

# بهبود مدل‌سازی پیشرو داده‌های رادار نفوذی به زمین (GPR) به روش عددی تفاضل متناهی

رضا احمدی<sup>۱\*</sup>، نادر فتحیانپور<sup>۲</sup> و غلامحسین نوروزی<sup>۱</sup>

<sup>۱</sup> دانشکده مهندسی معدن دانشگاه تهران، تهران، ایران  
<sup>۲</sup> دانشکده مهندسی معدن دانشگاه صنعتی اراک، اراک، ایران  
<sup>۳</sup> دانشکده مهندسی معدن دانشگاه صنعتی اصفهان، اصفهان، ایران

(تاریخ دریافت: ۱۳۹۲/۳/۶، تاریخ پذیرش: ۱۳۹۳/۷/۸)

## چکیده

در تحقیق حاضر از بین روش‌های عددی گوناگون در دسترس، از روش تفاضل متناهی دو بُعدی، به علت سادگی درک مفاهیم، انعطاف‌پذیری، قابلیت شبیه‌سازی و مدل‌سازی محیط‌های پیچیده و قابل قبول بودن پاسخ‌های آن در موارد به کار رفته، برای شبیه‌سازی رفتار حاکم بر انتشار امواج الکترومغناطیسی (EM) در روش رادار نفوذی به زمین (GPR)، از راه حل معادله‌های ماکسول و شرایط مرزی مناسب، استفاده شده است. روش تفاضل متناهی در حوزه زمان، علی‌رغم فایده‌های بسیار، دارای نقاط ضعفی نیز می‌باشد از جمله آنکه شبیه‌سازی مدل‌های گوناگون به‌ویژه در محیط‌های با گذردهی دی‌الکتریک زیاد، حتی با رایانه‌های نوین پرسرعت نیز بسیار زمان‌بر است. لذا در تحقیق حاضر، این نقص نیز با اعمال رویکردی جدید، بهبود یافت.

هدف از مدل‌سازی پیشرو پاسخ GPR یک ساختار زیرسطحی شناخته شده، بررسی تأثیر ویژگی‌های الکتریکی و در نتیجه سنگ-شناختی یا آب‌شناختی آن ساختار روی پاسخ‌های GPR برداشت شده از آن است بنابراین مدل‌سازی‌های عددی پاسخ GPR مدل‌های مصنوعی با هندسه مشخص، می‌توانند در تعیین ارتباط بین ویژگی‌های زیرسطحی و داده‌های GPR، مفید واقع شوند. در این تحقیق برای مدل‌سازی داده‌های GPR از ثبت تپ (پالس)‌های بازتاب یافته به سطح (که فرستنده و گیرنده هر دو، روی سطح زمین قرار دارند) در مُد TM استفاده شده است؛ به طوری که آنتن‌ها عمود بر صفحه برداشت (X-Z) توجیه شده‌اند. به علت مدل‌سازی دو بُعدی، منبع و گیرنده به صورت اجزای خطی هستند که عمود بر صفحه برداشت تا بی‌نهایت گسترش می‌یابند؛ با این تفاسیر مدل‌سازی دو بُعدی صورت گرفته، قادر به مدل‌سازی بسیاری از ویژگی‌های بازتاب‌های سامانه‌های GPR است. نظر به اینکه فرآیند مدل‌سازی و ارون داده‌های GPR، نیازمند یک هسته مدل‌سازی پیشرو پرسرعت است و از آنجایی که پاسخ GPR اغلب هدف‌های مدفون در زیر زمین در نگاشت‌های راداری حاصله که متشکل از تعداد زیادی تریس هستند، به صورت یک رخداد شبه‌هذلولی است، لذا در این تحقیق با استفاده از جابه‌جایی زمانی تریس‌ها در الگوهای پاسخ GPR و تبدیل فوریه آنها در حوزه بسامدی و سپس درون‌یابی یک بُعدی در فاصله بین هر دو تریس متوالی، قدرت تفکیک جانبی داده‌ها را در امتداد پیمایش نیم‌رخ، افزایش می‌دهد و در نتیجه پاسخ‌های با تفکیک‌پذیری بیشتر، حاصل می‌شود. همچنین با بکارگیری چنین روشی زمان محاسباتی شبیه‌سازی‌ها، به‌طور قابل توجهی تا بیش از ۱۲/۵ برابر نسبت به حالت بهبود نیافته، کاهش می‌یابد. به‌منظور راستی‌آزمایی الگوریتم بهبود یافته، پاسخ GPR شی‌های مصنوعی نظیر استوانه افقی منفرد، منشور مربعی دو بُعدی و نیز استوانه‌های افقی جفت، مدل‌سازی شد.

**واژه‌های کلیدی:** رادار نفوذی به زمین (GPR)، مدل‌سازی پیشرو، تفاضل متناهی، تفکیک‌پذیری، تبدیل فوریه، زمان محاسباتی

## Improving Ground Penetrating Radar (GPR) forward modeling approach using the numerical finite difference method

Reza Ahmadi<sup>1,2\*</sup>, Nader Fathianpour<sup>3</sup> and Gholam-Hossain Norouzia<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Mining Engineering Department, College of Engineering, University of Tehran, Tehran, Iran

<sup>2</sup>Mining Engineering Department, Arak University of Technology, Arak, Iran

<sup>3</sup>Mining Engineering Department, Isfahan University of Technology, Isfahan, Iran

(Received: 27 May 2013, accepted: 30 September 2014)

## Summary

The behaviour of Ground Penetrating Radar (GPR) electromagnetic field can be simulated using Maxwell's equations and associated boundary conditions. So far a number of numerical methods for modeling GPR data have been proposed including the popular Time Domain Finite Difference (TDFD) technique. The popularity of TDFD is mainly due to being relatively simple to implement, its high flexibility and capability to simulate complex subsurface geology. Also, the TDFD approach is not only conceptually accurate for complex geological models but also enables us to design realistic antenna and to study physical electromagnetic phenomena such as dispersion in electrical properties. Despite having these advantages, the finite difference method has pitfalls such as becoming very time consuming in simulating the most common media especially with high dielectric permittivity causing the forward modeling process to become very time consuming even by modern high-speed computers.

Synthetic GPR responses are useful for predicting expected GPR data over known geometries such as horizontal cylinders and prisms. The GPR data and subsurface lithological and hydrogeological properties are related through a numerical forward modeling engine.

Therefore, the GPR forward modeling engine can transform the subsurface electrical properties into expected GPR responses which in turn can be used for optimizing data acquisition procedures on pre-defined subsurface targets. Since any efficient inversion routine requires a fast forward modeling engine, this study aimed the development of a fast forward modeling algorithm capable of being implemented in any inversion routine. To have efficient numerical forward modeling algorithm, we have adapted a leap-frog, staggered-grid approach introduced by Yee, which incorporates offsetting the electric and magnetic field components in both space and time in such a way that the finite difference approximations of the governing partial derivatives in each equation are centered on the same spatiotemporal location.

Obviously 2-D modeling is limited and cannot fully account for antenna behaviour and out-of-plane variations in material properties; however, many important features common to most GPR responses can be identified via employing a computationally cost effective 2D algorithm.

In the current study, the patterns of GPR responses that are well known to be hyperbola in shape are used as leading models in order to reduce the execution time. A GPR system collects the reflected pulses coming from different depths in the form of traces which when gathered along with a profile, they make a GPR section called radargram. In general, the simulated GPR traces of common reflected objects are time shifted like the Normal MoveOut (NMO) traces encountered in seismic reflection responses. This property suggests the application of Fourier transform to the GPR traces and the use of time shifting property of such transformation to interpolate traces between the adjusted traces in frequency domain. Therefore, the lateral resolution of GPR traces computed along with any profile is enhanced using a linear interpolation in the Fourier domain resulting in an increased speed of the forward modeling algorithm. Selecting the minimum lateral trace to trace interval with the appropriate sampling frequency of the signal, prevent any aliasing to occur. It is shown that such methodology can significantly decrease the computing time by more than 12.5 times.

**Keywords:** Ground Penetrating Radar (GPR), forward modeling, finite difference, resolution, Fourier transform, computational time

## ۱ مقدمه

رادار نفوذی به زمین یا GPR (Ground Penetrating Radar) یک روش ژئوفیزیکی با تفکیک‌پذیری زیاد است که از بازتاب امواج الکترومغناطیسی با بسامد زیاد، برای مقاصد مهندسی گوناگون از جمله تصویر کردن ساختارهای طبیعی درون زمین، مصنوعات دست‌ساز بشر و شناسایی ویژگی‌های شیء‌های مدفون در زیر زمین استفاده می‌کند. پاسخ سامانه GPR برای انواع هدف‌های گوناگون باید با یکی از روش‌های مدل‌سازی عددی پیشرو، شبیه‌سازی شود تا این هسته مدل‌سازی پیشرو، موجب شناخت رفتار مدل‌های گوناگون در پاسخ شود و زمینه اجرای عملیات مدل‌سازی وارون داده‌های GPR را در کاربردهای عملی، فراهم آورد.

برای دستیابی به این هدف می‌توان از روش‌های عددی گوناگونی نظیر ردیابی پرتو مقدماتی (Ray Tracing)، روش‌های حجم متناهی، تبدیل  $z$  و اجزای گسسته (برای مثال، یی و چن، ۱۹۹۷؛ رابرتس و دانیلز، ۱۹۹۷؛ بورژوا و اسمیت، ۱۹۹۶) و حالت‌های ترکیبی آنها (ویدون و راپاپورت، ۱۹۹۷)، روش‌های عبور-بازتاب یک‌بُعدی (گودمن، ۱۹۹۴) تا تفاضل متناهی پیچیده‌تر سه‌بُعدی (کارپات و همکاران، ۲۰۰۹؛ ایروینگ و نایت، ۲۰۰۶؛ جیانوپولوس، ۲۰۰۵؛ کاسیدی، ۲۰۰۱؛ چن و هوانگ، ۱۹۹۸؛ تیکسیرا و همکاران، ۱۹۹۸؛ برگمن و همکاران، ۱۹۹۸) و اجزای متناهی استفاده کرد. اگرچه روش‌شناسی این شیوه‌ها با یکدیگر متفاوت است، در همه آنها انتشار و بازتاب امواج GPR در درون زمین، براساس رفتار امواج الکترومغناطیسی و برهم‌کنش آنها با مواد زیرسطحی، شبیه‌سازی می‌شود. روش تفاضل متناهی به‌خاطر دارا بودن مزیت‌هایی نظیر درک به‌نسبت ساده مفاهیم آن، انعطاف‌پذیری، قابلیت شبیه‌سازی و مدل‌سازی محیط‌های پیچیده و قابل‌قبول بودن پاسخ‌های آن در موارد به‌کاررفته، در میان روش‌های عددی پیش‌گفته، مقبولیت و کاربرد

بیشتری یافته و لذا در این پژوهش نیز از روش تفاضل متناهی دو‌بُعدی، برای مدل‌سازی پیشرو داده‌های GPR، استفاده شده است. روش تفاضل متناهی در حوزه زمان علی‌رغم فایده‌های بسیار، دارای نقاط ضعفی نیز هست، از جمله آنکه شبیه‌سازی مدل‌های گوناگون به‌ویژه در محیط‌های با گذردهی دی‌الکتریک زیاد (مثلاً در اثر وجود آب)، حتی با رایانه‌های نوین پُرسرعت نیز بسیار زمان‌بر است. لذا در مطالعه حاضر این نقص نیز با اعمال یک رویکرد جدید بهبود یافت.

## ۲ مبانی فیزیکی و نظری روش GPR

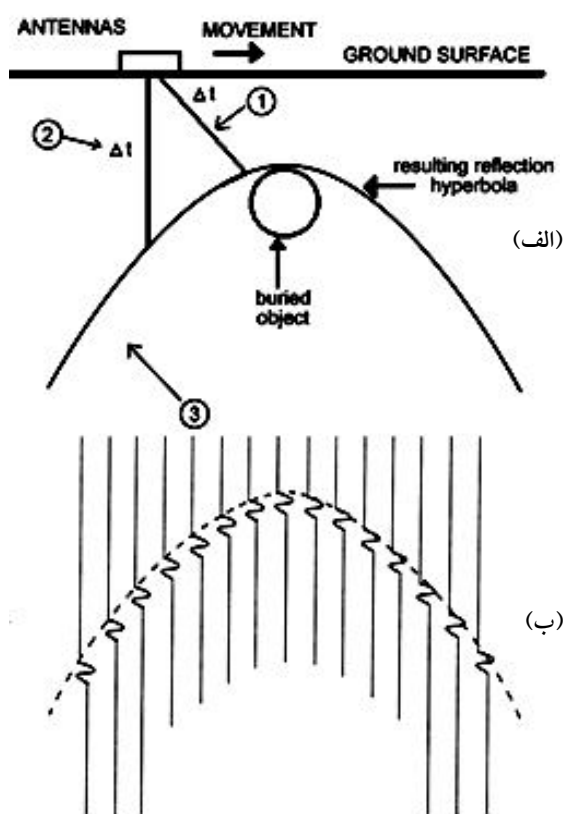
یک سامانه GPR، سیگنال‌های الکترومغناطیسی در محدوده بسامدی یک مگاهرتز تا بیش از یک گیگاهرتز را توسط فرستنده، ارسال می‌کند و نحوه رفتار میدان الکترومغناطیسی بازتابی از ناهمگنی‌های زیرسطحی را به‌کمک گیرنده، آشکار می‌سازد. سیگنال GPR ثبت شده، به تغییرات ویژگی‌های فیزیکی درون محیط پیرامون و ویژگی‌های موج GPR یعنی سرعت فازی موج الکترومغناطیسی،  $\epsilon$ ، میزان تضعیف میدان در محیط سیر موج،  $\alpha$  و امپدانس الکترومغناطیسی،  $z$  بستگی دارد. ویژگی‌های فیزیکی مواد که رفتار انرژی الکترومغناطیسی را در یک محیط، کنترل می‌کنند شامل گذردهی دی‌الکتریک،  $\epsilon$ ، نفوذپذیری مغناطیسی،  $\mu$  و رسانایی الکتریکی،  $\sigma$  هستند. تغییرات نفوذپذیری مغناطیسی سنگ‌ها، معمولاً ضعیف است و بنابراین در روش GPR، در اکثر مواقع،  $\epsilon$  و  $\sigma$  مهم‌ترین پارامترها هستند.

در همه شیوه‌های برداشت GPR، یک اندازه‌گیری از یک مولفه میدان الکترومغناطیسی، معمولاً مولفه میدان الکتریکی، به عمل می‌آید و شدت مولفه میدان الکتریکی اندازه‌گیری شده، به یک سیگنال ولتاژ، تبدیل، و نسبت به زمان، ثبت می‌شود (آنان، ۲۰۰۳). متداول‌ترین شیوه نمایش داده‌های GPR، نمایش دامنه سیگنال امواج EM بازتابی،

را، با استفاده از مقادیر نقاط مجاور، برآورد می‌کنند. در این روش محیط مورد بررسی، به صورت شبکه‌ای با فاصله‌های معین، تقسیم‌بندی می‌شود و مولفه‌های میدان براساس سلول (بی، ۱۹۹۶) و روابط ماکسول برای یک زمان معین در مرکز سلول، محاسبه شده و در نهایت مقادیر برای زمان‌های متوالی، به روزرسانی می‌شود. در نتیجه یک مسئله تفاضل متناهی، شامل سه مرحله اصلی تقسیم‌بندی فضای مسئله به شبکه‌ای از گره‌ها، برآورد معادله دیفرانسیل با معادله تفاضل متناهی آن، و حل معادله تفاضل متناهی با در نظر گرفتن شرایط اولیه و مرزی مناسب است (بورژوا و اسمیت، ۱۹۹۷). به منظور اجتناب

نسبت به زمان تاخیر است که تریس نامیده می‌شود. در حالت کلی نگاشت راداری (Radargram) یا تصویر GPR یک برداشت نیم‌رُخی داده‌های GPR، مطابق شکل ۱ به صورت مجموعه‌ای از تریس‌های در مجاورت یکدیگر است و رخداد حاصل در تصویر نیز، برای اغلب هدف‌های مدفون، به صورت یک هذلولی است. در شکل ۱-الف برداشت داده‌های GPR با آنتن‌ها از راه پیمایش یک نیم‌رُخ روی یک هدف مدفون صورت گرفته است؛ در شکل ۱-ب نیز تریس‌های حاصله با آنتن گیرنده، نشان داده شده و رخداد مربوط به پاسخ شیء مدفون، در نگاشت راداری به صورت یک هذلولی مشخص گردیده است. به منظور آشکارسازی فرض می‌شود که دامنه سیگنال‌های بازتاب شده از ناهمگنی‌های زیرسطحی، بزرگ‌تر از سیگنال‌های زمینه هستند.

از آنجا که GPR، شیء‌ها را در یک فاصله معین، کشف و آشکار می‌کند، تفکیک‌پذیری نشان می‌دهد که چگونه، ویژگی‌های هندسی هدف را می‌توان به طور دقیق تعیین کرد. اساساً هنگام سروکار داشتن با GPR، تفکیک‌پذیری، با دو مولفه تفکیک‌پذیری عمقی (طولی) و تفکیک‌پذیری جانبی (زاویه‌ای) قابل تعریف است. مفاهیم پایه در شکل ۲ نشان داده شده است.

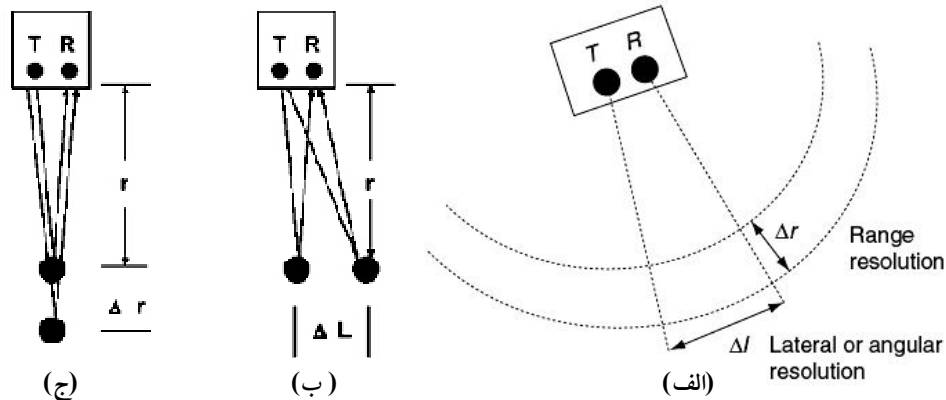


شکل ۱. الف) برداشت داده‌های GPR از راه پیمایش یک نیم‌رُخ روی یک هدف مدفون. ب) رخداد مربوط به پاسخ شیء مدفون، در نگاشت راداری به صورت یک هذلولی (نشان داده شده با خط چین). (ویرایش شده از <http://mysite.du.edu/~lconyers/SERDP/GPR2.htm>).

### ۳ نظریه پایه مسئله‌های الکترومغناطیس و کاربرد

#### روش تفاضل متناهی در حل آنها

معادله‌های ماکسول پایه و اساس الکترومغناطیس را تشکیل می‌دهند به گونه‌ای که همه پدیده‌های الکترومغناطیسی در مقیاس ماکروسکوپی، با این معادله‌ها قابل توصیف‌اند و همه مسئله‌های مربوطه نیز با اعمال شرایط اولیه و شرایط مرزی مناسب، قابل حل هستند. روش عددی تفاضل متناهی نیز مبتنی بر برآورد معادلات دیفرانسیل با معادله‌های تفاضل متناهی است. این معادله‌ها به شکل جبری هستند که مقدار متغیر وابسته در یک نقطه



شکل ۲. مولفه‌های تفکیک‌پذیری جانبی (الف و ب) و عمقی (الف و ج) تعریف شده برای سامانه GPR (آنان، ۲۰۰۱؛ جول، ۲۰۰۹).

مدل‌سازی هستند.

مقادیر فاصله‌های مکانی شبکه گره‌ها،  $\Delta x$  و  $\Delta y$  و همچنین  $\Delta t$  لحظه‌ای در مدل‌سازی عددی به روش تفاضل متناهی، از جمله پارامترهای مهم در کنترل عملکرد روش، به حساب می‌آیند چرا که از یک طرف هر چه مقادیر آنها کوچک‌تر باشد پاسخ مدل  $FDTD$  (Finite Difference Time Domain) به واقعیت نزدیک‌تر است و میزان خطای گسسته‌سازی را کاهش می‌دهد. با این حال از طرف دیگر می‌تواند منجر به افزایش خطای گرد کردن، افزایش میزان حافظه لازم برای ذخیره‌سازی متغیرها و افزایش قابل ملاحظه زمان محاسبات شود.

#### ۴ مدل‌سازی پیشرو داده‌های GPR به روش تفاضل

##### متناهی در حوزه زمان

به‌منظور مدل‌سازی پیشرو دو بُعدی داده‌های GPR به روش تفاضل متناهی در حوزه زمان، در تحقیق حاضر بازتاب امواج GPR ارسالی از سطح زمین (فرستنده و گیرنده هر دو روی سطح زمین قرار دارند)، با استفاده از فرمول‌بندی روش میدان مغناطیسی عرضی یا مُد  $TM$  (Transverse Magnetic Field)، شبیه‌سازی می‌شود.

نظریه پایه گدهای مدل‌سازی پیشرو GPR، معادله‌های تاو (کرل) ماکسول (قانون القای فاراده و تعمیم قانون

از پراکندگی عددی، فاصله گسسته‌سازی مکانی ابعاد شبکه بهینه در برآورد تفاضل متناهی در GPR، باید حداقل ده بار کوچک‌تر از طول موج امواج بسامد مرکزی (اسمی) آنتن GPR یا کوچک‌ترین بُعد هدف پراکنده‌کننده (Scatterer) یا به عبارت دیگر مطابق رابطه (۱) یک پنجم کوچک‌ترین طول موج در تب ارسالی باشد (بورژوا و اسمیت، ۱۹۹۶):

$$\Delta x = \Delta y = \frac{\lambda_{\min}}{5}, \quad (1)$$

رابطه (۲) نیز برای محاسبه گام زمانی گسسته، عرضه شده است (سادیکو و ماتيو، ۲۰۰۱):

$$\Delta t \leq \frac{1}{U_{\max} \sqrt{\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2}}}, \quad (2)$$

که  $U_{\max}$  بیشینه سرعت فازی موج درون مدل است.

برای محاسبه بیشینه فاصله زمانی بهینه، رابطه دیگری نیز به صورت زیر داده شده است (جورجاکوپولوس و همکاران، ۲۰۰۲):

$$\Delta t_{\max} = \frac{6}{7} \sqrt{\frac{\mu_{\min} \epsilon_{\min}}{\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2}}}, \quad (3)$$

که  $\epsilon_{\min}$  و  $\mu_{\min}$  به ترتیب کمینه مقادیر نفوذپذیری مغناطیسی و گذردهی دی‌الکتریک موجود در شبکه

$$i\omega\mu H_x = -\frac{1}{s_z} \frac{\partial E_y}{\partial z}, \quad (8\text{-الف})$$

$$i\omega\mu H_z = \frac{1}{s_x} \frac{\partial E_y}{\partial x}, \quad (8\text{-ب})$$

$$\sigma E_y + i\omega\varepsilon E_y = \frac{1}{s_x} \frac{\partial H_z}{\partial x} - \frac{1}{s_z} \frac{\partial H_x}{\partial z}, \quad (8\text{-ج})$$

برای مدل‌سازی *GPR* بازتاب امواج ارسالی از سطح، که آنتن‌ها عمود بر صفحه برداشت *x-z* توجیه می‌شوند از روابط مُد *TM* (یعنی روابط ۸-الف تا ۸-ج) استفاده می‌شود. در داخل شبکه مدل‌سازی،  $s_x = s_z = 1$  است درحالی‌که در نواحی مرزی *PML*، شبکه دارای مقادیر مختلفی خواهد بود که منجر به جذب قابل توجه موج در این ناحیه می‌شود. برخلاف روش‌های ساده‌تر مانند تغییر رسانایی الکتریکی در ناحیه *PML*، که منجر به جذب امواج می‌شوند، میزان بازگشت موج در مرز بین ناحیه مدل‌سازی و ناحیه *PML* در روش فوق، صفر است. در این کاربرد شرایط مرزی جاذب از دیدگاه *CPML* (*Convolved Perfectly Matched Layer*) در برنامه‌نویسی وارد شده است. این روش از معادله‌های حوزه زمان  $s_x$  و  $s_z$  در برآورد تفاضل متناهی استفاده می‌کند که مزیت آن جداسازی نشدن مولفه‌های الکتریکی و مغناطیسی در حوزه زمان است و این مزیت در سایر دیدگاه‌های *PML* وجود ندارد (فنگ و وو، ۱۹۹۶؛ برنگر، ۱۹۹۶).

بدین منظور از معادله (۷) تبدیل فوریه وارون گرفته می‌شود:

$$s_k^{-1}(t) = \frac{\delta(t)}{k_k} - \frac{\sigma_k}{\varepsilon_0 k_k^2} \exp\left[-\frac{t}{\varepsilon_0} \left(\frac{\sigma_k}{k_k} + \alpha_k\right)\right] u(t) \\ = \frac{\delta(t)}{k_k} + \zeta_k(t), \quad (9)$$

مداری آمپر) در حوزه بسامد، شامل:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -i\omega\mu\mathbf{H}, \quad (4)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \sigma\mathbf{E} + i\omega\varepsilon\mathbf{E}, \quad (5)$$

است که در آنها  $i = \sqrt{-1}$ ،  $\omega$  بسامد زاویه‌ای،  $\varepsilon$ ،  $\mu$  و  $\sigma$  به ترتیب گذردهی دی‌الکتریک، نفوذپذیری مغناطیسی و رسانایی الکتریکی است،  $E$  و  $H$  نیز به ترتیب بردارهای شدت میدان الکتریکی و شدت میدان مغناطیسی هستند. به منظور بکارگیری مرزهای جاذب (*Perfectly PML*) (*Matched Layer*) در کدها، حالت عمومی فضای مختصات کشیده شده (*Stretched*) مختلط (برای مثال، گدنی، ۱۹۹۸؛ چو و ویدون، ۱۹۹۴) مد نظر قرار گرفته است. عملگر  $\nabla$  به صورت زیر است:

$$\nabla = \hat{x} \frac{1}{s_x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{1}{s_y} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{z} \frac{1}{s_z} \frac{\partial}{\partial z}, \quad (6)$$

$$S_k = K_k + \frac{\sigma_k}{\alpha_k + i\omega\varepsilon_0}, \quad k = x, y, z \quad (7)$$

که در آن  $S_k$ ها متغیرهای کشیدگی مختصات مختلط وابسته به بسامد هستند؛ به طوری که فقط در جهت‌های اصلی (در اینجا  $k$ ) تغییر می‌کنند (کوزاوغلو و میترا، ۱۹۹۶). همچنین  $\varepsilon_0$  گذردهی دی‌الکتریک فضای آزاد (خلأ) و  $\alpha_k$ ،  $\sigma_k$  و  $k_k$  پارامترهایی هستند که با تعیین آنها، انتشار موج در داخل شبکه مدل‌سازی و جذب موج در نواحی مرز *PML* میسر می‌شود. شایان ذکر است که  $\alpha_k$ ،  $\sigma_k$  و  $k_k$  ویژگی‌های الکتریکی واقعی نیستند بلکه پارامترهایی هستند که از راه کشیدگی مختصات مختلط، با افزودن درجات آزادی اضافی به معادله‌های ماکسول، اجرای شرایط مرزی *PML* را امکان‌پذیر می‌کنند. با اعمال مؤلفه عملگر روی معادله‌های ماکسول و با فرض اینکه در مدل‌سازی دو بُعدی، تغییرات میدان در جهت  $y$  صفر است معادلات دیفرانسیل جزئی شامل مولفه‌های میدان به صورت  $H_x$ ،  $H_z$  و  $E_y$  حاصل می‌شود:

(۱۱-الف)

$$H_x \Big|_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = H_x \Big|_{i,j+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} - D_{b_z} \Big|_{i,j+\frac{1}{2}} \left[ -E_y \Big|_{i,j+2}^n + 27E_y \Big|_{i,j+1}^n - 27E_y \Big|_{i,j}^n + E_y \Big|_{i,j-1}^n \right] - D_c \Big|_{i,j+\frac{1}{2}} \left[ \Psi_{H_{xz}} \Big|_{i,j+\frac{1}{2}}^n \right], \quad (11-ب)$$

$$H_z \Big|_{i+\frac{1}{2},j}^{n+\frac{1}{2}} = H_z \Big|_{i+\frac{1}{2},j}^{n-\frac{1}{2}} + D_{b_x} \Big|_{i+\frac{1}{2},j} \left[ -E_y \Big|_{i+2,j}^n + 27E_y \Big|_{i+1,j}^n - 27E_y \Big|_{i,j}^n + E_y \Big|_{i-1,j}^n \right] + D_c \Big|_{i+\frac{1}{2},j} \left[ \Psi_{H_{zx}} \Big|_{i+\frac{1}{2},j}^n \right], \quad (11-ج)$$

$$E_y \Big|_{i,j}^{n+1} = C_a \Big|_{i,j} \left[ E_y \Big|_{i,j}^n \right] + C_{b_x} \Big|_{i,j} \left[ -H_z \Big|_{i+\frac{3}{2},j}^{n+\frac{1}{2}} + 27H_z \Big|_{i+\frac{1}{2},j}^{n+\frac{1}{2}} - 27H_z \Big|_{i-\frac{1}{2},j}^{n+\frac{1}{2}} + H_z \Big|_{i-\frac{3}{2},j}^{n+\frac{1}{2}} \right] - C_{b_z} \Big|_{i,j} \left[ -H_x \Big|_{i,j+\frac{3}{2}}^{n+\frac{1}{2}} + 27H_x \Big|_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - 27H_x \Big|_{i,j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} + H_x \Big|_{i,j-\frac{3}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right] + C_c \Big|_{i,j} \left[ \Psi_{E_{yx}} \Big|_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} - \Psi_{E_{yz}} \Big|_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} \right],$$

که در روابط بالا بالانویس (اندیس بالا)، نشان‌دهنده موقعیت زمانی و پایین‌نویس، نشان‌دهنده موقعیت مکانی است. برای مثال  $H_x \Big|_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}$  نشان‌دهنده مولفه  $H_x$  میدان در نقطه  $(x,z) = (i\Delta x, (j+1/2)\Delta z)$  و زمان  $t = (n+1/2)\Delta t$  است به گونه‌ای که  $\Delta x$  و  $\Delta z$  فاصله گسسته‌سازی در جهت افقی و عمودی، و  $\Delta t$  گام زمانی است. مدل‌سازی *FDTD* با به‌روزرسانی یکی پس از دیگری میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی، عملی می‌شود و این عمل با تفاضل زمانی  $\Delta t/2$  دو میدان ادامه می‌یابد. همان‌طور که از معادله‌ها برمی‌آید به‌روزرسانی معادله‌ها، کاملاً مستقیم و بدون واسطه صورت می‌گیرد. ضرایب به‌روزرسانی  $C_a, C_{b_x}, C_{b_z}, C_c, D_{b_x}$  و  $D_{b_z}$  در معادله‌های (۱۱) تابعی از پارامترهای الکتریکی و شبکه هستند:

که  $\delta(t)$  تابع دلتای دیراک و  $u(t)$  تابع پله‌ای هستند. با استفاده از این رابطه و با فرض مستقل از بسامد بودن ویژگی‌های مواد، معادل حوزه زمان روابط (۸-الف) تا (۸-ج) به صورت زیر خواهد بود:

$$\mu \frac{\partial H_x}{\partial t} = -\frac{1}{k_z} \frac{\partial E_y}{\partial z} - \zeta_z(t) * \frac{\partial E_y}{\partial z}, \quad (10-الف)$$

$$\mu \frac{\partial H_z}{\partial t} = \frac{1}{k_x} \frac{\partial E_y}{\partial x} + \zeta_x(t) * \frac{\partial E_y}{\partial x}, \quad (10-ب)$$

$$\sigma E_y + \varepsilon \frac{\partial E_y}{\partial t} = \frac{1}{k_x} \frac{\partial H_z}{\partial x} - \frac{1}{k_z} \frac{\partial H_x}{\partial z} + \zeta_x(t) * \frac{\partial H_z}{\partial x} - \zeta_z(t) * \frac{\partial H_x}{\partial z}, \quad (10-ج)$$

که در روابط فوق علامت \* نشان‌دهنده هم‌امیخت است. به‌منظور مدل‌سازی عددی تفاضل متناهی در این تحقیق از روابط مُد *TM* با رویکرد لپ‌فراگ (leap-frog) در یک شبکه جابه‌جا (Staggered Grid) استفاده شد که در آن مولفه‌های میدان در مکان و زمان، از یکدیگر فاصله دارند به طوری که برآوردهای تفاضل متناهی مشتق‌های جزئی در هر معادله، در مرکز مکان- زمان قرار می‌گیرد (بی، ۱۹۹۶).

شکل ۳ آرایش مکانی مولفه‌های میدان  $H_x, H_z$  و  $E_y$  را در یک شبکه برای مدل‌سازی مُد *TM* نشان می‌دهد. مولفه‌های میدان الکتریکی و مغناطیسی با فاصله زمانی  $\Delta t/2$  نیز به صورت جابه‌جا شبکه‌بندی می‌شوند. همه مشتق‌های مکانی، با عبارت‌های تفاضل متناهی با دقت مرتبه چهارم و همه مشتق‌های زمانی، از عبارت‌های تفاضل متناهی با دقت مرتبه دوم برآورد می‌شوند.

پس از جای‌گذاری روابط تفاضل متناهی در رابطه (۴) و حل معادله برای میدان الکتریکی و مغناطیسی به‌روزرسانی شده، معادله‌های *FDTD* زیر به دست می‌آید:

در معادله‌های (۱۱-الف) تا (۱۱-ج) از  $\psi_{H_{xz}}$ ،  $\psi_{H_{zx}}$ ،  $\psi_{E_{yz}}$  و  $\psi_{E_{yx}}$  محاسبه می‌شوند:

(۱۳-الف)

$$\psi_{H_{xz}} \Big|_{i,j+\frac{1}{2}}^n = B_z \Big|_{i,j+\frac{1}{2}} \left[ \psi_{H_{xz}} \Big|_{i,j+\frac{1}{2}}^{n-1} \right] + A_z \Big|_{i,j+\frac{1}{2}} \left[ -E_y \Big|_{i,j+\frac{1}{2}}^n + 27E_y \Big|_{i,j+1}^n - 27E_y \Big|_{i,j}^n + E_y \Big|_{i,j-1}^n \right],$$

(۱۳-ب)

$$\psi_{H_{zx}} \Big|_{i+\frac{1}{2},j}^n = B_x \Big|_{i+\frac{1}{2},j} \left[ \psi_{H_{zx}} \Big|_{i+\frac{1}{2},j}^{n-1} \right] + A_x \Big|_{i+\frac{1}{2},j} \left[ -E_y \Big|_{i+2,j}^n + 27E_y \Big|_{i+1,j}^n - 27E_y \Big|_{i,j}^n + E_y \Big|_{i-1,j}^n \right],$$

(۱۳-ج)

$$\psi_{E_{yz}} \Big|_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} = B_x \Big|_{i,j} \left[ \psi_{E_{yz}} \Big|_{i,j}^{n-\frac{1}{2}} \right] + A_x \Big|_{i,j} \left[ -H_z \Big|_{i+\frac{1}{2},j}^{n+\frac{1}{2}} + 27H_z \Big|_{i+\frac{1}{2},j}^{n+\frac{1}{2}} - 27H_z \Big|_{i-\frac{1}{2},j}^{n+\frac{1}{2}} + H_z \Big|_{i-\frac{3}{2},j}^{n+\frac{1}{2}} \right],$$

(۱۳-د)

$$\psi_{E_{yx}} \Big|_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} = B_z \Big|_{i,j} \left[ \psi_{E_{yx}} \Big|_{i,j}^{n-\frac{1}{2}} \right] + A_z \Big|_{i,j} \left[ -H_x \Big|_{i,j+\frac{3}{2}}^{n+\frac{1}{2}} + 27H_x \Big|_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - 27H_x \Big|_{i,j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} + H_x \Big|_{i,j-\frac{3}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right],$$

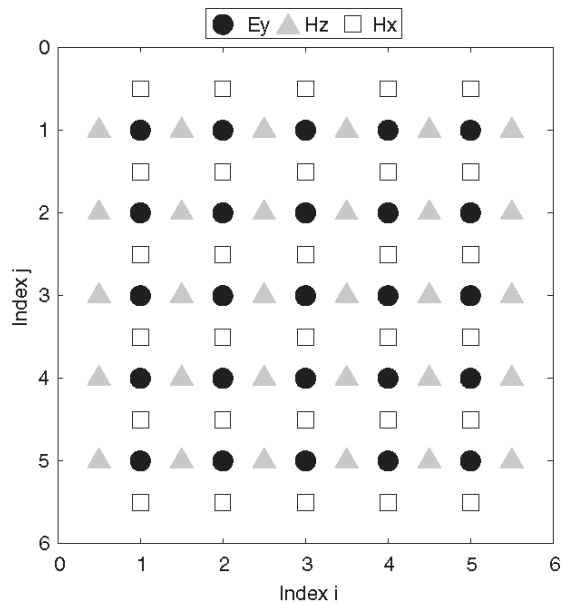
که:

$$A_k = \frac{\sigma_k}{\sigma_k k_k + \alpha_k k_k^2} (B_k - 1), \quad (۱۴-الف)$$

$$B_k = \exp \left[ -\frac{\Delta t}{\varepsilon_0} \left( \frac{\sigma_k}{k_k} + \alpha_k \right) \right], \quad (۱۴-ب)$$

ضرایب به‌روزرسانی *PML* هستند که نسبت به موقعیت مکانی در شبکه متغیرند. همان‌طور که در معادله‌های (۱۳-الف) تا (۱۳-د) دیده می‌شود مقادیر عبارت‌های هم‌میخت در زمان کنونی، از معادله‌شان در گام زمانی قبلی، محاسبه می‌شوند. بنابراین در شبیه‌سازی *FDTD* علاوه بر مولفه‌های میدان الکتریکی و مغناطیسی، مقادیر  $\psi_{E_{yz}}$ ،  $\psi_{E_{yx}}$ ،  $\psi_{H_{xz}}$ ،  $\psi_{H_{zx}}$  نیز می‌باید ذخیره شوند.

به‌منظور اعمال منبع تولید موج (فرستنده) در مدل‌سازی، با استفاده از معادله‌های (۱۱) تا (۱۴)، یک تابع تولید تپ به مولفه  $E_y$  میدان، در موقعیت مکانی



شکل ۳. آرایش مکانی مولفه‌های میدان الکترومغناطیسی  $H_x$ ،  $H_z$  و  $E_y$  برای مدل‌سازی مُد TM (محور X افقی، محور Z قائم و محور Y عمود بر صفحه است). مولفه‌های میدان الکتریکی و مغناطیسی، با فاصله زمانی  $\Delta t/2$  نیز به‌صورت جابه‌جا شبکه‌بندی می‌شوند (ایروینگ و نایت، ۲۰۰۶).

$$C_a = \left(1 - \frac{\sigma \Delta t}{2\varepsilon}\right) \left(1 + \frac{\sigma \Delta t}{2\varepsilon}\right)^{-1}, \quad (۱۲-الف)$$

$$C_{b_k} = \frac{\Delta t}{\varepsilon} \left(1 + \frac{\sigma \Delta t}{2\varepsilon}\right)^{-1} (24k_k \Delta k)^{-1}, \quad (۱۲-ب)$$

$$C_c = \frac{\Delta t}{\varepsilon} \left(1 + \frac{\sigma \Delta t}{2\varepsilon}\right)^{-1}, \quad (۱۲-ج)$$

$$D_{b_k} = \frac{\Delta t}{\mu} (24k_k \Delta k)^{-1}, \quad (۱۲-د)$$

$$D_c = \frac{\Delta t}{\mu}, \quad (۱۲-ن)$$

اگرچه در روابط فوق به‌طور صریح نشان داده نشده، همه ضرایب پیش‌گفته تابعی از موقعیت مکانی در ناحیه مدل‌سازی هستند زیرا به‌طور کلی  $\varepsilon$ ،  $\mu$ ،  $\sigma$ ،  $k_x$  و  $k_z$  نسبت به مکان متغیرند. عبارت‌های هم‌میخت در معادله‌های (۱۰-الف) تا (۱۰-ج) با استفاده از روش هم‌میخت بازگشتی (لوپرز و هانس‌برگر، ۱۹۹۲) مدل‌سازی شده و



از مرزهای شبکه مدل‌سازی، حتی با ضخامت اندک لایه جذبی است. علاوه بر این برای اجرای PML نیازی به برورسانی مرتب معادله‌های FDTD نیست (برای مثال معادله‌های برورسانی شده یکسانی، در همه جای شبکه، مورد استفاده قرار می‌گیرند) و کافی است که متغیرهای کشیدگی مختصات، در نواحی مرزی تغییر کنند. البته در اینجا از روش CPML استفاده شده است، زیرا علاوه بر دارا بودن مزیت‌های PML، با تغییرات خواص محیط میزبان، متغیر است (رودن و گدنی، ۲۰۰۰). بنابراین زمانی که محیط، ناهمگن و پُر اتلاف است نیازی به تغییر ساختار برنامه‌نویسی نیست. در ضمن حافظه رایانه‌ای مورد نیاز، به‌ویژه زمانی که بسامد بسیار کم است و یا اجسام، کشیده و طویل هستند، به شدت کاهش می‌یابد.

همان‌طور که قبلاً نیز اشاره شد در داخل شبکه مدل‌سازی، متغیرهای کشیدگی مختصات  $S_x$  و  $S_z$  برابر با واحد هستند به‌گونه‌ای که معادله‌های (۱۰) تا (۱۳) به صورت معادله‌های استاندارد برورسانی FDTD در مُد  $TM$  درمی‌آیند. این امر مستلزم آن است که در این نواحی  $K_x = K_z = 1$  و  $\sigma_x = \sigma_z = 0$  باشد. به‌هرجهت در نواحی مرزی PML به این پارامترها مقادیر متفاوتی تخصیص داده می‌شود. با انتخاب مقادیر بزرگ‌تر از صفر برای  $\sigma_x$  و  $\sigma_z$  (که باعث می‌شود متغیرهای کشیدگی، مختلط شوند) می‌توان امواج انتشاری را جذب کرد و از طرف دیگر با انتخاب مقادیر بزرگ‌تر از یک برای  $K_x$  و  $K_z$  می‌توان امواج میرا را در ناحیه PML جذب کرد. انتخاب مقادیر بزرگ‌تر از صفر برای  $\alpha_x$  و  $\alpha_z$  نیز توانایی جذب امواج میرا را افزایش می‌دهد (کوزاوغلو و میترا، ۱۹۹۶) اگرچه این پارامترها در گُدهای حاضر به‌طور پیش‌فرض، صفر منظور می‌شوند.

از آنجا که به‌لحاظ نظری، با تغییر مقادیر  $S_x$  و  $S_z$  امپدانس الکترومغناطیسی (Impedance) ثابت می‌ماند بنابراین به‌منظور جذب امواج انتشاری و میرا در نواحی

موردنظر اضافه می‌شود که معادل اضافه کردن تابع منبع به مولفه  $y$  عبارت چگالی جریان در معادله‌های ماکسول است. برای مدل‌سازی گیرنده نیز می‌توان به آسانی مولفه  $E_y$  میدان را درحکم تابعی از زمان در موقعیت‌های گیرنده، ثبت کرد. در این مقاله از مشتق اول بهنجار شده تابع پنجره بلک‌من-هریس (Blackman-Harris) به‌منزله چشمه تولید تپ استفاده شده است (هریس، ۱۹۷۸) که چن و چو (۱۹۹۷) نیز برای مدل‌سازی FDTD ژئوفیزیکی آن را توصیف کرده‌اند. درواقع تپی که در شبکه سیر می‌کند و در موقعیت‌های گیرنده ثبت می‌شود، شبیه یک موجک ریکر (Ricker) است. برای تولید این تپ از یک تابع در محیط مَت‌کَب استفاده شده است که مشتق پنجره بلک‌من-هریس را برای یک بردار زمانی و بسامد غالب موردنظر، محاسبه می‌کند.

لازم به توضیح است که به علت مدل‌سازی دو بُعدی، منبع و گیرنده به‌صورت اجزای خطی هستند که عمود بر صفحه برداشت تا بی‌نهایت گسترش می‌یابند؛ در نتیجه الگوی انتشار آنتن و توزیع هندسی آن برای یک آنتن دوقطبی GPR را نمی‌توان در برنامه‌نویسی لحاظ کرد. لذا در نظر گرفتن الگوی انتشار آنتن نیازمند مدل‌سازی سه بُعدی است. با این تفاسیر مدل‌سازی دو بُعدی صورت گرفته، قادر به مدل‌سازی بسیاری از ویژگی‌های بازتاب‌های برداشت‌های GPR است.

## ۵ مرزهای جاذب PML

در روش استفاده از مرزهای جاذب PML، یک لایه مصنوعی از مواد جاذب، محیط فضای محاسباتی را دربر می‌گیرد. هدف از این کار جذب امواج تخت تابیده با هر زاویه دلخواه از فضای FDTD به لایه PML است به‌طوری‌که هیچ بازتابشی رخ ندهد و معادل این است که تصور شود موج تابیده شده کاملاً از مرز عبور می‌کند. مهم‌ترین مزیت روش PML، کاهش شدید بازتاب امواج

ناهمگن، ممکن است مقدار  $\sigma_{k_{\max}}$  با مقادیر گذردهی دی الکتریک حاشیه‌های حوزه مدل‌سازی، تغییر کند. قبل از اجرای شبیه‌سازی، مرزهای طبیعی درون شبکه، از راه لایه‌گذاری (Padding) با سلول‌های PML، درون ناحیه PML کشیده می‌شود (چن و چو، ۱۹۹۷).

## ۶ بهبود مدل‌سازی تفاضل متناهی در حوزه زمان با فرآیند تبدیل فوریه در محیط مت‌لب

مهم‌ترین اشکال کدهای مدل‌سازی عددی موجود را می‌توان دشوار و زمان‌بر بودن ورود ماتریس داده‌ها و طولانی بودن زمان محاسبات دانست به طوری که فرایند محاسباتی مدل‌سازی پیشرو، به‌ویژه در محیط‌های میزبان با گذردهی دی الکتریک زیاد حتی روی یک رایانه نوین نیز ساعت‌ها به طول می‌انجامد. از آنجا که فرایند مدل‌سازی وارون داده‌های GPR، نیازمند یک هسته مدل‌سازی پیشرو پرسرعت است، لذا اخیراً تحقیقات در زمینه توسعه و بهینه‌سازی سرعت اجرای الگوریتم‌های مدل‌سازی پیشرو، مورد توجه بسیاری از محققان و از جمله نگارندگان تحقیق حاضر قرار گرفته است.

در تحقیق حاضر به منظور افزایش صحت نتایج مدل‌سازی و جلوگیری از دگرنامی مکانی یا پراکندگی عددی، فاصله‌های مکانی چشمه‌ها در طول پیمایش نیم‌رخ در مدل‌سازی، برای ناهمگنی‌های زیرسطحی، حداکثر یک پنجم بعد هدف در راستای پیمایش نیم‌رخ، انتخاب شده است (از آنجا که فاصله فرستنده و گیرنده در راستای پیمایش نیم‌رخ، عملاً صفر است در حقیقت تعداد چشمه‌ها با تعداد تریس‌های برداشت برابر خواهد بود). به عبارت دیگر تعداد چشمه‌ها در راستای پیمایش نیم‌رخ به گونه‌ای تنظیم می‌شود که حداقل تعداد ۵ عدد چشمه، بعد هدف زیرسطحی در راستای پیمایش نیم‌رخ را پوشش دهند. در عین حال به منظور کاهش زمان محاسبات باید این پارامتر نیز بهینه انتخاب شود. بدیهی است که با این

مرزی PML به بهترین وجه ممکن، می‌باید مقادیر  $K_z$ ،  $K_x$  و  $\sigma_x$  و  $\sigma_z$  تا حد امکان بزرگ انتخاب شوند. به هر جهت در عمل هنگامی که تغییرات ویژگی‌های الکتریکی بین گره‌ها شدید باشد، بازتاب‌های عددی در معادله‌های FDTD گسسته رخ می‌دهد. بنابراین پارامترهای PML می‌باید به صورت تدریجی از مقادیرشان در داخل شبکه تا مقدار بیشینه‌ای در مرزهای شبکه، افزایش یابند. مقادیر  $K_x$  و  $K_z$  از رابطه زیر محاسبه می‌شوند:

$$K_k = \begin{cases} 1 \\ 1 + \left(\frac{d}{\delta}\right)^m (K_{k_{\max}} - 1) \end{cases} \quad (15)$$

که  $d$  فاصله هر نقطه درون ناحیه PML از مرز درونی PML،  $\delta$  ضخامت ناحیه PML،  $m$  درحکم ضریب توانی PML شناخته می‌شود و  $K_{k_{\max}}$  مقدار بیشینه است. به طور مشابه برای  $\sigma_x$  و  $\sigma_z$  داریم:

$$\sigma_k = \begin{cases} 0 \\ \left(\frac{d}{\delta}\right)^m \sigma_{k_{\max}} \end{cases} \quad (16)$$

که  $\sigma_{k_{\max}}$  مقدار بیشینه است. در اینجا  $K_k$  و  $\sigma_k$  فقط در طول راستای  $K$  تغییر می‌کنند زیرا متغیرهای کشیدگی مختصات، تابع‌های یک‌بُعدی هستند. برای مثال  $\sigma_x$  در داخل شبکه مدل‌سازی برابر با صفر و فقط در نواحی PML چپ و راست شبکه، غیر صفر خواهد بود. از طرف دیگر پارامتر  $K_z$  در داخل شبکه برابر با یک و فقط در نواحی PML بالا و پایین شبکه، بزرگ‌تر از واحد است. در اینجا به طور پیش‌فرض مقدار  $M$  مساوی با ۴ و  $k_{x_{\max}} = k_{z_{\max}} = 5$  قرار داده شده که بر حسب تجربه، کارایی لازم برای جذب امواج میرا را دارند. مقدار بیشینه  $\sigma_k$  نیز بر حسب معیار زیر محاسبه می‌شود (گدنی، ۱۹۹۸):

$$\sigma_{k_{\max}} = \frac{m+1}{150\pi\sqrt{\epsilon_r}\Delta K} \quad (17)$$

که  $\epsilon_r$  نزدیک‌ترین گذردهی دی الکتریک نسبی داخل شبکه به مرز PML است. به عبارت دیگر در یک محیط

ایجاد دامنه‌های پاسخ‌های بازتابی مقادیر تریس‌های برآوردی، به تعداد دلخواه، تریس مصنوعی محاسبه می‌شود. از آنجا که پاسخ GPR اغلب هدف‌های مدفون به صورت یک رخداد هذلولی شکل است لذا به منظور درون‌یابی بین دو تریس مجاور، برای حفظ شکل منحنی‌وار، از درون‌یابی یک‌بُعدی به روش هرمیتی مکعبی تکه‌ای استفاده شده است. این محاسبات در مدت‌زمان بسیار کوتاهی صورت می‌گیرد و نتیجه آن حذف حالت پله‌پله بودن پاسخ در مکان‌های مجزا و بهبود کیفی و بصری پیوستگی تریس‌ها در پاسخ نهایی مقطع GPR (پاسخ با تفکیک‌پذیری زیاد) است. قابل ذکر است که در این کد، به منظور افزایش سرعت اجرای برنامه و تمرکز بیشتر روی پاسخ مدل، رخداد مربوط به موج مستقیم (هوا و زمین) از پاسخ، حذف شده است.

شکل ۴ نمودار جریان الگوریتم مدل‌سازی پیشرو تفاضل متناهی داده‌های رادار نفوذی به زمین با تفکیک‌پذیری زیاد را نشان می‌دهد.

بنابراین همواره خروجی برنامه مدل‌سازی پیشرو، شامل دو پاسخ، یکی با تفکیک‌پذیری کم تحت عنوان Low Resolution Response و دیگری با تفکیک‌پذیری زیاد تحت عنوان High Resolution Response است. از آنجا که بخش عمده‌ای از محاسبات، از درون مرحله مدل‌سازی پیشرو، خارج و به صورت عملیات دیگری برای دستیابی به تفکیک‌پذیری زیاد، در حوزه فوریه صورت می‌گیرد، در نتیجه، طول زمان کل محاسبات، به طور چشمگیری و تا بیش از ۱۲/۵ برابر قبل از به‌کارگیری این روش، کاهش می‌یابد.

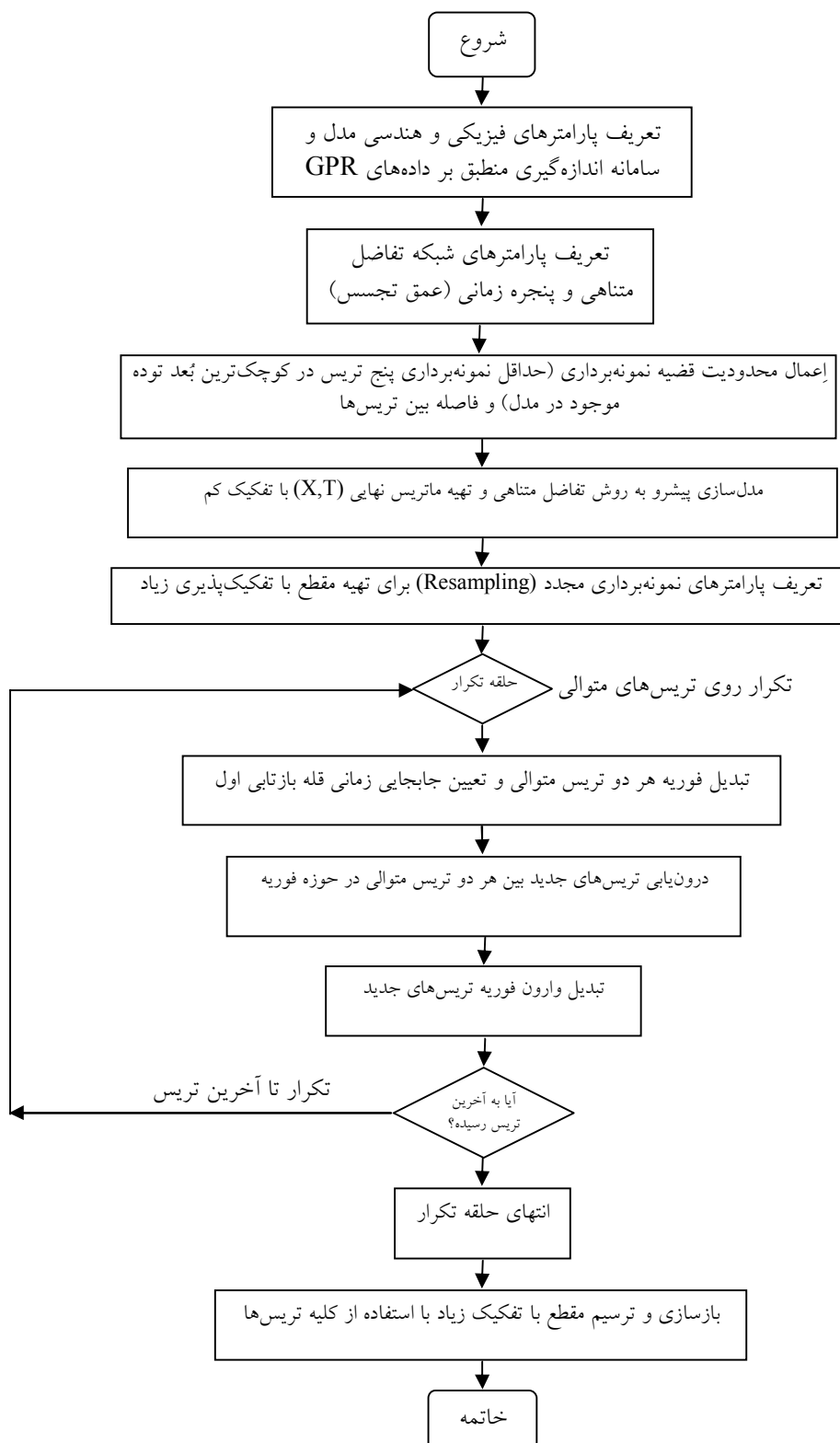
انتخاب، پاسخ GPR حاصله از مدل‌سازی پیشرو، به صورت ناپیوسته و پله‌پله به نظر می‌رسد (پاسخ با تفکیک‌پذیری کم) که چندان مطلوب نیست.

همان‌طور که قبلاً نیز گفته شد پاسخ GPR اغلب هدف‌های مدفون، مطابق شکل ۱ به صورت یک شبه‌هذلولی است. به عبارت دیگر، سیگنال‌های تریس‌های پاسخ GPR، در محدوده ناهمگنی‌های زیرسطحی، دارای یک جابه‌جایی زمانی هستند (مشابه آنچه که در روش‌های لرزه‌ای، برون‌راند نرمال (NMO) نامیده می‌شود). این خاصیت، اجازه به‌کارگیری تبدیل فوریه تریس‌ها و اعمال جابه‌جایی زمانی در حوزه بسامدی را فراهم می‌آورد. با این نگرش به منظور افزایش سرعت اجرای برنامه در محیط مت‌کب و درعین حال افزایش تفکیک‌پذیری مکانی پاسخ (تفکیک‌پذیری جانبی داده‌ها در امتداد پیمایش نیم‌رخ)، از تبدیل فوریه سریع هر دو تریس متوالی، که دارای یک جابه‌جایی زمانی معین هستند مطابق رابطه (۱۸) استفاده شده است.

$$f(t-t_0) \stackrel{F}{\Leftrightarrow} e^{-i\omega t_0} F(\omega), \quad (18)$$

که  $t$  و  $t_0$  زمان،  $i = \sqrt{-1}$ ،  $\omega$  بسامد زاویه‌ای و  $F$  علامت تبدیل فوریه است.

در این روش ابتدا بیشترین مقدار دامنه هر تریس به منزله شروع سیگنال بازتابی اول، برای همه تریس‌ها شناسایی، سپس اختلاف زمانی بین سیگنال بازتابی اول در هر دو تریس متوالی، تعیین شده و به صورت جابه‌جایی زمانی در فاصله‌های مکانی بین هر دو تریس متوالی، ذخیره می‌شود. سپس با استفاده از تبدیل فوریه هر دو تریس مجاور و داشتن این میزان جابه‌جایی زمانی، با استفاده از درون‌یابی در فاصله بین هر دو تریس متوالی و



شکل ۴. نمودار جریان الگوریتم مدلسازی پیشرو تفاضل متناهی داده های رادار نفوذی به زمین با تفکیک پذیری زیاد.

## ۷ بررسی پاسخ GPR مدل‌های مصنوعی

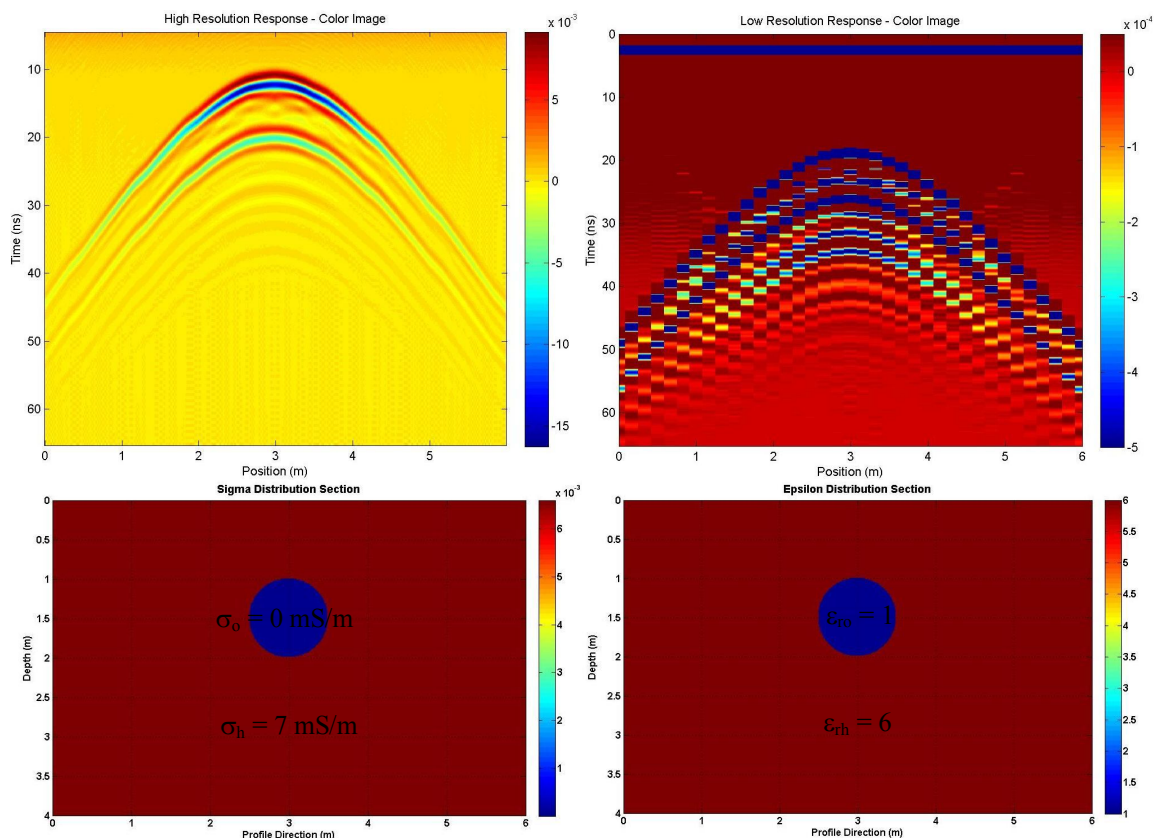
به منظور راستی‌آزمایی و اطمینان از عملکرد الگوریتم مدل‌سازی پیشرو به روش تفاضل متناهی، پاسخ سامانه GPR برای شیء‌های مصنوعی فرضی متداول در بررسی‌ها و تحقیقات ژئوتکنیکی و شناسایی ساختار، نظیر استوانه افقی منفرد (معرف انواع لوله‌ها و قنات‌ها)، منشور دو بُعدی (معرف انواع کانال‌ها، قنات‌ها و فضاهاى خالی)، استوانه افقی جفت (به منظور تعیین حد جدایش دو شیء استوانه‌ای مدفون در مجاورت یکدیگر)، زمین چند لایه‌ای (معرف اسلب)، ترکیب زمین لایه‌ای و منشور (معرف کنتاکت قائم) و یک شیء با سطح مقطع دو بُعدی به شکل چندضلعی دلخواه (معرف فضاهاى خالی) شبیه‌سازی شد. برای مدل‌سازی پاسخ GPR مدل‌های پیش‌گفته کافی است با اجرای کد نرم‌افزاری نوشته شده در محیط مت‌لب و وارد کردن مقادیر به ترتیب، ویژگی‌های الکتریکی و مغناطیسی ( $\mu_r$ ،  $\epsilon_r$  و  $\sigma$ ) محیط میزبان و هدف، ابعاد مقطع برداشتی GPR، فاصله‌های گسسته‌سازی مکانی و بسامد مرکزی آنتن، یکی از انواع هدف‌های پیش‌گفته در بالا را انتخاب کرد.

برای نمونه دو پاسخ با تفکیک‌پذیری کم و با تفکیک‌پذیری زیاد مدل‌سازی شده GPR برای یک هدف استوانه‌ای افقی توخالی (پراز هوا) به قطر یک متر، مدفون در عمق یک متری (فاصله از سطح زمین تا قسمت فوقانی هدف) در محیط میزبان از جنس خاک رُس سیلتی، در شکل ۵ نشان داده شده است. در قسمت پایین این شکل، مقطع توزیع گذردهی دی‌الکتریک مدل، در سمت راست و مقطع توزیع رسانایی الکتریکی، در سمت چپ مشاهده می‌شود. بسامد غالب امواج EM ۲۵۰ مگاهرتز است و پیمایش در راستای عمود بر امتداد محور استوانه صورت می‌گیرد. ویژگی‌های فیزیکی محیط میزبان به صورت  $\epsilon_{rh} = 6$  و  $\sigma_h = 7 \text{ mS/m}$  و برای هدف استوانه‌ای به صورت  $\epsilon_{ro} = 1$  و  $\sigma_o = 0 \text{ mS/m}$  است

درحالی‌که مقدار نفوذپذیری مغناطیسی ( $\mu$ ) محیط میزبان و هدف، برابر با نفوذپذیری مغناطیسی فضای آزاد است. همان‌طور که در شکل ۵ مشاهده می‌شود پاسخ GPR حاصل از سقف و کف هدف استوانه‌ای مدفون، به صورت هذلولی‌های با تفکیک‌پذیری زیاد، با نمایش شدت بازتاب و نیز قطبیدگی موج، به وضوح نمایان است. کل اجرای مدل‌سازی پیشرو برای این مورد، با استفاده از الگوریتم بهبودیافته، معادل ۵/۱۵ دقیقه به طول انجامید که در مقایسه با مدت زمان ۶۴/۴ دقیقه با الگوریتم اصلاح نشده، زمان محاسبات به‌طور چشمگیری کاهش یافته و در نتیجه سرعت محاسبات بیش از ۱۲/۵ برابر افزایش پیدا کرده است.

در قسمت پایین شکل ۶ پارامترهای هندسی و فیزیکی یک هدف با سطح مقطع دو بُعدی به شکل منشور مربعی توخالی (پراز هوا) به ابعاد یک متر، مدفون در عمق یک متری (فاصله از سطح زمین تا قسمت فوقانی هدف) در محیط میزبان از جنس خاک رُس مرطوب با نمایش مقطع توزیع گذردهی دی‌الکتریک در سمت راست و مقطع توزیع رسانایی الکتریکی در سمت چپ و دو پاسخ با تفکیک‌پذیری کم و با تفکیک‌پذیری زیاد مدل‌سازی شده GPR در قسمت بالای این شکل، نشان داده شده است. بسامد غالب امواج EM ۲۵۰ مگاهرتز و پیمایش در راستای عمود بر امتداد محور منشور می‌باشد. ویژگی‌های فیزیکی محیط میزبان به صورت  $\epsilon_{rh} = 19$  و  $\sigma_h = 10$  و  $\sigma_o = 0 \text{ mS/m}$  و برای هدف منشور مربعی، به صورت  $\epsilon_{ro} = 1$  و  $\sigma_o = 0 \text{ mS/m}$  است درحالی‌که مقدار نفوذپذیری مغناطیسی محیط میزبان و هدف برابر با نفوذپذیری مغناطیسی فضای آزاد است.

در این مورد مطابق شکل ۶ پاسخ سقف هدف به صورت یک شبه‌هذلولی با قله مسطح و پاسخ کف هدف، به صورت یک شبه‌هذلولی ناقص با قله نسبتاً مسطح است. لذا در مدل‌سازی وارون داده‌های GPR، این پاسخ،



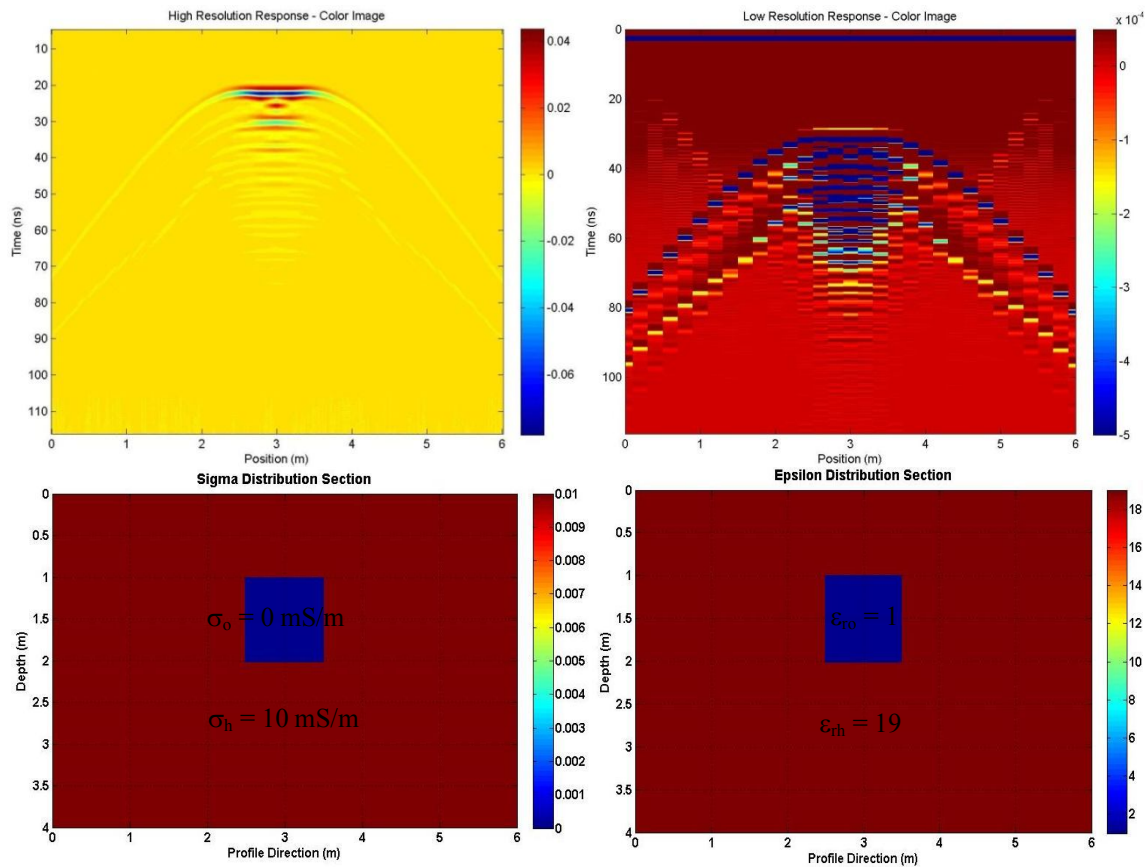
شکل ۵. پارامترهای فیزیکی و هندسی یک مدل حاوی استوانه افقی توخالی در قسمت پایین شکل و پاسخ‌های سامانه GPR در قسمت بالای شکل (تفکیک‌پذیری کم در سمت راست و تفکیک‌پذیری زیاد در سمت چپ) مشاهده می‌شوند.  $T$ : نسبی،  $h$ : محیط میزبان و  $0$ : شیء.

گذردهی دی‌الکتریک در سمت راست و مقطع توزیع رسانایی الکتریکی در سمت چپ) که فاصله مراکز دو استوانه از یکدیگر سه متر است. دو پاسخ با تفکیک‌پذیری کم و با تفکیک‌پذیری زیاد مدل‌سازی شده GPR مربوطه، با امواج با بسامد غالب ۲۵۰ مگاهرتز، در قسمت بالای این شکل، با پیمایش در راستای عمود بر امتداد محور استوانه‌ها نشان داده شده است. ویژگی‌های فیزیکی محیط میزبان به صورت  $\epsilon_{rh} = 6$  و  $\sigma_h = 7 \text{ mS/m}$  برای هدف‌های استوانه‌ای به صورت  $\epsilon_{ro} = 1$  و  $\sigma_o = 0 \text{ mS/m}$  بوده درحالی‌که مقدار نفوذپذیری مغناطیسی محیط میزبان و هدف‌ها برابر با نفوذپذیری مغناطیسی فضای آزاد است.

نشانه حضور یک هدف مدفون با سطح مقطع دوبعدی به شکل منشور، در زیر سطح زمین است.

به‌منظور نمایش پاسخ GPR در یک محیط حاوی بیش از یک شیء، بررسی تأثیر پاسخ‌ها روی یکدیگر، و تعیین میزان حد جدایش دو پاسخ از یکدیگر (و در نتیجه شناسایی دو هدف زیرسطحی)، مدل‌سازی پاسخ GPR برای یک حالت ترکیبی از دو شیء استوانه‌ای افقی توخالی (صددرصد پر از هوا) به قطر یک متر، مدفون در عمق یک متری، در مجاورت یکدیگر درون یک محیط میزبان از جنس خاک رُس سیلتی صورت گرفت.

به عنوان نمونه در قسمت پایین شکل ۷ پارامترهای هندسی و فیزیکی یک مدل شامل دو استوانه افقی در مجاورت یکدیگر، نشان داده شده است (مقطع توزیع

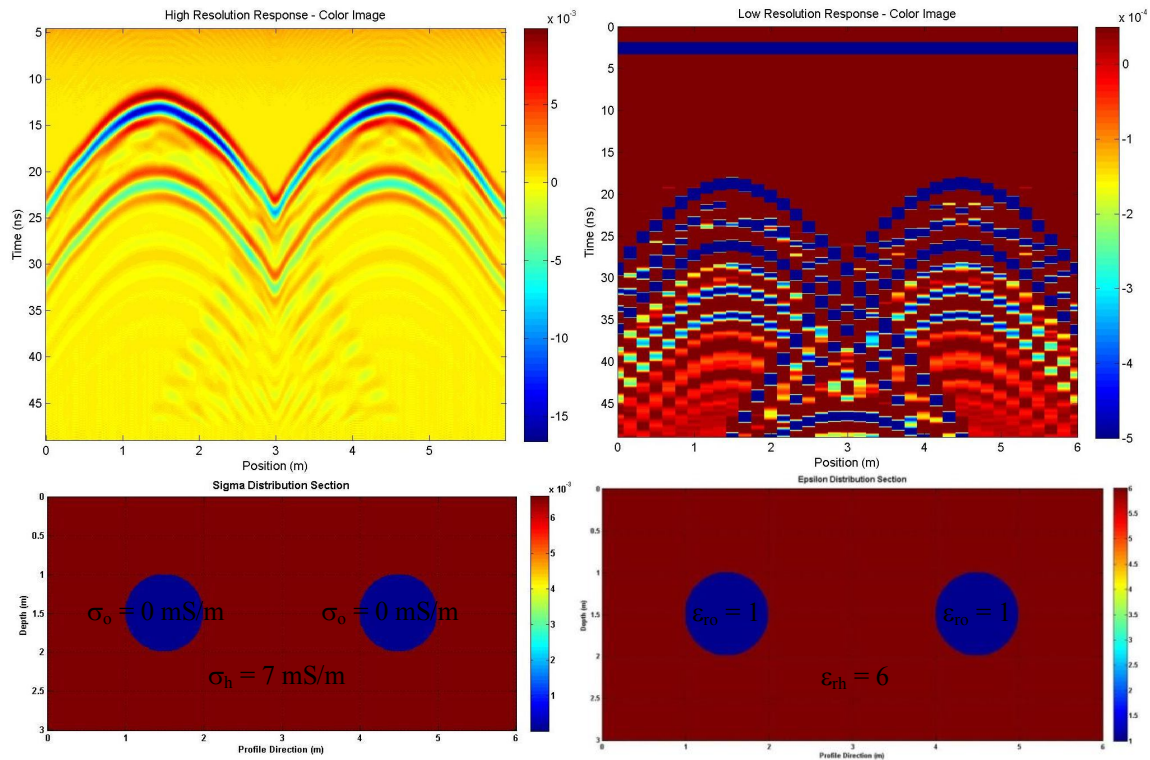


شکل ۶. پارامترهای فیزیکی و هندسی یک مدل حاوی منشور مربعی دو بُعدی توخالی در قسمت پایین شکل و پاسخ‌های سامانه GPR در قسمت بالای شکل (تفکیک‌پذیری کم در سمت راست و تفکیک‌پذیری زیاد در سمت چپ) مشاهده می‌شود.  $\epsilon$ : نسبی،  $\sigma$ : محیط میزبان و  $\sigma$ : شیء است.

### ۸ نتیجه‌گیری

در این تحقیق یک الگوریتم مدل‌سازی پیش‌رو تفاضل متناهی دو بُعدی، با قابلیت شبیه‌سازی برای مدل‌های مصنوعی متناظر با هدف‌های متداول در کاربردهای ژئوتکنیکی، بهبود یافت. الگوریتم پیشنهادی که از میزان جابه‌جایی زمانی تریس‌های متوالی و قضیه جابه‌جایی زمانی تبدیل فوریه و نیز درونیابی مکعبی بین هر دو تریس متوالی، استفاده می‌کند با شبیه‌سازی پاسخ مدل‌های مصنوعی گوناگون متداول در کاربردهای ژئوتکنیکی از جمله یک استوانه افقی منفرد، یک منشور مربعی دو بُعدی و یک مدل حاوی دو استوانه افقی در مجاورت یکدیگر، آزمایش شد. نتایج شبیه‌سازی‌ها نشان می‌دهد

همان‌طور که در شکل ۷ مشاهده می‌شود در این مورد اگرچه در تصویر GPR حاصل از شبیه‌سازی، پاسخ‌های مربوط به دو هدف استوانه‌ای کاملاً از یکدیگر مجزا نیستند و اندکی همپوشانی دارند اما دو هدف، به وضوح قابل تفکیک و شناسایی هستند (با توجه به فاصله زیاد بین دو هدف). براساس آزمایش‌های عددی تعداد زیادی مدل حاوی دو استوانه افقی در مجاورت یکدیگر با فاصله‌های متفاوت، مشخص شد که تامادامی که فاصله بین نقاط قله دو هذلولی پاسخ (یا فاصله بین مراکز دو استوانه) از یک و نیم برابر قطر هر یک از استوانه‌ها کمتر نباشد دو هدف از روی پاسخ‌های حاصل در تصویر GPR قابل تفکیک و شناسایی هستند.



شکل ۷. پارامترهای فیزیکی و هندسی یک مدل حاوی دو استوانه افقی توخالی در مجاورت یکدیگر در قسمت پایین شکل و پاسخهای سامانه GPR در قسمت بالای شکل (تفکیک پذیری کم در سمت راست و تفکیک پذیری زیاد در سمت چپ) مشاهده می شوند.  $\sigma$ : نسبی،  $h$ : محیط میزبان و  $0$ : شیء است.

- workshop notes: Sensors and Software Inc. Mississauga, ON, Canada.
- Annan, A. P., 2003, GPR for infrastructure imaging: International Symposium (NDT-CE 2003), Non-Destructive Testing in Civil Engineering.
- Berenger, J. P., 1994, A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves: J. Computational Physics, **114**, 185-200.
- Bergmann, T., Robertsson, J. O. A., and Holliger, K., 1998, Finite difference modeling of electromagnetic wave propagation in dispersive and attenuating media: Geophysics, **63**(3), 856-867.
- Bourgeois, J. M., and Smith, G. S., 1996, A fully three dimensional simulation of a ground penetrating radar: FDTD theory compared with experiment: IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, **34**, 36-44.
- Cassidy, N. J., 2001, The application of mathematical modeling in the interpretation of Ground Penetrating Radar data: Ph.D. Thesis, Keele University.
- Chen, H. W., and Huang, T. M., 1998, Finite-difference time-domain simulation of GPR

که الگوی پاسخ GPR حاصل مطابق انتظار به وضوح از یک شکل هذلولی، تبعیت می کند. بنابراین با استفاده از یک روش مدل سازی عددی مناسب (روش تفاضل متناهی) از راه بکارگیری تبدیل فوریه تریسها و اعمال جابه جایی زمانی در حوزه بسامد روی الگوی رفتاری پاسخهای GPR، نه فقط می توان تفکیک پذیری جانبی پاسخهای GPR را در راستای پیمایش نیم رخ افزایش داد بلکه می توان مدت زمان اجرای برنامه را تا حدود ۱۲/۵ برابر نسبت به حالت بهبود نیافته، کاهش داد. این هسته مدل سازی پیشرو، مبنای مدل سازی وارون داده ها با هدف استفاده از پاسخ مدل ها و تحلیل نتایج در تحقیقات ژئوتکنیکی، خواهد بود.

#### منابع

- Annan, A. P., 2001, Ground penetrating radar



- Microwave and Optical Technology Letters, **51**(4), 1070-1075.
- Kuzuoglu, M., and Mittra, R., 1996, Frequency dependence of the constitutive parameters of causal perfectly matched anisotropic: IEEE Microwave and Guided Wave Letters, **6**, 447-449.
- Luebbers, R. J., and Hunsberger, F., 1992, FDTD for Nth-order dispersive media. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, **40**, 1297-1301.
- Roberts, R. L., and Daniels, J. J., 1997, Modeling near-field GPR in three dimensions using the FDTD method: Geophysics, **62**(4), 1114-1126.
- Roden, J., and Gedney, S., 2000, Convolution PML (CPML): An efficient FDTD implementation of the CFS-PML for arbitrary media: IEEE Microwave and Optical Technology Letters, **27**, 334-339.
- Sadiku, O., and Matthew, N., 2001, Numerical Techniques in Electromagnetics. Boca Raton London New York Washington, D. C., CRC Press.
- Teixeria, F. L., Chew, W. C., Straka, M., Oristaglio, M. L., and Wang, T., 1998, Finite-difference time-domain simulation of ground penetrating radar on dispersive, inhomogeneous and conductive soils: IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, **36**(6), 1928-1937.
- Weedon, W. H., and Rappaport, C. M., 1997, A general method for FDTD modeling of wave propagation in arbitrary frequency-dispersive media: IEEE Transactions on Antennas and Propagation, **45**(3), 401-409.
- Yee, K. S., and Chen, J. S., 1997, The finite-difference time-domain (FDTD) and the finite-volume time-domain (FVTD) methods in solving Maxwell's equations: IEEE Transactions on Antennas and Propagation, **45**(3), 354-363.
- Yee, K. S., 1966, Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell's equations in isotropic media: IEEE Transactions on Antennas and Propagation, **AP-14**, 302-307.
- data: Journal of Applied Geophysics, **40**, 139-163.
- Chen, Y. H., and Chew, W. C., 1997, Application of perfectly matched layers to the transient modeling of subsurface EM problems: Geophysics, **62**, 1730-1736.
- Chew, W. C., and Weedon, W. H., 1994, A 3-D perfectly matched medium from modified Maxwell's equations with stretched coordinates: IEEE Microwave and Optical Technology Letters, **7**, 599-604.
- Fang, J., and Wu, Z., 1996, Generalized perfectly matched layer for the absorption of propagating and evanescent waves in lossless and lossy media: IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques, **44**, 2216-2222.
- Gedney, S., 1998, The perfectly matched layer absorbing medium. In: Taflove, A. (Ed.), Advances in Computational Electrodynamics: The Finite-Difference Time-Domain Method. Artech House, Norwood, MA, pp. 263-343.
- Georgakopoulos, S. V., Birtcher, C. R., Balanis, C. A., and Renaut, R. A., 2002, Higher-order finite-difference schemes for electromagnetic radiation, scattering, and penetration, Part 1: Theory: IEEE Antennas and Propagation Magazine, **44**, 134-142.
- Giannopoulos, A., 2005, Modeling ground penetrating radar by GPRMax: Construction and Building Materials, **19**, 775-762.
- Goodman, D., 1994, Ground Penetrating Radar simulation in engineering and archaeology: Geophysics, **59**, 224-232.
- Harris, F. J., 1978, On the use of windows for harmonic analysis with the discrete Fourier transform: Proceedings of the IEEE, **66**, 51-83.
- Irving, J., and Knight, R., 2006, Numerical modeling of ground penetrating radar in 2-D using MATLAB: Computers & Geosciences, **32**, 1247-1258.
- Jol, H.M., 2009, Ground Penetrating Radar Theory and Applications. First edition, Elsevier Science. 543 Pages.
- Karpat, E., akir, M. C., and Sevgi, L., 2009, Subsurface imaging, FDTD-Based simulations and alternative scan/processing approaches: