می توان در فضای فرکانس با استفاده از تبدیل فوریه به دست آورد:

$$\sigma_{\delta g(P)}^2 = 2\rho^2 G^2 \Delta S^2 \{ (h_Q^2 * l_0^{-6} \sigma_{DTM}^2) + h_P^2 (\sigma_{DTM}^2 * l_0^{-6}) - 2h_P (\sigma_{DTM}^2 h_Q * l_0^{-6}) - (C h_Q^2 * l_0^{-6}) - h_P^2 (C * l_0^{-6}) \sigma_{DTM}^2 + 2h_P \sigma_{DTM}^2 (C h_Q * l_0^{-6}) \} \quad (10)$$

که  $C = cov(h_P, h_Q)$  است. به همین ترتیب می توان دقت اثر غیرمستقیم توپوگرافی را نیز برآورد کرد. اثر عضو  $i$  ام DEM که در فاصله  $l_{iP}$  از نقطه  $P$  قرار دارد بر  $\delta N(P)$  برابر است با:

$$\delta g(P)_i = \frac{\pi G \rho h_P^2}{\gamma_0} - \frac{G \rho \Delta S h_i^3 - h_P^3}{6\gamma_0 l_{iP}^3} \quad (11)$$

اثر خطای ارتفاع بر  $\delta N(P)_i$  طبق قانون انتشار خطا برابر است با:

$$\sigma_{N(P)_i}^2 = \left( \frac{2\pi G \rho h_P}{\gamma_0} \right)^2 \sigma_{h_i}^2 + \frac{G \rho \Delta S}{6\gamma_0} \left[ \left( \frac{\partial K'}{\partial h_i} \right)^2 \sigma_{h_i}^2 + \left( \frac{\partial K'}{\partial h_Q} \right)^2 \sigma_{h_Q}^2 + \left( \frac{\partial K'}{\partial h_i} \right) \left( \frac{\partial K'}{\partial h_Q} \right) \sigma(h_i, h_Q) \right] \quad (12)$$

که  $K' = (h_i^3 - h_P^3) l_{iP}^{-3}$  است. با جایگزینی مشتقات ساده کردن رابطه فوق داریم:

$$\sigma_{N(P)_i}^2 = \left( \frac{2\pi G \rho h_P}{\gamma_0} \right)^2 \sigma_{DEM}^2 + \left( \frac{G \rho \Delta S}{6\gamma_0} \right)^2 [9h_i^4 l_{iP}^{-6} \sigma_{DEM}^2 + 9h_P^4 l_{iP}^{-6} \sigma_{DEM}^2 - 18h_i^2 h_P^2 l_{iP}^{-6} C] \quad (13)$$

در نهایت، خطای اثر غیرمستقیم در فضای فرکانس از رابطه زیر به دست می آید:

همان گونه که انتظار می رود، خطای موقعیت مسطحاتی نقطه محاسباتی و DEM اثر کمی بر خطای اثر توپوگرافی دارند؛ لذا در این مطالعه از خطای مسطحاتی صرف نظر می شود. اثر عضو  $i$  ام DEM که در فاصله  $l_{iP}$  از نقطه  $P$  قرار دارد بر  $\delta g(P)$  برابر است با:

$$\delta g(P)_i = \frac{G \rho (h_Q - h_P)^2}{2 l_{iP}^3} \Delta S_i \quad (5)$$

که  $\Delta S_i = R^2 \Delta \varphi \Delta \lambda \cos \varphi_i$  است. خطای ارتفاع  $h_P$  و  $h_i$  که هر دو از DEM به دست می آیند، طبق قانون انتشار خطا برابر است با:

$$\sigma_{\delta g(P)_i}^2 = \left( \frac{G \rho}{2} \Delta S \right)^2 \left[ \left( \frac{\partial K}{\partial h_i} \right)^2 \sigma_{h_i}^2 + \left( \frac{\partial K}{\partial h_Q} \right)^2 \sigma_{h_Q}^2 + 2 \left( \frac{\partial K}{\partial h_i} \right) \left( \frac{\partial K}{\partial h_Q} \right) cov(h_i, h_Q) \right] \quad (6)$$

که  $K = (h_i - h_P)^2 l_{iP}^{-3}$  است. با جایگزینی مشتقات داریم:

$$\sigma_{\delta g(P)_i}^2 = \left( \frac{G \rho}{2} \Delta S \right)^2 \left[ 4\Delta h_{Pi}^2 l_{iP}^{-6} \sigma_{h_i}^2 + 4\Delta h_{PQ}^2 l_{iP}^{-6} \sigma_{h_Q}^2 - 8\Delta h_{Pi}^2 l_{iP}^{-6} \sigma(h_i, h_Q) \right] \quad (7)$$

برای محاسبه رابطه فوق دانستن دقت DEM برای هر سلول آن ضروری است. در اینجا منظور از دقت، اختلاف مقدار DEM و مقدار حقیقی آن با روش های دقیق تر نظیر نقشه برداری زمینی است. بدیهی است برای تک تک سلول های DEM، دقت  $\sigma_{h_Q}^2$  در دسترس نیست. در اغلب موارد، به جای دقت هر سلول، از دقت کلی DEM ( $\sigma_{DEM}^2$ ) استفاده می شود. این دقت از مقایسه ارتفاع های DEM روی نقاط کنترل زمینی به دست می آید. پس از ساده سازی خواهیم داشت:

$$\sigma_{\delta g(P)_i}^2 = (G \rho \Delta S)^2 [2\Delta h_i^2 l_{iP}^{-6} \sigma_{DEM}^2 - 2\Delta h_i^2 l_{iP}^{-6} \sigma(h_i, h_Q)] \quad (8)$$

در این صورت برای همه نقاط DEM که در فاصله شعاع

اولیه (تصویر هوایی، لایدار و تصویر ماهواره‌ای)، روش درون‌یابی و ویژگی‌های زمین نظیر شیب و پوشش گیاهی بستگی دارد. برای تعیین خطای DEM، به داده‌های کنترل با دقت بیشتر یا یک DEM مبنا نیاز است. داده‌های کنترل، نقاطی هستند که موقعیت آنها با نقشه‌برداری زمینی محاسبه می‌شود. اگر یک DEM مبنا با دقت بیشتر نیز وجود داشته باشد، در عمل DEM با دقت کمتر نیز بی‌استفاده خواهد بود؛ لذا امکان برآورد خطای DEM برای همه سلول‌ها وجود ندارد و به جای آن، از یک دقت کلی برای این منظور استفاده می‌شود. این دقت از مقایسه نقاط کنترل موجود با DEM محاسبه می‌شود. برای محاسبه خطای اثر مستقیم و غیرمستقیم علاوه بر خطای کلی DEM، باید کوواریانس خطا نیز برآورد شود. از آنجا که کرنل‌های انتگرال‌های (۱) و (۲) همگی تابعی از  $\frac{1}{l^3}$  هستند، از اثر کوواریانس نمی‌توان صرف‌نظر کرد. در مطالعات مختلفی نظیر اکسانن (۲۰۰۶)، شورتریچ و مسینا (۲۰۱۱)، وانگ و همکاران (۲۰۱۶) و مک کویی و همکاران (۲۰۱۷)، از واریوگرام نمایی برای بیان وابستگی مکانی داده‌ها استفاده شده است:

$$\gamma(l) = \sigma^2 \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{3l}{a}\right) \right\} \quad (15)$$

که  $a$  و  $\sigma$  (واریانس خطا) پارامترهای  $\gamma(l)$  هستند و  $l$  پارامتر فاصله است. در این مطالعه، به تابع اتوکوواریانس نیاز است که می‌توان آن را از واریوگرام به‌دست آورد:

$$C(h) = \sigma^2 - \gamma(h) = \sigma^2 \exp\left(-\frac{3h}{a}\right) \quad (16)$$

برای برآورد دقیق پارامتر  $a$  داشتن داده‌های زمینی برای تعیین تابع کوواریانس تجربی یا واریوگرام تجربی لازم است. از آنجایی که در منطقه مورد مطالعه این مقاله (البرز مرکزی) داده‌های کنترل زمینی با تراکم کافی در اختیار

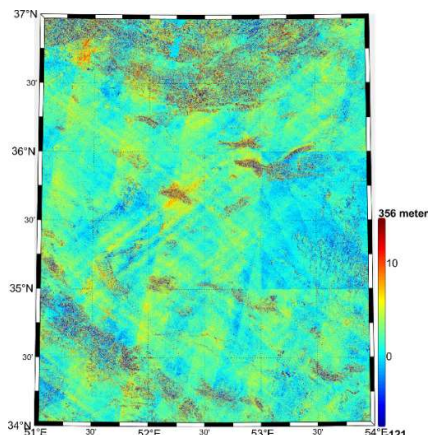
$$\begin{aligned} & \sigma_{N(P)}^2 \\ &= \left( \frac{2\pi G \rho h_P}{\gamma_0} \right)^2 \sigma_{DEM}^2 \\ &+ \left( \frac{G \rho \Delta S}{2\gamma_0} \right)^2 \{ (\sigma_{DEM}^2 h_Q^4 * l^{-6}) \\ &+ h_P^4 \sigma_{DEM}^2 (1 * l^{-6}) - 2h_P^2 (h_Q^2 * Cl^{-6}) \} \end{aligned} \quad (14)$$

در محاسبه عددی انتگرال‌های (۱) و (۲) توجه به محدودیت‌ها و نواقص آنها ضروری است. این انتگرال‌ها تقریب صفحه‌ای دارند و فقط برای نواحی نزدیک (تا چند ده کیلومتر) معتبرند. در روند تعیین روابط این انتگرال‌ها کرنل انتگرال نیوتن به سری تیلور بسط داده شده است و این انتگرال‌ها تنها شامل جملات خطی هستند؛ بنابراین خطای جملات غیرخطی در همه محاسبات این مقاله لحاظ نشده است. استفاده از این روابط برای ناحیه بسیار نزدیک (اطراف نقطه محاسباتی) به شرطی مجاز است که شیب توپوگرافی کمتر از ۴۵ درجه باشد.

انتگرال‌های (۱) و (۲) با عضو خطی گسسته‌سازی شده است. به جای عضو خطی می‌توان از عضو منشور (ویلد-فایفر، ۲۰۰۸) یا چندوجهی (سولیس و گاوردیل، ۲۰۲۱) استفاده کرد. برای بهبود نتایج می‌توان به جای تقریب صفحه‌ای از تقریب کروی (گلی و نجفی علمداری، ۱۳۹۳) و به جای جملات خطی می‌توان اثر جملات بالاتر را در نظر گرفت (لی و سیدریس، ۱۹۹۴ و گوئیال و همکاران، ۲۰۲۰). البته، باید توجه داشت که در این صورت روابط انتشار خطا بسیار پیچیده خواهد شد که برآورد آنها نیازمند محاسبات حجیم است. بنا بر اطلاع نویسندگان مقاله حاضر، این پژوهش اولین مطالعه در راستای تعیین خطای اثر مستقیم و غیرمستقیم توپوگرافی است و هدف آن برآورد اولیه نحوه انتشار خطای DEM بر اثر توپوگرافی است.

### ۳ محاسبه کوواریانس خطا

دقت DEM به پارامترهای مختلفی از جمله نوع اطلاعات



شکل ۱. اختلاف بین مدل‌های رقومی SRTM و AW3D30 متوسط‌گیری شده در فاصله ۹۰ متری.

منطقه در دسترس هستند. در میان مدل‌های موجود، از مدل ASTER با توجه به دقت کم آن در مقایسه با سایر مدل‌ها صرف‌نظر شد. موقعیت مسطحاتی دو مدل SRTM و AW3D30 به اندازه نصف گام با هم اختلاف دارد. گرید SRTM مربوط به گوشه‌های سلول است و گرید AW3D30 مربوط به مرکز سلول است؛ لذا از هر دو مدل ارتفاعی در فاصله ۳ ثانیه کمانی (متوسط ۹۰ متر) میانگین‌گیری شد. شکل ۱ اختلاف بین دو مدل فوق را در منطقه آزمایش نشان می‌دهد. اختلاف ارتفاع متوسط مدل رقومی AW3D30 نسبت به متوسط ارتفاع مدل رقومی SRTM برابر ۲/۰۱ متر است. انحراف معیار اختلاف ارتفاعات بین دو مدل در حدود ۳/۱۸ متر است. شکل ۱ نشان می‌دهد اختلاف بین دو مدل در مناطق کوهستانی رفتاری تصادفی دارد، اما اختلاف بین دو مدل در مناطق پست، الگوی نظام‌مندی به صورت نوارهای شمالی-جنوبی دارد.

برای بررسی اثر اختلاف دو مدل ارتفاعی در نتایج DTE و ITE، ابتدا مقادیر عددی آنها محاسبه می‌شود. این مقادیر روی تمامی نقاط در محدوده عرض جغرافیایی ۳۴° تا ۳۷° شمالی و طول جغرافیایی ۵۱° تا ۵۴° شرقی با گام ۳ ثانیه محاسبه شد. تعداد نقاط محاسباتی بیش از

نبود، از مقدار پیشنهاد شده در مطالعه مک کویی و همکاران (۲۰۱۷) استفاده شد.

#### ۴ انتشار خطای اثر توپوگرافی در ارتفاع زمین‌وار

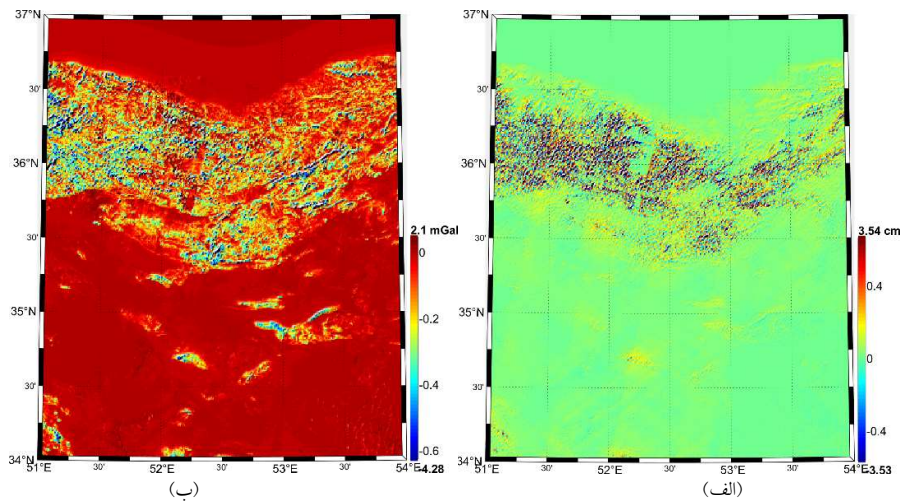
هدف اصلی در اینجا یافتن اثر خطای DTE و ITE بر انحراف معیار زمین‌وار یا به عبارت دیگر، یافتن عدم قطعیت زمین‌وار ناشی از این دو خطا است. از آنجایی که اثر DTE به طور مستقیم به بی‌هنجاری جاذبه اضافه می‌شود، اثر آن روی زمین‌وار را می‌توان با اعمال قانون انتشار خطا بر انتگرال استوکس به دست آورد. خطای ITE نیز به طور مستقیم روی زمین‌وار اعمال می‌شود؛ لذا انتشار خطای اثر DTE و ITE روی انحراف معیار زمین‌وار عبارتست از:

$$\sigma_N^2(P_0) = \sigma_{ITE}^2(P_0) + \left(\frac{R}{4\pi\gamma_0}\right)^2 \iint (S_M^L(\psi))^2 \sigma_{DTE}^2 dS \quad (17)$$

که  $S_M^L(\psi)$  کرنل شبه‌کروی (اسفروئیدال) اصلاح‌شده استوکس است.

#### ۵ نتایج عددی

منطقه مورد مطالعه در این مقاله، منطقه کوهستانی البرز مرکزی ایران در محدوده و طول است. مدل‌های رایگان STRM و AW3D30 با تفکیک مکانی ۳۰ متر در این



شکل ۲. الف) اختلاف ITE محاسبه شده از دو مدل رقومی ارتفاعی SRTM و AW3D30 برحسب سانتیمتر (ب) اختلاف DTE محاسبه شده از دو مدل رقومی ارتفاعی SRTM و AW3D30 برحسب میلی گال.

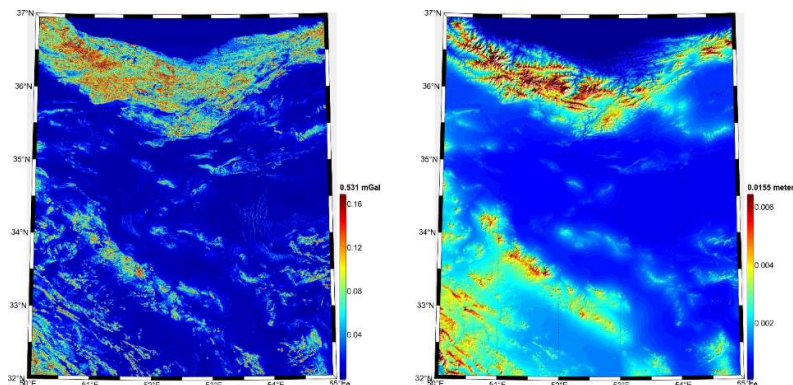
و ITE را با استفاده از مدل SRTM و AW3D30 نشان می‌دهد. انحراف معیار اختلاف در DTE برابر ۰/۱۳ میلی گال و در ITE برابر یک میلیمتر است. انحراف معیار اختلافات کم است، اما شکل ۲ نشان می‌دهد این مقادیر در مناطق کوهستانی البرز می‌تواند درخور توجه باشد؛ برای مثال مقادیر متوسط اختلافات ITE ممکن است به بیش از ۳ سانتیمتر برسد.

محاسبه خطای DTE و ITE مستلزم دانستن دقت متوسط DEM و پارامتر  $a$  است. برآورد دقیق این پارامترها نیازمند معلوم بودن داده‌های کنترل زمینی با تراکم زیاد است که در این مطالعه در اختیار نبود؛ لذا از مقادیر برآورد شده در مطالعه کیامهر و شوبرگ (۲۰۰۵) استفاده شد که دقت مدل SRTM ۹۰ متری را از مقایسه با داده‌های تراز یابی با GPS، ۶/۵ متر برآورد کرده بود. پارامتر  $a=100$  بر اساس مطالعه مک کویی و همکاران (۲۰۱۷) لحاظ شد. شکل ۳ انحراف معیار اثر مستقیم و غیرمستقیم توپوگرافی را روی نقاط  $3'' \times 3''$  نشان می‌دهد. بر اساس این شکل، دقت اثر مستقیم و غیرمستقیم توپوگرافی در مناطق کوهستانی درخور توجه است به طوری که انحراف معیار اثر DTE به

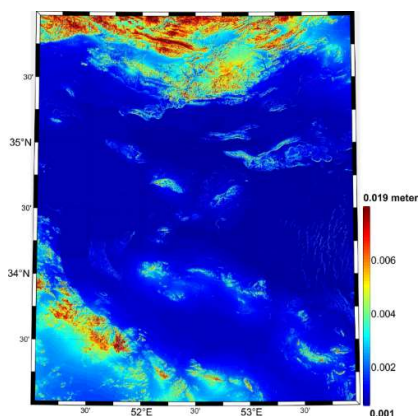
۱۲/۹ میلیون نقطه است. برای تسریع محاسبات از تبدیل فوریه سریع در متلب (MATLAB) استفاده شد. زمان محاسبات با یک لپ‌تاپ با پردازنده مرکزی RYZEN7 با هشت هسته پردازشی کمتر از دو دقیقه طول می‌کشد. شعاع انتگرال‌گیری در محاسبات برابر ۳۰ دقیقه انتخاب و از اثر اجرام خارج از یک درجه صرف‌نظر شده است؛ زیرا اثر اجرام دورتر از ۳۰ دقیقه بسیار کم است و اثر طول موج‌های بلند ITE و DTE با استفاده از مدل‌های رقومی متوسط با تفکیک مکانی زیاد مثلاً ۵ کیلومتر محاسبه می‌شود. به این ترتیب، تفاوت درخور توجهی در محاسبات اثر توپوگرافی اجرام دور با مدل‌های رقومی مختلف وجود ندارد.

همان‌طور که پیش از این اشاره شد، روابط (۱) و (۲) تنها زمانی معتبر هستند که شیب زمین کمتر از ۴۵ درجه باشد. از مجموع ۱۲/۹ میلیون نقطه محاسباتی، کمتر از ۰/۰۱ درصد از آنها شیبی بزرگ‌تر از ۴۵ درجه داشتند که از نتایج نهایی حذف شدند. سپس نتایج روی یک شبکه منظم  $30'' \times 30''$  متوسط‌گیری شدند. شکل ۲ اختلاف بین DTE

بیش از ۰/۵ میلی گال و اثر ITE به بیش از ۱/۵ سانتیمتر



شکل ۳. خطای ITE (سمت راست) و DTE (سمت چپ) محاسبه شده از خطای مدل رقومی ارتفاعی SRTM. واحد DTE میلی گال و واحد ITE متر است.



شکل ۴. انحراف معیار زمین وار ناشی از مجموع انحراف معیار اثر مستقیم و غیرمستقیم توپوگرافی بر حسب متر.

اما در مناطق هموار می توان از این اثر چشم پوشی کرد. بیشترین مقدار خطا حدود ۲ سانتیمتر و مقدار متوسط خطای DEM در ارتفاع زمین وار ۲ میلیمتر است؛ لذا برای تعیین زمین وار سانتیمتری در مناطق کوهستانی باید از مدل های رقومی با دقت بیشتر از ۶/۵ متر استفاده کرد. منظور از دقت مدل رقومی، جذر مجموع مربعات اختلافات ارتفاع حاصل از DEM و نقشه برداری زمینی است.

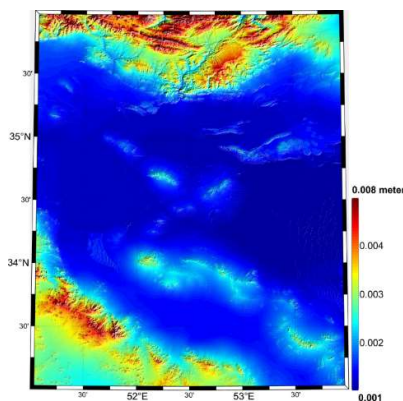
نکته مهم دیگر این است که وقتی شیب زمین زیاد می شود، دقت DEM در مناطق کوهستانی کاهش می یابد؛ برای نمونه شورتریج و مسینا (۲۰۱۱) نشان دادند دقت

می رسد.

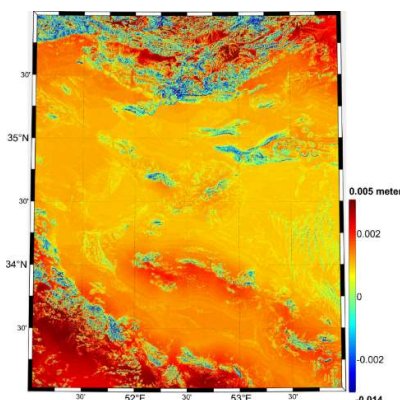
خطای DTE روی زمین وار را می توان از انتگرال (۱۷) محاسبه کرد. برای محاسبه این انتگرال از کرنل شبه کروی اصلاح شده استوکس استفاده شد. ابتدا اثر طول موج های بلند تا درجه/مرتبه ۱۸۰ کرنل حذف و سپس با روش وینچک-کلوزبرگ اصلاح شد. برای جزئیات بیشتر به مطالعه نواک و همکاران (۲۰۰۱) مراجعه شود. شکل ۳ اثر خطای مدل ارتفاعی SRTM را بر DTE و ITE را نشان می دهد. بر اساس این شکل، تأثیر خطای مدل های رقومی بر زمین وار در مناطق کوهستانی بیش از یک سانتیمتر است،



متوسط مدل SRTM با تفکیک ۹۰ متر در کشور آمریکا  
۸/۵۶ متر است، در حالی که این دقت برای شیب‌های کمتر



شکل ۵. انحراف معیار زمین‌وار ناشی از خطای مدل رقومی محاسبه‌شده با رابطه (۱۹) برحسب متر.



شکل ۶. اختلاف انحراف معیار زمین‌وار محاسبه‌شده با رابطه (۱۹) و این مطالعه برحسب متر.

از یک درجه، حدود ۴ متر و برای شیب‌های بزرگ‌تر از ۲۰ درجه، حدود ۲۵ متر است. وی نشان داد رابطه‌ای خطی بین شیب زمین و دقت مدل SRTM وجود دارد؛ لذا می‌توان گفت انحراف معیار محاسبه‌شده در شکل ۳، برآوردی متوسط از دقت اثر توپوگرافی است. انتظار می‌رود دقت‌های به‌دست‌آمده در کوهستان‌ها بدتر و در مناطق دشت، بهتر از مقادیر برآوردشده باشد. این مقاله اولین مطالعه در زمینه محاسبه دقت اثر توپوگرافی در تعیین دقیق زمین‌وار به روش استوکس است. در همه مطالعات قبلی نظیر جکلی و همکاران (۲۰۰۹)، فراهانی و همکاران (۲۰۱۷) و فروغی و همکاران (۲۰۱۹) از عدم قطعیت مدل

ارتفاعی صرف نظر شده است. نتایج این مطالعه می‌تواند به برآورد صحیح‌تر دقت تعیین زمین‌وار جاذبی کمک کند. از آنجایی که مطالعات قبلی به بحث انتشار خطای DEM در تعیین زمین‌وار نپرداخته‌اند، امکان صحت‌سنجی نتایج وجود ندارد؛ با این حال می‌توان میزان تطابق نتایج را با رابطه ساده پیشنهادی شوبرگ (۲۰۰۳) محاسبه کرد. شوبرگ (۲۰۰۳) نشان داد مجموع اثر مستقیم و غیرمستقیم از رابطه تقریبی زیر به‌دست می‌آید:

$$\delta N_{\text{Comb}}^{\text{topo}} = \frac{-2\pi G\rho}{\gamma_0} h_p^2 \quad (18)$$

این مقدار دو برابر جمله اول اثر غیرمستقیم در رابطه (۲)

است. با اعمال قانون انتشار خطا در رابطه فوق داریم:

$$\sigma_{\delta N}^2 = \left( \frac{4\pi G \rho h_p}{\gamma_0} \right)^2 \sigma_h^2 \quad (19)$$

شکل ۴ خطای زمین‌وار را با استفاده از رابطه (۱۹) نشان می‌دهد. شکل ۵ اختلاف خطای زمین‌وار محاسبه‌شده با رابطه (۱۹) و رابطه (۱۷) را نشان می‌دهد. اختلاف بین دو روش در ارتفاعات به بیش از یک سانتیمتر نیز می‌رسد که در مقایسه با کل اثر (حدود ۱۹ میلیمتر) مقدار بزرگی است. به‌طور کلی می‌توان گفت واریانس زمین‌وار با رابطه تقریبی شوبرگک، کمتر از واریانس زمین‌وار با روابط ارائه‌شده در این مقاله است.

#### ۶ نتیجه‌گیری

در این مطالعه تأثیر خطای مدل‌های رقومی بر اثر توپوگرافی در تعیین زمین‌وار بررسی شد. برای این منظور، با اعمال قانون انتشار خطا بر روابط انتگرالی اثر مستقیم و غیرمستقیم توپوگرافی، میزان خطا محاسبه شد. در این مقاله، از روش موریتیز-پلین برای محاسبه اثر توپوگرافی استفاده و خطای اثر مستقیم و غیرمستقیم در قالب یک انتگرال فرمول‌بندی شد. انتگرال‌های حاصل در فضای فرکانس و با استفاده از تبدیل فوریه سریع دوبعدی محاسبه شدند. منطقه آزمون، منطقه البرز مرکزی در کشور ایران انتخاب شده است. ابتدا نشان داده شد که RMS اختلاف بین مدل‌های ارتفاعی SRTM و AW3D30 در حدود ۳ متر است که این اختلاف در اثر مستقیم و غیرمستقیم درخور توجه نیست؛ زیرا انحراف معیار اختلاف در اثر مستقیم و غیرمستقیم به ترتیب ۰/۱ میلی‌گال و یک میلیمتر است. همچنین با انتخاب یک دقت کلی برای مدل رقومی SRTM و پارامتر  $a$  از مطالعات قبلی، خطای اثر توپوگرافی ناشی از مدل رقومی SRTM روی یک شبکه  $3'' \times 3''$  محاسبه شد. برای بررسی اثر خطای کل بر ارتفاع زمین‌وار، با اعمال قانون انتشار خطا بر انتگرال شبه‌کروی استوکس،

انحراف معیار زمین‌وار ناشی از خطای مدل ارتفاعی در اثر مستقیم و غیرمستقیم توپوگرافی محاسبه شد. انحراف معیار بیشینه حدود ۲ سانتیمتر و مقدار متوسط آن ۲ میلیمتر است. نتایج نشان می‌دهد در مناطق دشت، اثر خطای مدل SRTM بر انحراف معیار ارتفاع زمین‌وار ناچیز است، اما در مناطق کوهستانی، این مقدار از یک سانتیمتر تجاوز می‌کند که در تعیین زمین‌وار سانتیمتری شایان توجه است.

#### منابع

- سیف، ع.، ابراهیمی، ب.، ۱۳۹۱، ارزیابی دقت مدل‌های رقومی ارتفاعی SRTM و GDEM با استفاده از مدل رقومی NIDEM: سنجش از دور و GIS ایران، ۴(۳)، ۸۱-۹۸.
- کابلی‌زاده، م.، رنگزن، ک.، محمدی، ش.، حبشی، خ.، ۱۳۹۹، ارزیابی دقت ارتفاعی مدل‌های رقومی ارتفاعی ASTER و SRTM در بخش جلگه‌ای استان خوزستان: زمین‌شناسی کاربردی پیشرفته، ۱۰(۴)، ۵۵۳-۵۶۹.
- گلی، م.، نجفی علمداری، م.، ۱۳۹۳، تقریب بیضوی اثرات توپوگرافی در مدل‌سازی میدان گرانی زمین: فیزیک زمین و فضا، ۴۰(۲)، ۱۱۳-۱۲۴.
- گلی، م.، ۱۳۹۷، بررسی کارایی روش‌های مبتنی بر تسروید در محاسبه اثر جاذبی توپوگرافی، ۴۴(۳)، ۵۹۵-۶۰۶.
- نادی، س.، گیائی، ی.، هداوند، ش.، ۱۳۹۵، ارزیابی و مقایسه دقت مدل‌های ارتفاعی رقومی آزاد GDEM و SRTM و بررسی نحوه انتشار خطاها به نقشه شیب و جهت شیب: علوم و فنون نقشه‌برداری، ۶(۲)، ۱۰۹-۱۱۸.
- Farahani, H. H., Klees, R., and Slobbe, C., 2017, Data requirements for a 5-mm quasi-geoid in the Netherlands: *Studia Geophysica et Geodaetica*, 61(4), 675-702, <https://doi.org/10.1007/s11200-016-0171-7>.
- Foroughi, I., Vaniček, P., Kingdon, R. W., Goli, M., Sheng, M., Afrasteh, Y., Novák, P., and Santos, M.

- C., 2019, Sub-centimetre geoid: *Journal of Geodesy*, **93**(6), 849-868, <https://doi.org/10.1007/s00190-018-1208-1>.
- Goyal, R., Featherstone, W. E., Tsoulis, D., and Dikshit, O., 2020, Efficient spatial-spectral computation of local planar gravimetric terrain corrections from high-resolution digital elevation models: *Geophysical Journal International*, **221**(3), 1820–1831, <https://doi.org/10.1093/gji/ggaa107>.
- Heck, B., 2003, On Helmert methods of condensation: *Journal of Geodesy*, **77**, 155–170, <https://doi.org/10.1007/s00190-003-0318-5>.
- Jekeli, C., and Serpas, J. G., 2003, Review and numerical assessment of the direct topographical reduction in geoid determination: *Journal of Geodesy*, **77**(3), 226–229, <https://doi.org/10.1007/s00190-003-0320-y>.
- Jekeli, C., Yang, H., and Kwon, J., 2009, Using gravity and topography-implied anomalies to assess data requirements for precise geoid computation: *Journal of Geodesy*, **83**(12), 1193-1202, <https://doi.org/10.1007/s00190-009-0337-y>.
- Kiamehr, R., and Sjöberg, L. E., 2005, Effect of the SRTM global DEM on the determination of a high-resolution geoid model: a case study in Iran: *Journal of Geodesy*, **79**(9), 540–551, <https://doi.org/10.1007/s00190-005-0006-8>.
- Li, Y. C., and Sideris, M. G., 1994, Improved gravimetric terrain corrections: *Geophysical Journal International*, **119**(3), 740–752, <https://doi.org/10.1111/j.1365-246X.1994.tb04013.x>.
- Makhloof, A., and Ilk, K. H., 2008, Effects of topographic–isostatic masses on gravitational functionals at the Earth’s surface and at airborne and satellite altitudes: *Journal of Geodesy*, **82**, 93–111, <https://doi.org/10.1007/s00190-007-0159-8>.
- Martinec, Z., and Vanicek, P., 1994, Direct topographical effect of Helmert’s condensation for a spherical geoid: *Manuscripta Geodaetica*, **19**(8), 257–268.
- McCubbine, J. C., Featherstone, W. E., and Kirby, J. F., 2017, Fast-Fourier-based error propagation for the gravimetric terrain correction: *Geophysics*, **82**(4), <https://doi.org/10.1190/GEO2016-0627.1>.
- Moritz, H., 1968, On the use of the terrain correction in solving Molodensky’s problem: Report No. 106, Department of Geodetic Science, The Ohio State University, Columbus.
- Nadi, S., Shojaei, D., and Ghiasi, Y., 2020, Accuracy assessment of DEMs in different topographic complexity based on an optimum number of GCP formulation and error propagation analysis: *Journal of Surveying Engineering*, **146**(1), 4019019.
- Novák, P., Vanicek, P., Véronneau, M., Holmes, S., and Featherstone, W., 2001, On the accuracy of modified Stokes's integration in high-frequency gravimetric geoid determination: *Journal of Geodesy*, **74**(9), 644-654.
- Oksanen, J., 2006, Digital Elevation Model Error in Terrain Analysis: Academic dissertation in geography, Faculty of Science University of Helsinki, Publications of The Finnish Geodetic Institute, **134**, 51.
- Sjöberg, L., 2003, A computational scheme to model the geoid by the modified Stokes formula without gravity reductions. *Journal of Geodesy*, **77**, 423–432, <https://doi.org/10.1007/s00190-003-0338-1>.
- Shortridge, A., and Messina, J., 2011, Spatial structure and landscape associations of SRTM error: *Remote Sensing of Environment*, **115**, 1576–1587, <https://doi.org/10.1016/j.rse.2011.02.017>.
- Szelachowska, M., and Krynski, J., 2009, Evaluation of the effect of uncertainty of height data on the accuracy of terrain corrections: *Geodesy and Cartography*, **58**, 71–88.
- Tsoulis, D., and Gavriilidou, G., 2021, A computational review of the line integral analytical formulation of the polyhedral gravity signal: *Geophysical Prospecting*, **69**(8–9), 1745–1760, <https://doi.org/https://doi.org/10.1111/1365-2478.13134>.
- Tsoulis, D., Novák, P., and Kadlec, M., 2009, Evaluation of precise terrain effects using high-resolution digital elevation models: *Journal of Geophysical Research*, **114**, B02404, <http://dx.doi.org/10.1029/2008JB005639>.
- Vanicek, P., and Kleusberg, A., 1987, The Canadian geoid–Stokesian approach: *Manuscripta Geodaetica*, **12**, 86–98.
- Vanicek, P., and Martinec, Z., 1994, Stokes–Helmert scheme for the evaluation of a precise geoid: *Manuscripta Geodaetica*, **19**, 119–128.
- Wang, Y. M., and Rapp, R. H., 1990, Terrain effects on geoid undulation computations: *Manuscripta Geodaetica*, **11**, 23–29.
- Wang, C., Yang, Q., Jupp, D. L., and Pang, G., 2016, Modeling change of topographic spatial structures with DEM resolution using semi-variogram analysis and filter bank: *ISPRS International Journal of Geo-Information*, **5**(7), <https://doi.org/10.3390/ijgi5070107>.
- Wild-Pfeiffer, F., 2008, A comparison of different mass elements for use in gravity gradiometry: *Journal of Geodesy*, **82**(10), 637–653, <https://doi.org/10.1007/s00190-008-0219-8>.

## Impact of DEM uncertainties on direct and indirect topographical effects

Mehdi Goli<sup>1\*</sup>

<sup>1</sup> Assistant Professor, Faculty of civil engineering, Shahrood University of technology, Shahrood, Iran

(Received: 22 June 2022, Accepted: 03 September 2022)

### Summary

Geoid determination using Stokes' integral requires that all masses above geoid (topography + atmosphere) to be removed. Using 2nd Helmert condensation model, the topographical masses were replaced by a surface layer on the geoid. This replacement caused changes in gravity and equipotential surfaces which are so-called direct topographical effect (DTE) and indirect topographical effect (ITE), respectively. There are two different methods to formulate the Helmert topographical effects: Moritz-Pellinen and Vanicek-Martinec methods. In the Moritz-Pellinen method, the DTE is defined as the gradient difference of topographic potential of topography at the terrain and the potential of the condensation layer at the geoid surface, while in Vanicek-Martinec method both real and condensation potential refer to terrain surface. In study of Jekeli and Serpas (2003) both methods were applied on 1'×1' gravity data and 30"×30" grids of height to geoid determination of different regions of the USA. The results indicated that the Moritz-Pellinen method is clearly superior to Vanicek-Martinec method. However, in this study, our goal is not to evaluate the effectiveness of these two methods. The subject of this study is the propagation of DEM error in the direct and indirect topographical effects in geoid using the planar approximation of the Moritz-Pellinen method. The integral formulas of standard deviation of the topographical effects were obtained in terms of DEM standard deviation error and error covariance function .

To increase performance, all numerical calculations of all derived integrals were performed by FFT. Numerical investigations of this study are done over the central Alborz mountainous area, as this area is the most rugged terrain in Iran. Two global DEMs, the SRTM and the AW3D30, were freely available with a spatial resolution of one arc second (approximately 30 meters) in the test region. The mean and standard deviation of differences between two DEMs are about 2 and 3 meters, respectively, which produce 0.1 mGal and 1 mm differences in DTE and ITE.

Estimation of DTE and ITE error requires the global average error (standard deviation) of the DEM as well as the parameter of correlation length for evaluation of correlated error. Accurate estimation of these parameters needs high-resolution ground control points that were not available in this study. Therefore, using an overall accuracy and a correlation length based on the previous studies, the estimated standard deviation for direct and indirect topographical effects varied from 0 to 0.6 mGal and 0 to 17 mm in the test region, respectively.

The influence of DTE error on the geoid error can be computed by applying the error propagation law on the Stokes' integral. Our calculations show that the error of SRTM DEM on geoid in central Alborz can exceed from 1 cm, but the values are about 1-2 mm in the flat areas. Therefore, geoid determination with 1 cm accuracy in mountainous areas in Iran requires DEM with better average accuracy than the current available models. Various previous studies indicate that the error of DEMs decreases in mountainous areas.

**Keywords:** Digital elevation model (DEM) error, direct and indirect topographical effects, geoid, moritz-pellinen

\*Corresponding author:

Goli.meh@gmail.com