حل عددی معادلات بوسینسک تراکم‌ناپذیر با استفاده از روش فشرده ترکیبی مرتبه ششم

اسماعیل قیصری[1]، سرمد قادر[2*] و عباسعلی علی‌اکبری بیدختی[3]

[1] دانش‌آموخته کارشناسی‌ارشد هواشناسی، فیزیک فضا، مؤسسه ژئوفیزیک دانشگاه تهران، ایران
[2] دانشیار، گروه فیزیک فضا، مؤسسه ژئوفیزیک دانشگاه تهران، ایران
[3] استاد، گروه فیزیک فضا، مؤسسه ژئوفیزیک دانشگاه تهران، ایران

(تاریخ دریافت: 94/12/02، تاریخ پذیرش: 95/02/22)

چکیده

حل دقیق معادلات حاکم بر جریان گرانی می‌تواند در تحلیل دینامیک پدیده‌های جوّی و اقیانوسی مرتبط مفید باشد. در این کار معادلات حاکم بر جریان گرانی با تقریب بوسینسک در قالب شارش گرانی Lock exchange با استفاده از روش فشرده ترکیبی مرتبه ششم حل عددی می‌شوند. به‌منظور مقایسه دقت روش فشرده ترکیبی مرتبه ششم با روش‌های مرتبه دوم مرکزی و فشرده مرتبه چهارم، از حل عددی مسئله گردش اقیانوسی استومل استفاده شده است. با استفاده از مسئله موردی جریان گرانی Lock exchange به‌شکل‌های جریان گرانی تخت و استوانه‌ای، توانایی تفکیک روش فشرده ترکیبی مرتبه ششم در معادلات غیرخطی که به واقعیت نزدیک‌ترند سنجیده می‌شود. برای شبیه‌سازی عددی شرایط مرزی روابط مرزی متناسب با روش فشرده ترکیبی مرتبه ششم با در نظر گرفتن شرایط مرزی بدون لغزش اعمال می‌شود. مقایسه کیفی نتایج حل عددی با کار دیگران حاکی از عملکرد بهتر روش فشرده ترکیبی مرتبه ششم است. به‌علاوه مقایسه کیفی و کمّی نتایج حل عددی با استفاده از روش فشرده ترکیبی مرتبه ششم در مقایسه با روش‌های فشرده مرتبه چهارم و مرتبه دوم مرکزی نیز بیانگر عملکرد مناسب‌تر روش فشرده ترکیبی مرتبه ششم می‌باشد.

واژه‌های کلیدی: روش فشرده ترکیبی مرتبه ششم، شارش Lock exchange، معادلات بوسینسک، جریان گرانی

* نگارنده رابط: sghader@ut.ac.ir

1 مقدمه

اختلاف چگالی بین دو شاره که با هم برخورد فیزیکی می‌کنند، باعث می‌شود که شاره‌ها در یکدیگر وارد شوند. حاصل این برهم‌کنش فیزیکی به‌شکل یک جریان گرانی منتشر می‌شود و آن را جریان چگالی یا جریان شناوری نیز می‌گویند. نیروی محرکه جریان گرانی اختلاف چگالی بین دو شاره است. اختلاف چگالی می‌تواند ناشی از اختلاف دما یا تفاوت در مواد محلول یا معلق در دو شاره باشد. بررسی دینامیک جریان گرانی جوّ در مسائلی مانند آلودگی‌های جوّی و ایمنی در پرواز هواپیماها و سایر پدیده‌های جوّی اهمیت دارد. جریان گرانی در اقیانوس نیز به‌علت اختلاف در شوری آب یا دما و یا در هنگام ورود توده‌های گل‌آلود به اقیانوس رخ می‌دهد (سیمپسون، 1997). عوامل انسان‌زاد مانند پخش آلودگی‌های نفتی در سطح آب‌ها، گسترش گرما از نیروگاه‌های تولید برق به داخل آب‌ها و آزاد شدن گازهای چگال صنعتی در جوّ از دیگر چشمه‌های تولید و گسترش جریان گرانی هستد (هولت، 1972). عوامل طبیعی مانند توفان‌ها نیز در شکل‌گیری جریان گرانی جوّ مؤثرند مثلاً در جوّ بادهای شدیدی در قسمت خروجی توفان تُندری به‌صورت یک جریان گرانی متشکل از هوای سرد با چگالی بالا ایجاد می‌شود. نمونه‌هایی از این جریان که به جریان جبهه‌ای جستناک معروف است توسط بیدختی و همکاران (1384) برای منطقه تهران بررسی شده است.

در قسمت جبهه جریان گرانی ناحیه‌ای موسوم به نوک (Head) وجود دارد که در آن جریان از سایر قسمت‌های دیگر برآمده‌تر است و دماغه (Nose) جریان نام دارد. در دینامیک جریان گرانی نوک و دماغه جریان اهمیت زیادی دارند زیرا در این دو ناحیه شکست امواج و اختلاط شدید صورت می‌گیرد. شکل دماغه و نوک جریان به اختلاف چگالی یا دمای بین دو شاره و نیز به عدد رینولدز جریان بستگی دارد. هرچه اختلاف دمای بین دو شاره و عدد رینولدز کم‌تر باشد اثر نیروی گرانی کم‌تر شده و تأثیر نیروی وشکسانی بیشتر می‌شود و در این حالت دماغه جریان کوچک‌تر شده و میزان آمیختگی جریان کاهش می‌یابد (فنلوپ، 1994). چینه‌بندی دما و سرعت در سطح مشترک دو شاره تحت عنوان ناپایداری کلوین–هلمهولتز باعث ایجاد ورقه تاوه (Vortex sheet) می‌شود. این تاوه‌ها در قالب بازگشت شاره سنگین‌تر به‌سمت عقب در سطح مشترک دو شاره نقش اصلی در آمیختگی دو شاره با یکدیگر را دارند و در ضمن تاوه‌ها به‌شکل دوبُعدی منتشر می‌شوند (سیمپسون، 1986).

برای شبیه‌سازی مدل آزمایشگاهی جریان گرانی از یک پیکربندی معروف به‌نام Lock exchange (LE) استفاده می‌شود (وود، 1970؛ شین و همکاران، 2004). شکل دوبُعدی این پیکربندی در آزمایشگاه کانالی است حاوی دو شاره با دمای متفاوت که در ابتدا در حالت سکون هستند و با استفاده از یک یا دو دریچه شاره سبک (گرم) از شاره سنگین (سرد) جدا می‌شود. با برداشتن دریچه یا دریچه‌ها شاره سنگین به زیر شاره سبک رُمبش (Collapse) می‌کند و دو شاره در دو سوی مخالف هم، شاره سنگین در کف و شاره سبک در بالای آن، حرکت می‌کنند. جریان گرانی در قالب شارش LE به دو نوع جریان گرانی تخت (Planar) و استوانه‌ای طراحی می‌شود. در جریان گرانی تخت، شاره بین دو دیوار کانال‌مانند حرکت می‌کند (مثل رها شدن آلودگی‌های شهری به داخل دره‌ای که شهر درآن واقع است؛ اویو و همکاران، 2007)، اما در جریان گرانی استوانه‌ای شاره به‌شکل شعاعی به اطراف پخش می‌شود (مثل رها شدن گاز چگال در یک فضای آزاد یا رمبش یک پلوم انفجاری متقارن؛ کانترو و همکاران، 2007). در کار حاضر جریان گرانی در قالب شارش LE به دو شکل جریان گرانی تخت و استوانه‌ای شبیه‌سازی عددی

می‌شود.

از آنجا که معادلات حاکم بر رفتار جریان گرانی، معادلات دیفرانسیل جزئی غیرخطی هستند، در بیشتر موارد با استفاده از روش‌های تحلیلی نمی‌توان این معادلات را حل کرد. یکی از روش‌های کارآمد در حل این معادلات استفاده از روش‌های عددی است ازجمله می‌توان به روش‌های تفاضل متناهی، عنصر متناهی یا بسط به سری مانند طیفی اشاره کرد. روش‌های فشرده هم از جمله روش‌های تفاضل متناهی با توانایی تفکیک بالا هستند. ایده اصلی روش‌های فشرده ابتدا در کارهای نیومروف (1924) و فاکس گودوین (1949) مطرح شد. ولی استفاده عملی از این روش‌ها در شبیه‌سازی‌های عددی توسط کریس (1976) و هرش (1975) به‌کار گرفته شد. امروزه از این روش‌ها به‌عنوان روشی کارآمد در شبیه‌سازی دینامیک شاره‌ها استفاده می‌شود. لِه‌لِه (1992) گروه‌های متنوعی از این روش‌های فشرده با تفکیک متفاوت را معرفی کرده است. روش‌های فشرده ترکیبی نوع دیگری از روش‌های فشرده‌اند که در فرمول‌بندی آنها از ترکیب هم‌زمان مشتق‌های اول و دوم استفاده می‌شود.

در زمینه شبیه‌سازی عددی شارش گرانی LE می‌توان به کارهای هارتل و همکاران (2000)، لیو و همکاران (2003)، کانترو و همکاران (2007)، الیاس و همکاران (2008) و قادر و همکاران (1390، 2012) اشاره کرد. در ادامه تحقیق‌های انجام شده، در کار حاضر به اعمال روش فشرده ترکیبی مرتبه ششم در شکل سه‌نقطه‌ای و مرکزی برای حل عددی معادلات بوسینسک تراکم‌ناپذیر و ناچرخان حاکم بر جریان گرانی در قالب شارش LE پرداخته می‌شود.

نتایج کار حاضر در مواردی با تحقیق لیو و همکاران (2003) و نیز قادر و همکاران (2012) مقایسه می‌شود. این مقایسه در حالی انجام می‌گیرد که در کار لیو و همکاران (2003) از روش فشرده به‌شکل نُه‌نقطه‌ای برای حل معادلات بوسینسک تراکم‌ناپذیر استفاده شده و برای اعمال شرایط مرزی سازگار با داخل حوزه، شبه نقاط (Ghost points) مورد استفاده قرار گرفته است (وینان و لیو، 1996). اما در کار قادر و همکاران (2012) از روش فشرده مرتبه چهارم استفاده شده و شرایط مرزی سازگار با حل عددی از طریق روابط پیش‌سو و پس‌سو متناسب با این روش به‌کار گرفته شده است (هرش، 1975).

در ادامه و در بخش دوم، به بیان معادلات حاکم و شرایط مرزی پرداخته می‌شود. بخش سوم به شرح گسسته‌سازی زمانی و مکانی معادلات حاکم می‌پردازد. در بخش چهارم دقت روش فشرده ترکیبی مرتبه ششم به‌کمک مسئله گردش اقیانوسی استومل با روش مرتبه دوم مرکزی و فشرده مرتبه چهارم مقایسه می‌شود. بخش پنجم نتایج حل عددی را تحت بررسی‌های موردی جریان گرانی تخت و استوانه‌ای عرضه می‌کند. در پایان نتیجه‌گیری در بخش ششم آورده شده است.

2 معادلات حاکم

معادلات حاکم بر رفتار یک شاره ژئوفیزیکی یعنی معادلات نَویر–استوکس دوبُعدی ناپایا، وشکسان و تراکم‌ناپذیر در صفحه x–z را در نظر می‌گیریم. با استفاده از متغیرهای بی‌بُعد که با استفاده از بالانویس ستاره (*) در روابط زیر نشان داده شده‌اند، می‌توان این معادلات را به‌شکل بی‌بُعد نوشت:

$$u=u_b u^*, w=u_b w^*, x=hx^*, z=hz^*, \quad p=(\rho u_b^2)p^*, t=(\frac{h}{u_b})t^*. \qquad (1)$$

که u و w به‌ترتیب مؤلفه‌های افقی و قائم سرعت، u_b سرعت شناوری نام دارد که به‌صورت $u_b=\sqrt{g'h}$ تعریف می‌شود که در آن h عمق شاره است و $g'=(\frac{\theta_{\max}-\theta_{\min}}{\theta_{\min}})g$ شتاب گرانی کاهیده، g شتاب

گرانی و $\theta_{\max}$ و $\theta_{\min}$ به‌ترتیب دمای بیشینه و کمینه در داخل شاره، p فشار و ρ چگالی است (برای مثال بنجامین، 1968). مقیاس زمانی نیز برای بی‌بُعد کردن زمان به‌شکل $\frac{h}{u_b}$ تعریف می‌شود. شکل دوبُعدی و بی‌بعُد معادلات حاکم پس از اعمال تقریب بوسینسک وحذف بالانویس ستاره (*)، در مختصات دکارتی چنین است:

$$\frac{Du}{Dt}=-\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{1}{\mathrm{Re}}(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}), \quad (2)$$

$$\frac{Dw}{Dt}=-\frac{\partial p}{\partial z}+\frac{1}{\mathrm{Re}}(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2})-Ri\theta, \quad (3)$$

$$\frac{D\theta}{Dt}=\frac{1}{\mathrm{Pr}}\cdot\frac{1}{\mathrm{Re}}(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2}), \quad (4)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial z}=0, \quad (5)$$

که $\frac{D}{Dt}$ عملگر مشتق تام می‌باشد. با استفاده از فرمول‌بندی تاوایی-تابع جریان، معادلات بالا را می‌توان به‌شکل زیر بازنوشت (تریتون، 1998؛ کاندو، 1990؛ لیو و همکاران، 2003):

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t}+J(\psi,\zeta)=\frac{1}{\mathrm{Re}}(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \zeta}{\partial z^2})+Ri\frac{\partial \theta}{\partial x}, \quad (6)$$

$$\zeta=\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}, \quad (7)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t}+J(\psi,\theta)=\frac{1}{\mathrm{Re.Pr}}(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2}), \quad (8)$$

$$\mathrm{u}=-\frac{\partial \psi}{\partial \mathrm{z}}, \mathrm{w}=\frac{\partial \psi}{\partial \mathrm{x}}, \quad (9)$$

که ζ تاوایی (Vorticity)، θ دما، ψ تابع جریان، $\mathrm{Re}=\frac{hu_b}{\nu}$ عدد رینولدز (ν ضریب گرانروی جنبش‌شناختی نام دارد)، $\mathrm{Ri}=\frac{g\alpha h\Delta\theta}{u_b^2}$ عدد ریچاردسون کُپه‌ای (Bulk) (α ضریب انبساط گرمایی و $\Delta\theta$ اختلاف دما) و $\mathrm{Pr}=\frac{\nu}{k_\theta}$ عدد پرانتل (k_θ ضریب پخش گرما) می‌باشد (ζ و θ متغیرهای پیش‌یابی و ψ یک متغیر فرایابی است). عملگر جاکوبی نیز برای دو متغیر p و q به‌شکل $J(p,q)=\frac{\partial p}{\partial z}\frac{\partial q}{\partial x}-\frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial q}{\partial z}$ تعریف می‌شود که در حل عددی با استفاده از فرمول پیشنهادی آراکاوا بر اساس پایستگی انرژی و آنستروفی محاسبه می‌شود (آراکاوا، 1966). همچنین جمله شناوری $\frac{\partial \theta}{\partial x}$، جمله تاوایی کژفشار نامیده می‌شود و نقش مهمی در نوع جریان شاره ایفا می‌کند (تریتون، 1998).

3 گسسته‌سازی معادلات حاکم

در این بخش نحوه گسسته‌سازی زمانی و مکانی معادلات حاکم تشریح می‌شود.

1-3 گسسته‌سازی زمانی معادلات حاکم

در کار حاضر برای تقریب بخش زمانی معادلات حاکم از روش رونگ-کوتا مرتبه چهارم که روشی چهارمرحله‌ای است، استفاده می‌شود. با فرض بیان معادلات حاکم به‌شکل برداری $\frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial t}=\vec{G}(\vec{\varphi})$ روابط این روش گسسته‌سازی زمانی به‌صورت زیر است (دورَن، 2010):

$$\vec{q}_1=\Delta t\vec{G}(\vec{\varphi}^n), \quad (10)$$

$$\vec{q}_2=\Delta t\vec{G}(\vec{\varphi}^n+\frac{1}{2}\vec{q}_1), \quad (11)$$

$$\vec{q}_3=\Delta t\vec{G}(\vec{\varphi}^n+\frac{1}{2}\vec{q}_2), \quad (12)$$

$$\vec{q}_4=\Delta t\vec{G}(\vec{\varphi}^n+\vec{q}_3), \quad (13)$$

$$\vec{\phi}^{\mathrm{n+1}}=\vec{\phi}^{\mathrm{n}}+\frac{1}{6}(\vec{\mathrm{q}}_1+\frac{1}{2}\vec{\mathrm{q}}_2+\frac{1}{2}\vec{\mathrm{q}}_3+\vec{\mathrm{q}}_4), \quad (14)$$

که Δt گام‌زمانی، n تراز زمانی و q با پایین‌نویس 1 تا 4 متغیرهای کمکی هستند. جزئیات بیش‌تر در این مورد در قیصری (1394) آمده است.

2-3 گسسته‌سازی مکانی معادلات حاکم

بخش مکانی معادلات حاکم در دو راستای x و z با استفاده از روش فشرده ترکیبی مرتبه ششم که روشی مرکزی و سه‌نقطه‌ای است گسسته می‌شود. روابط این روش برای تخمین مشتق اول و دوم تابع مفروض ϕ به‌شکل زیر بیان می‌شوند (چو و فن، 1998):

$$7\varphi'_{i-1}+d\varphi''_{i-1}+16\varphi'_i+7\varphi'_{i+1}-d\varphi''_{i+1}=\frac{15}{d}(\varphi_{i+1}-\varphi_{i-1}), \tag{15}$$

$$-9\phi'_{i-1}-d\phi''_{i-1}+8d\phi''_i+9\phi'_{i+1}-d\phi''_{i+1}=\frac{24}{d}(\phi_{i+1}-2\phi_i+\phi_{i-1}), \tag{16}$$

که d نشان‌دهنده فاصله شبکه‌ای در شبکه یکنواخت، i نقطه شبکه و علامت پریم نشان‌دهنده مشتق است. در نقاط مرزی با استفاده از بسط سری تیلور، روابط یک‌سویه پیش‌سو و پس‌سو متناسب با این روش به‌دست می‌آیند (چو و فن، 1998).

روابط پیش‌سو:

$$6d\varphi'_b+\frac{2}{3}d^2\varphi''_b+8d\varphi'_{b+1}-\frac{8}{3}d^2\varphi''_{b+1}=-15\varphi_b+16\varphi_{b+1}-\varphi_{b+2}, \tag{17}$$

$$14d\varphi'_b+2d^2\varphi''_b+16d\varphi'_{b+1}-4d^2\varphi''_{b+1}=-31\varphi_b+32\varphi_{b+1}-\varphi_{b+2}, \tag{18}$$

و روابط پس‌سو:

$$8d\varphi'_{b-1}+\frac{8}{3}d^2\varphi''_{b-1}+6d\varphi'_b-\frac{2}{3}d^2\varphi''_b=15\varphi_b-16\varphi_{b-1}+\varphi_{b-2}, \tag{19}$$

$$16d\varphi'_{b-1}-4d^2\varphi''_{b-1}-14d\varphi'_b+2d^2\varphi''_b=-31\varphi_b+32\varphi_{b-1}-\varphi_{b-2}, \tag{20}$$

که b بیانگر نقطه روی مرز است. حل همزمان معادلات جبری (15) تا (20) به تشکیل یک دستگاه معادلات سه‌قطری بلوکی با بلوک‌های دوعضوی منجر می‌شود، که با حل آن مشتق‌های اول و دوم به‌دست می‌آیند.

3-3 اعمال شرایط مرزی در معادلات گسسته

در کار حاضر شرط مرزی اعمال شده در حل عددی معادلات حاکم در مرز پایین و بالا حوزه محاسباتی برای تابع جریان مرز سخت ($\psi, \frac{\partial\psi}{\partial z}=0$)، دما مرز بی‌دررو ($\frac{\partial\theta}{\partial\hat{n}}=0$) و برای تاوایی مرز بدون لغزش ($u=w=0$) و در مرزهای سمت راست و چپ شرط مرزی شار صفر، ($\frac{\partial\psi}{\partial x}=0, \frac{\partial\theta}{\partial x}=0, \frac{\partial\zeta}{\partial x}=0$) است ($\hat{n}$ بیانگر بردار یکانی عمود بر مرز است). برای محاسبه کمیت‌های پیش‌یابی تاوایی و دما با توجه به شرط مرزی بدون لغزش برای تاوایی و شرط مرزی بی‌دررو برای دما روی مرزهای پایین و بالای حوزه محاسباتی به‌ترتیب از روابط زیر استفاده می‌کنیم (قادر و همکاران، 2012):

$$\zeta_{i,b}=\frac{12}{\Delta z^2}\psi_{i,b+1}-\frac{6}{\Delta z}\psi'_{i,b+1}+\psi''_{i,b+1}, \tag{21}$$

$$\theta_{i,b}=\theta_{i,b+1}-\frac{2}{3}\Delta z\theta'_{i,b+1}+\frac{1}{6}\Delta z^2\theta''_{i,b+1}, \tag{22}$$

$$\zeta_{i,b}=\frac{12}{\Delta z^2}\psi_{i,b-1}+\frac{6}{\Delta z}\psi'_{i,b-1}+\psi''_{i,b-1}, \tag{23}$$

$$\theta_{i,b}=\theta_{i,b-1}+\frac{2}{3}\Delta z\theta'_{i,b-1}+\frac{1}{6}\Delta z^2\theta''_{i,b-1}. \tag{24}$$

روابط بالا از دقت مرتبه سوم هستند اما با روابط فشرده ترکیبی مرتبه ششم برای حل عددی در داخل حوزه محاسباتی سازگاری خوبی دارند.

4 بررسی دقت

در این تحقیق به‌منظور بررسی دقت روش فشرده ترکیبی مرتبه ششم (CCD6) و مقایسه آن با دو روش مرتبه دوم مرکزی (SD2) و فشرده مرتبه چهارم (CD4) از مسئله اقیانوسی استومل که دارای حل تحلیلی است استفاده می-کنیم (استومل، 1948). اندازه خطای کلی برای هر روش با استفاده از نُرم L_2 محاسبه می‌شود و رابطه این نُرم به-صورت زیر بیان می‌شود:

$$L_2(\varphi)=\frac{\left[\sum_{i,j}(\tilde{\varphi}_{i,j}-\varphi_{i,j})^2\right]^{\frac{1}{2}}}{\left[\sum_{i,j}(\varphi_{i,j})^2\right]^{\frac{1}{2}}}, \qquad (25)$$

که $\phi_{i,j}$ مقادیر به‌دست آمده از حل تحلیلی و $\tilde{\phi}_{i,j}$ مقادیر حاصل از حل عددی می‌باشند.

جدول 1 خطای کلی با استفاده از نُرم L_2 را برای سه روش مرتبه دوم مرکزی، فشرده مرتبه چهارم و فشرده ترکیبی مرتبه ششم با تفکیک‌های مختلف در صفحه $x\text{–}y$ نشان می‌دهد. این جدول نشان می‌دهد که در همه تفکیک‌ها روش فشرده ترکیبی مرتبه ششم دقیق‌تر از دو روش دیگر عمل می‌کند. نکته قابل توجه در این جدول این است که هر چه تفکیک افزایش می‌یابد، اختلاف این روش‌ها نیز بیشتر می‌شود و روش فشرده ترکیبی مرتبه ششم خطای کمتری ایجاد می‌کند، یعنی روش فشرده ترکیبی مرتبه ششم از توانایی تفکیک بالاتری نسبت به دو روش دیگر برخوردار است.

جدول 1. خطای کلی محاسبه شده با استفاده از نُرم L_2 برای روش‌های SD2، CD4 و CCD6 در تفکیک‌های متفاوت برای مسئله استومل.

$nx \times ny$ (نقاط شبکه)	SD2	CD4	CCD6
17×11	5.98×10^{-2}	8.57×10^{-3}	6.95×10^{-3}
33×21	1.39×10^{-2}	3.01×10^{-3}	1.77×10^{-3}
65×41	3.31×10^{-3}	4.57×10^{-4}	1.65×10^{-4}
129×81	8.15×10^{-4}	4.42×10^{-5}	8.88×10^{-6}
257×161	2.03×10^{-4}	3.42×10^{-6}	3.63×10^{-7}
513×321	5.07×10^{-5}	2.38×10^{-7}	3.31×10^{-8}

5 حل عددی

در مطالعه حاضر برای بررسی دینامیک شارش گرانی به‌صورت افقی ازطریق حل عددی معادلات (6) تا (8) در صفحه $x\text{–}z$ پرداخته می‌شود. برای شبیه‌سازی این جریان همان‌طور که در بخش مقدمه بیان شد از پیکربندی شارش LE استفاده می‌شود.

برای جریان گرانی تخت شبیه‌سازی در داخل کانالی منزوی (ایزوله) با ابعاد $[0,8]\times[0,1]$ که در آن دو شاره (در شرایط اولیه) یکی در دمای بی‌بُعد 1 (سمت راست، شاره سنگین‌تر) و دیگری در دمای بی‌بُعد 1.5 (سمت چپ، شاره سبک‌تر) است، انجام می‌گیرد. این دو شاره در نقطه میانی کانال از هم جدا می‌شوند. در مورد جریان گرانی استوانه‌ای نیز شبیه‌سازی در داخل کانالی منزوی با ابعاد $[0,10]\times[0,1]$ که در داخل آن دو شاره یکی در دمای (بی‌بُعد) 1 (شاره وسط حوزه) و دیگری در دمای (بی‌بُعد) 1.5 (شاره پیرامون) است، انجام می‌گیرد. در این دو مدل شبیه‌سازی فرض براین است که شاره‌ها در حالت اولیه همگن بوده و عاری از هر گونه چینه‌بندی هستند. شرط مرزی بدون لغزش برای تاوایی و بی‌دررو برای دما در مرزهای پایین و بالای کانال مطابق روابط (21) تا (24) به‌کار گرفته می‌شود. در این شبیه‌سازی‌ها $\mathrm{Re}=5000$، $\mathrm{Ri}=4$ و $\mathrm{Pr}=1$ در نظر گرفته شده است (این عددها مقادیر متوسط‌اند نه مقادیر محلی). مقادیر محلی Ri، مثلاً در مرز بین دو شاره، می‌تواند کمتر از 0.25 که مقدار بحرانی Ri است، شده و ناپایداری از نوع کلوین-هلمهولتز ایجاد کند. با توجه به شرط پایداری عددی در انتگرال‌گیری زمانی از مقدار $\Delta t=5\times10^{-3}$ برای گام زمانی بی‌بُعد استفاده شده است.

5-1 نتایج حل عددی برای جریان گرانی تخت

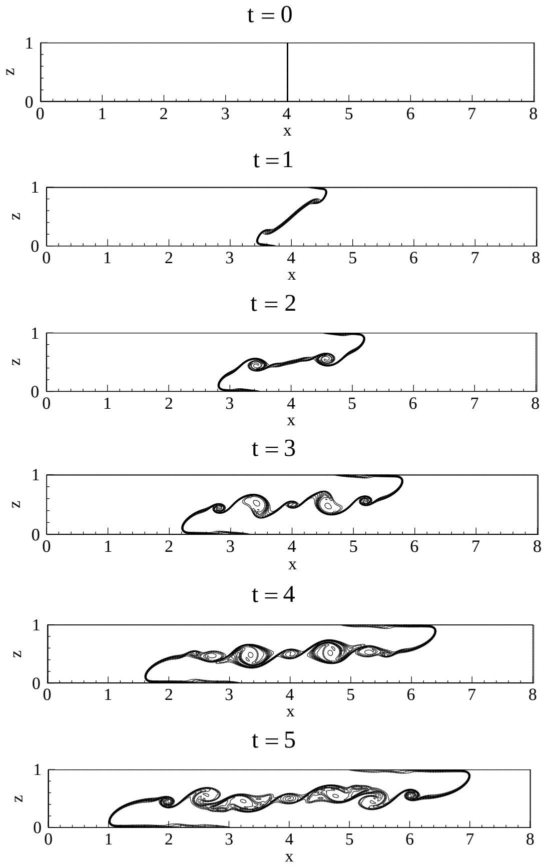
در این قسمت نتایج حاصل از حل عددی جریان گرانی تخت به‌عنوان اولین آزمون موردی بیان می‌شود. شبیه‌سازی عددی در شبکه‌هایی با تفکیک‌های مختلف انجام شده و در اینجا نتایج برای برخی تفکیک‌ها ارائه می‌شود.

شکل 1 تحول زمانی میدان دما را برای آزمون موردی جریان گرانی تخت از زمان بی‌بُعد $t=0$ تا $t=5$ برای تفکیک $\mathrm{nx}\times\mathrm{nz}=769\times97$ نشان می‌هد. در $t=0$

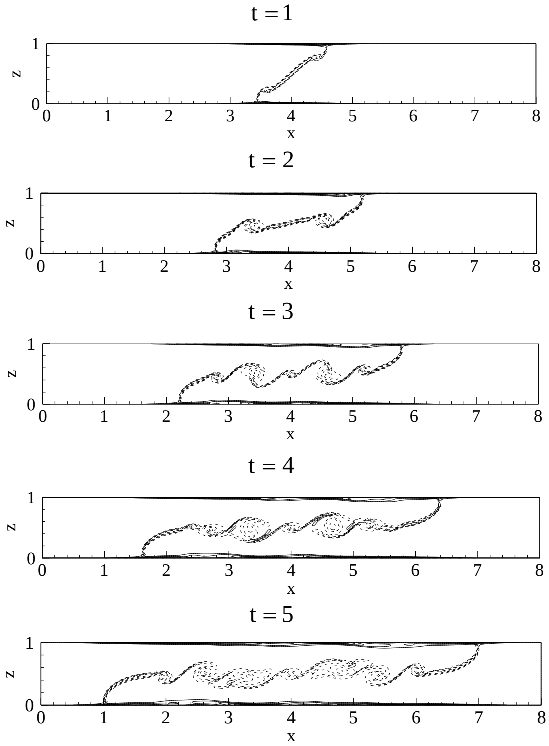
دو شاره در حالت سکون قرار دارند و پس از آن تبادل شاره بین دو طرف کانال توسط نیروی گرانی آغاز می‌گردد یعنی دو جریان گرانی مخالف هم شکل می‌گیرند. این دو جریان با یک سطح مشترک که شامل یک ورقه تاوه است از هم جدا می‌شوند و این ورقه تاوه شامل ناپایداری کلوین هلمهولتز (Kelvin–Helmholtz) می‌باشد (سیمپسون، 1986). در شکل 1 مراحل درون‌آمیزی دو شاره در اثر این ناپایداری به‌طور کیفی ملاحظه می‌شود. با گذشت زمان نه‌تنها اندازه تاوه‌های کلوین هلمهولتز بزرگ‌تر بلکه تعداد آنها نیز بیشتر و میدان دما پیچیده‌تر می‌شود. در این شکل پربندهای دما در بازه [1.05,1.45] قرار دارند و فاصله بین دو پربند متوالی 0.05 می‌باشد. در شکل 1 در قسمت نوک جریان گرانی در مرزهای پایین و بالای کانال قسمتی از جریان به‌نام دماغه مشاهده می‌شود که از دیواره‌های کانال مقدار کمی فاصله دارد. ایجاد چنین شکلی از جریان در مرزها ناشی از شرط مرزی بی‌دررو و بدون لغزش می‌باشد.

شکل 2 تحول زمانی میدان تاوایی را برای آزمون موردی جریان گرانی تخت از زمان بی‌بُعد $t=1$ تا $t=5$ با تفکیک $nx \times nz = 769 \times 97$ نشان می‌دهد که در آن در سطح مشترک دو شاره تاوایی منفی و در مرزهای بدون لغزش تاوایی مثبت است. در این شکل پربندها در بازه [25,90−] نشان داده شده‌اند و فاصله بین دو پربند متوالی 5 و بیشینه تاوایی در سطح مشترک برابر با 28.85− و در مرزها برابر با 56.94+ است. حاکم شدن شرایط کژفشاری در سطح مشترک دو شاره عامل ایجاد ناپایداری کلوین–هلمهولتز در این ناحیه و ایجاد گردش پادساعتگرد و تاوایی منفی است. در مرزها نیز وجود شرایط فشارورد و اثر شرط مرزی بدون لغزش باعث ایجاد گردش ساعتگرد و تاوایی مثبت می‌شود (تریتون، 1998؛ هارتل و همکاران، 2000؛ کانترو و همکاران، 2007). در ضمن قابل توجه است که عدد ریچاردسون گرادیانی در مرز می‌تواند بحرانی شود (بیدختی و همکاران، 1386).

شکل 3 تحول زمانی تابع جریان را برای آزمون موردی گرانی تخت از زمان بی‌بُعد $t=1$ تا $t=5$ با اختلاف زمان یک واحد و تفکیک $nx \times nz = 769 \times 97$ نشان می‌دهد. پربندها در بازه [0.1,0.3] نشان داده شده‌اند و فاصله بین دو پربند متوالی برابر با 0.025 و مقدار بیشینه جریان برابر با 0.38 است. میدان‌های شبیه‌سازی شده در جریان گرانی تخت برحسب زمان پیچیده می‌شوند اما خاصیت تقارن جریان حفظ می‌شود. تقارن در این میدان‌ها در اصل ناشی از تقارن موجود در شرایط اولیه و شرایط مرزی است که به‌وسیله معادلات بوسینسک حاکم حفظ می‌شود.



شکل 1. تحول زمانی میدان دما برای آزمون موردی جریان گرانی تخت از زمان $t=0$ تا $t=5$ با تفکیک $nx \times nz = 769 \times 97$ و فاصله بین دو پربند متوالی 0.05 است.

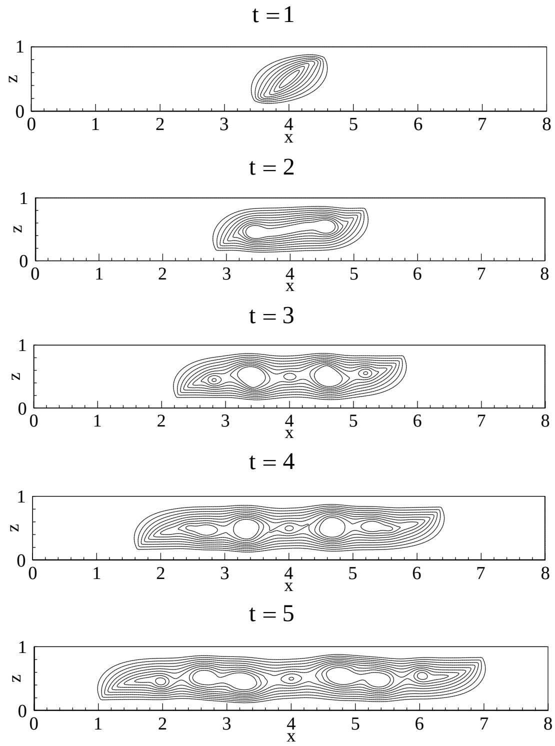


شکل 2. تحول زمانی میدان تاوایی برای آزمون موردی جریان گرانی تخت از زمان $t=1$ تا $t=5$ با تفکیک $\mathrm{nx}\times\mathrm{nz}=769\times97$، پربندها در بازه $[-25{,}90]$ نشان داده شده‌اند و فاصله بین دو پربند متوالی 5 است (نقطه‌چین تاوایی منفی و خط پُر تاوایی مثبت).

2-5 نتایج حل عددی برای جریان گرانی استوانه‌ای

در این بخش به بررسی نتایج به‌دست آمده از حل عددی جریان گرانی استوانه‌ای به‌عنوان دومین آزمون موردی پرداخته می‌شود. نتایج حل عددی این جریان در شبکه‌ای با تفکیک $\mathrm{nx}\times\mathrm{nz}=961\times97$ ارائه می‌شود. در شرایط اولیه شاره سنگین (شاره با دمای بی‌بُعد 1) در وسط حوزه و شاره سبک (شاره با دمای بی‌بُعد 5/1) در پیرامون آن قرار دارد. این دو شاره در نقاط $x=4$ و $x=6$ به‌کمک دو تیغه از هم جدا می‌شوند.

شکل 4 تحول زمانی میدان دما را برای آزمون موردی جریان گرانی استوانه‌ای از زمان بی‌بُعد $t=0$ تا $t=6$ با اختلاف زمانی یک واحد نشان می‌دهد. پربندها در بازه $[1.05{,}1.45]$ قرار دارند و فاصله بین دو پربند متوالی 0.05 است. در این شکل در زمان $t=0$ دو شاره در حال سکون قرار دارند. بعد از برداشته شدن تیغه‌ها، دو جریان از شاره سنگین با جهت‌های مخالف شکل می‌گیرد که در قالب دو جبهه نفوذی متقارن به داخل شاره سبک‌تر حرکت می‌کند. در این حالت نیز شاهد شکل‌گیری و گسترش تاوه‌های کلوین–هلمهولتز به‌شکل یک مُد متقارن هستیم.



شکل 3. تحول زمانی تابع جریان برای آزمون موردی گرانی تخت از زمان $t=1$ تا $t=5$ با تفکیک $\mathrm{nx}\times\mathrm{nz}=769\times97$، پربندها در بازه $[0.1{,}0.3]$ نشان داده شده‌اند و فاصله بین دو پربند متوالی 0.025 است.

در مرز پایینی حوزه محاسباتی اثر شرط مرزی بدون لغزش به‌شکل ناحیه‌ای چینه‌بندی شده ناپایدار دیده می‌شود. درواقع در این ناحیه شاره سبک‌تر در زیر شاره سنگین قرار گرفته و باعث ایجاد ناپایداری می‌شود.

در تحقیق حاضر به‌علت انتخاب عدد رینولدز بالا، اثر گرانروی جریان ناچیز است. تحت این شرایط، جریانی که از رها شدن حجم ثابتی از یک شاره به‌وجود می‌آید

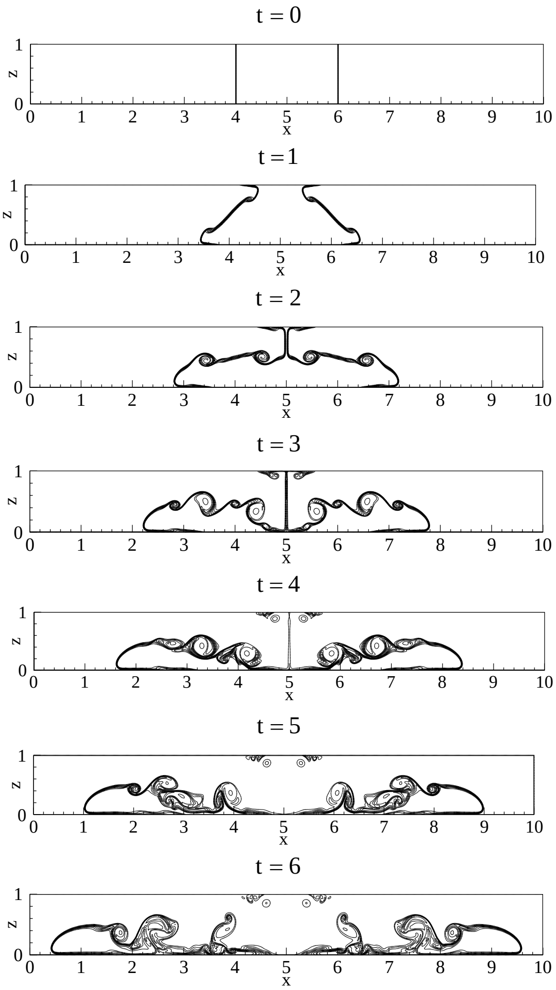
سه مرحله متفاوت را سپری می‌کند. بعد از رها شدن شاره سنگین، در آغاز جریان در مرحله ریزشی شتاب می‌گیرد و سپس شتاب آن صفر می‌شود که از مشخصه‌های دینامیکی آن ثابت بودن سرعت جبهه جریان است (هوپرت و سیمپسون، 1980). سپس جریان به مرحله لَختی خویش‌همسان (self similar) می‌رسد و در ادامه این مرحله سرعت جبهه با آهنگ مشخصی کُند می‌شود. مرحله لَختی خویش‌همسان تا هنگامی‌که اثرات گرانروی بر جریان حاکم می‌شود ادامه می‌یابد که در پایان جریان به مرحله گرانروی می‌رسد.

اگر موقعیت جبهه را با x_{F} نشان دهیم سرعت جبهه از رابطه $u_{\mathrm{F}} = \frac{\mathrm{d}x_{\mathrm{F}}}{\mathrm{dt}}$ به‌دست می‌آید.

در تحقیق حاضر سرعت جریان گرانی استوانه‌ای تا زمان بی‌بُعد $t = 6$، ثابت و برابر با مقدار بی‌بُعد 0.60 است که با نتیجه کارهای هوپرت و سیمپسون (1980) و قادر و همکاران (2012) توافق دارد.

شکل 5 تحول زمانی میدان تاوایی بی‌بُعد را برای آزمون موردی جریان گرانی استوانه‌ای از زمان بی‌بُعد $t = 1$ تا $t = 6$ نشان می‌دهد. در این شکل پربندها در بازه [−100,+100] بوده و فاصله بین دو پربند متوالی 5 است.

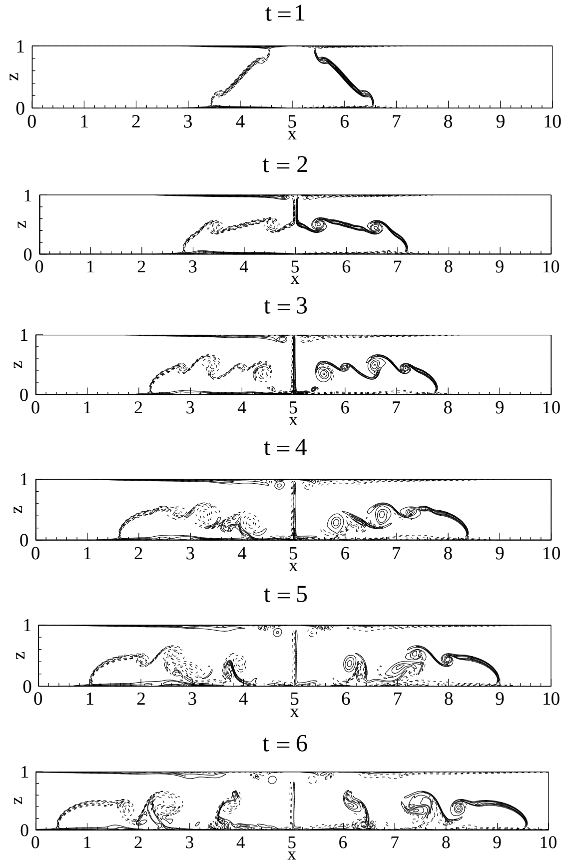
در این حالت مشاهده می‌شود در شرایط اولیه که یک شاره سنگین در میانه یک شاره سبک در حالت سکون واقع شده است، پس از رها شدن شاره سنگین در دو سوی مخالف به داخل شاره سبک جریان می‌یابد. در نیمه سمت راست کانال، شاره سبک سمت راست و شاره سنگین سمت چپ قرار دارد. در سطح مشترک این ناحیه، بردار گرادیان دما مثبت و علامت جمله شناوری مثبت شده و تاوایی مثبت را به‌وجود آورده است. در نیمه سمت راست کانال برعکس، شاره سنگین در سمت چپ و شاره سبک در سمت راست واقع شده یعنی در این ناحیه گرادیان دما و در نتیجه علامت جمله شناوری منفی است، بنابراین در سطح مشترک تاوایی منفی ایجاد می‌شود. در این شرایط بیشینه تاوایی مثبت 119.88+ و بیشینه تاوایی منفی 119.75− می‌باشد.



شکل 4. تحول زمانی میدان دما برای آزمون موردی گرانی استوانه‌ای از زمان $t = 0$ تا $t = 6$ با تفکیک $\mathrm{nx} \times \mathrm{nz} = 961 \times 97$، پربندها در بازه [1.05,1.45] نشان داده شده‌اند و فاصله بین دو پربند متوالی 0.05 است.

شکل 6 تحول زمانی تابع جریان را برای آزمون موردی گرانی استوانه‌ای از زمان بی‌بُعد $t = 1$ تا $t = 6$ با اختلاف زمان یک واحد نشان می‌دهد. پربندها در بازه [−0.3,0.3] نشان داده شده‌اند و فاصله بین دو پربند

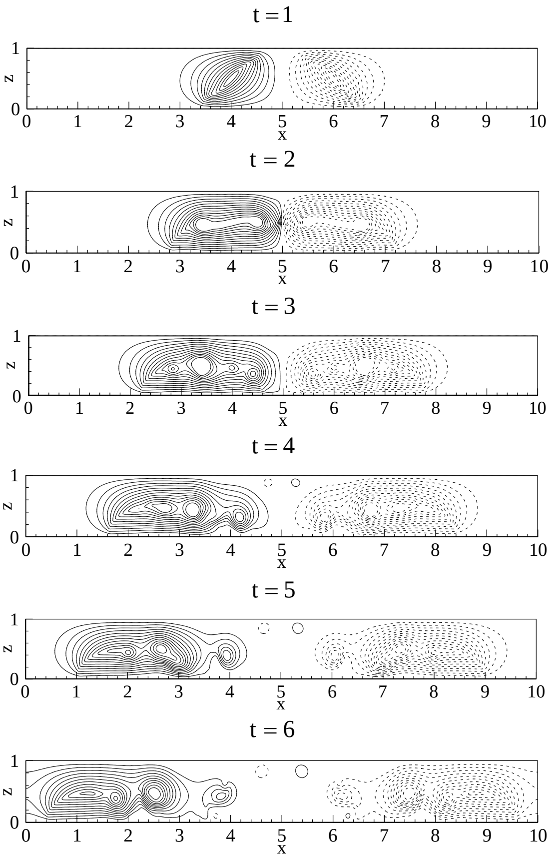
متوالی برابر با 0.025 و مقدار بیشینه تابع جریان مثبت و منفی به‌ترتیب برابر با 0.28+ و 0.28− است. تقارن موجود در شرایط اولیه برای جریان گرانی استوانه‌ای سبب شده است که میدان‌های دما، تاوایی و تابع جریان در دو طرف کانال تصویر آینه‌ای یکدیگر باشند.



شکل 5. تحول زمانی میدان تاوایی برای جریان گرانی استوانه‌ای از زمان $t=1$ تا $t=6$ با تفکیک $nx \times nz = 961 \times 97$، پربندها در بازه $[-100,100]$ نشان داده شده‌اند و فاصله بین دو پربند متوالی 5 است (نقطه‌چین تاوایی منفی و خط پُر تاوایی مثبت).

3-5 اعتبارسنجی

در این بخش از کار حاضر نتایج حاصل از شبیه‌سازی آزمون موردی جریان گرانی تخت با استفاده از روش فشرده ترکیبی مرتبه ششم با دو روش دیگر، مرتبه دوم مرکزی و فشرده مرتبه چهارم و نیز برای اعتبارسنجی پژوهش حاضر با کار لیو و همکاران (2003) به‌شکل کیفی مقایسه می‌شود. شکل 7 میدان دما را در زمان $t=4$ برای سه روش مرتبه دوم مرکزی، فشرده مرتبه چهارم، فشرده ترکیبی مرتبه ششم و روش لیو و همکاران (2003) نشان می‌دهد. در این شکل برای سه روش اول، تفکیک 769×97 و برای روش لیو و همکاران (2003)، تفکیک 2049×257 است. مقایسه کیفی شکل‌ها نشان می‌دهد که روش مرتبه دوم مرکزی فقط تعداد تاوه‌ها را درست تشخیص داده است اما در شبیه‌سازی جزئیات تاوه‌ها و نوک جریان ضعیف عمل می‌کند. جزئیات تاوه‌ها و نوک جریان در روش فشرده مرتبه چهارم نسبت به روش مرتبه دوم مرکزی دقیق‌تر شبیه‌سازی شده است، اما روش فشرده ترکیبی مرتبه ششم علاوه براینکه در جزئیات



شکل 6. تحول زمانی تابع جریان برای جریان گرانی استوانه‌ای از زمان $t=1$ تا $t=6$ با تفکیک $nx \times nz = 961 \times 97$، پربندها در بازه $[-0.3,+0.3]$ نشان داده شده‌اند و فاصله بین دو پربند متوالی 0.025 است (نقطه‌چین جریان منفی و خط پُر جریان مثبت).

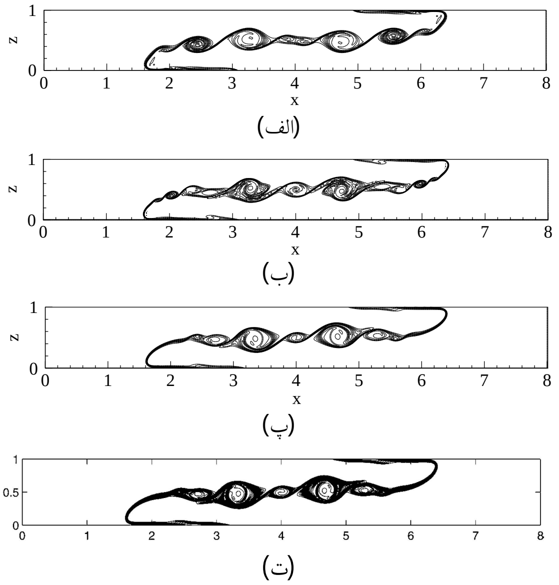
خیلی دقیق‌تر عمل کرده است نسبت به دو روش دیگر دارای نوفه کمتر و به‌شکل کیفی نتایج آن با نتایج لیو و همکاران (2003) قابل مقایسه است.

جدول 2 مقادیر کمینه و بیشینه پربندهای دما را در سه روش SD2، CD4 و CCD6 در زمان $t = 5$ در شبکه‌ای با تفکیک 769×97 نشان می‌دهد. با توجه به شرایط اولیه برای دما که نشان می‌دهد کمینه و بیشینه دما در بازه $[1.00,1.50]$ قرار دارد، مقایسه کمینه و بیشینه دما در سه روش بیانگر این‌است که روش فشرده ترکیبی مرتبه ششم نسبت به دو روش دیگر مناسب‌تر عمل می‌کند و به خوبی توانسته مقادیر فرین دما را با دقت بهتری شبیه‌سازی کند.

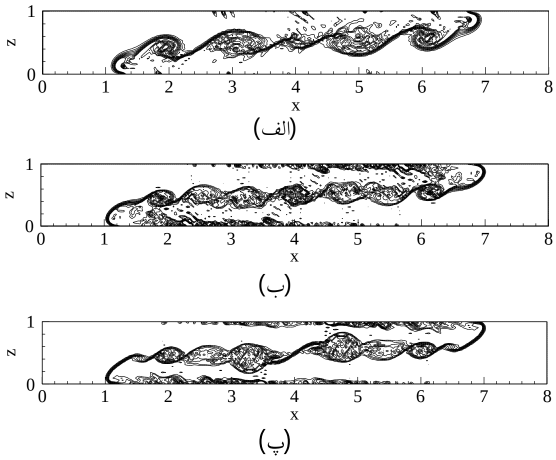
جدول 2. مقادیر کمینه و بیشینه دمای شبیه‌سازی شده به‌کمک سه روش SD2، CD4 و CCD6 در زمان $t = 5$.

روش گسسته‌سازی	بیشینه	کمینه
SD2	1.77	0.72
CD4	1.61	0.88
CCD6	1.51	0.98

شبیه‌سازی با تعداد نقاط شبکه کم (تفکیک درشت) شیوه دیگری است که با استفاده از آن می‌توان عملکرد روش‌های حل عددی را مورد آزمایش قرار داد. شکل 8 میدان دمای آزمون موردی جریان گرانی تخت را با به‌کارگیری شرط مرزی بدون لغزش در زمان بی‌بُعد $t = 5$ برای تفکیک $\mathrm{nx} \times \mathrm{nz} = 257 \times 33$ با استفاده از سه روش SD2، CD4 و CCD6 نشان می‌دهد. شکل 8-الف نشان می‌دهد که روش SD2 نه‌تنها از تشخیص مرزهای بدون لغزش ناتوان است، بلکه تعداد تاوه‌ها را هم نمی‌تواند درست شناسایی کند. شکل 8-ب بیانگر این است که روش CD4 هم تعداد تاوه‌ها را درست تشخیص می‌دهد و هم مرزها را درست شناسایی می‌کند ولی ناپایداری‌های کلوین–هلمهولتز سطح مشترک جریان به‌درستی شبیه‌سازی نشده است و به‌علاوه نوفه زیادی ایجاد کرده است. شکل 8-پ به‌طور کیفی نشان می‌دهد که روش CCD6 در مقایسه با دو روش دیگر دقیق‌تر است، نوفه زیاد در این حالت وجود ندارد و نیز در شبیه‌سازی ناپایداری‌های کلوین هلمهولتز سطح مشترک جریان بهتر از روش CD4 عمل می‌کند.



شکل 7 مقایسه نتایج حاصل از شبیه‌سازی عددی میدان دما برای آزمون موردی جریان گرانی تخت در زمان $t = 4$، (الف) روش SD2، (ب) روش CD4، (پ) روش CCD6 و (ت) لیو و همکاران (2003).



شکل 8 مقایسه نتایج حاصل از شبیه‌سازی عددی میدان دمای جریان گرانی تخت با به‌کارگیری شرط مرزی بدون لغزش در زمان $t = 5$ و برای تفکیک $\mathrm{nx} \times \mathrm{nz} = 257 \times 33$ (فاصله بین دو پربند متوالی 0.05). (الف) روش SD2، (ب) روش CD4، (پ) روش CCD6.

مقایسه بین شکل‌های 7 و 8 نشان می‌دهد که در تفکیک $nx \times nz = 257 \times 33$ حل عددی برای هر سه روش هنوز همگرا نشده است در صورتی‌که در تفکیک $nx \times nz = 769 \times 97$ در مقایسه با کار لیو و همکاران که با تفکیک $nx \times nz = 2049 \times 257$ انجام شده، حل عددی همگرا شده است.

6 نتیجه‌گیری

در کار حاضر، به بررسی عملکرد به‌کارگیری روش فشرده ترکیبی مرتبه ششم در نحوه افزایش دقت برای مسئله اقیانوسی استومل و مسئله موردی جریان گرانی دوبُعدی در قالب شارش گرانی LE پرداخته شد.

دقت یا خطای کلی محاسبه شده با استفاده از نُرم L_2 برای روش‌های فشرده ترکیبی مرتبه ششم، فشرده مرتبه چهارم و مرتبه دوم مرکزی برای مُدل گردش اقیانوسی استومل در تفکیک‌های مختلف نشان داد که در تمام تفکیک‌ها عملکرد روش فشرده ترکیبی مرتبه ششم از دو روش دیگر بهتر است. همچنین خطای این روش حداقل یک مرتبه کوچک‌تر از روش فشرده مرتبه چهارم است. نکته مهم در نتایج حل عددی مسئله مذکور این است که هر چه تفکیک بیشتر می‌شود، اختلاف در اندازه خطای این روش‌ها نیز افزایش می‌یابد و این بدین معنی می‌باشد که روش فشرده ترکیبی مرتبه ششم از توانایی تفکیک بالاتری برخوردار است.

نتایج به‌دست آمده از شبیه‌سازی عددی میدان‌های پیچیده دما، تاوایی و تابع جریان مربوط به جریان گرانی در قالب شارش LE برای جریان‌های گرانی تخت و استوانه‌ای با عدد رینولدز بالا حاکی از این است که روش فشرده ترکیبی مرتبه ششم از توانایی مناسبی برای شبیه‌سازی عددی شارش مورد مطالعه برخوردار است. مقایسه کیفی کاربست روش فشرده ترکیبی مرتبه ششم با روش‌های مرتبه دوم مرکزی و فشرده مرتبه چهارم در شبیه‌سازی میدان‌های دما و تاوایی و تابع جریان در دو شارش مورد مطالعه نشان داد که روش فشرده ترکیبی مرتبه ششم نسبت به روش‌های مرتبه دوم مرکزی و فشرده مرتبه چهارم دقیق‌تر عمل می‌کند. شبیه‌سازی این میدان‌ها با استفاده از روش مرتبه دوم مرکزی با نوفه زیادی همراه است. روش فشرده مرتبه چهارم به‌نسبت بهتر عمل می‌کند در حالی‌که روش فشرده ترکیبی مرتبه ششم جزئیات تاوه‌ها را نسبت به روش فشرده مرتبه چهارم دقیق‌تر شبیه‌سازی کرده است. به‌علاوه عملکرد این روش به‌طور کمّی در شبیه‌سازی مقادیر فرین دما و تاوایی و شبیه‌سازی بخش‌های نوک و دماغه جریان در مقایسه با کار لیو و همکاران (2003) قابل توجه است.

تشکر و قدردانی

نویسندگان بدین وسیله مراتب تشکر و قدردانی خود را از دانشگاه تهران به‌واسطه حمایت از این کار پژوهشی به‌عمل می‌آورند.

منابع

بیدختی، ع. ع.، بیوک، ن.، و ثقفی، م. ع.، 1384، بررسی ساختار چند جریان جستناک توفان‌های همرفتی تهران با استفاده از داده‌های سودار: مجله فیزیک زمین و فضا، **30** (2)، 93-113.

بیدختی، ع. ع.، مالکی فرد، ف.، و خوش‌سیما، م.، 1386، بررسی تجربی اختلاط تلاطمی نزدیک یک مرز چگال: مجله فیزیک زمین و فضا، **33** (3)، 87-97.

قادر، س.، قاسمی ورنامخواستی، ا.، بنازاده ماهانی، م. ر.، و منصوری، د.، 1390، حل عددی معادلات بوسینسک تراکم‌ناپذیر با استفاده از روش فشرده مرتبه چهارم: بررسی موردی شارش گرانی تبادلی: مجله فیزیک زمین و فضا، **37** (1)، 1-17.

قیصری، ا.، 1394، شبیه‌سازی عددی جریان گرانی با استفاده از روش فشرده ترکیبی مرتبه ششم: پایان‌نامه کارشناسی ارشد در رشته هواشناسی، مؤسسه ژئوفیزیک دانشگاه تهران.

Arakawa, A., 1966, Computational design for long-term numerical integration of the equations of fluid motion: Two dimensional incompressible flwo: J. Comput. Phys., **1,** 119–143.

Benjamin, T. B., 1968, Gravity currents and related phenomena: J. Fluid Mech., **31**, 209–248.

Cantero, M. I., Balanchandar, S. and Garcia, M. H., 2007, High resolution simulations of cylindrical density currents: J. Fluid. Mech., **590**, 437–469.

Chu, P. C., and Fan, C., 1998, A three-point combined compact difference scheme: J. Coumput. Phys., **140,** 370–399.

Durran, D. R., 2010, Numerical Methods for Fluid Dynamics: Sprringer-verlag, New York.

Elias, N. R., Paulo, L. B., Paraizo and Alvaro, L. G. A. Coutinho, 2008, Stabilized edge-based finite element computation of gravity currents in lock-exchange configurations: Int. J. Numer. Meth. Fluids, **57**, 1137–1152.

Fannelop, T. K., 1994, Fluid Mechanics for Industrial Safety and Environmental Protection: Elsevier.

Fox, L. and Goodwin, E. T., 1949, Some new method for the numerical integration of ordinary differential equations: Proc. Cambridge Phil. Soc. Math. Phys., **45**, 373–388.

Ghader, S., Ghasemi, A., Banazadeh, M. R., and Mansoury, D., 2012, High-order compact scheme for Boussinesq equations: Implementation and numerical boundary condition issue: Int. J. Numer. Meth. Fluids, **69,** 590–605.

Hartel, C., Meiburg, E., Necker, F., 2000, Analysis and direct numerical simulation of the flow at a gravity-current head. Part 1: flow topology and front speed for slip and no-slip boundaries: J. Fluid Mech., **418**, 189–212.

Hirsh, R. S., 1975, Higher order accurate difference solutions of fluid mechanics problems by a compact differencing technique: J. Comput. Phys., **19**, 90–109.

Hoult, D., 1972, Oil spreading in the sea: Annu. Rev. Fluid Mech., **4**, 341–368.

Huppert, H., and Simpson J. E., 1980, The slumping of gravity currents: J. Fluid Mech., **99**, 785–799.

Kreiss, H. O., and Oliger, J., 1972, Comparsion of accurate methods for the integration of hyperbolic quations: Tellus, **24**, 199–215.

Kundu, P. K., 1990, Fluid Mechanics: Academic Press.

Lele, S., 1992, Compact finite difference schemes spectral-like resolution: J. Comput. Phys., **103**, 16–42.

Liu, J. G., Wang, C., and Johnston, H., 2003, A fourth order scheme for incompressible Boussinesq equations: J. Sci. Comp., **18,** 253–285.

Numerov, B. V., 1924, A method of extrapolation of perturbations: Roy. Astron. Soc. Mon. Notice, **84**, 592–601.

Ooi, K. S., Constantinescu, G., and Larry, J. W., 2007, 2D large-eddy simulation of lock-exchange gravity current flows at high Grashof numbers: J. Hyd. Eng., **133**, 1037–1047.

Shin, J. O., and Dalziel, S. B., and Linden, P. F., 2004, Gravity currents produced by lock exchange: J. Fliud Mech., **521,** 1–34.

Simpson, J. E., 1997, Gravity Currents: in the Environment and the Laboratory: 2nd Edn. Cambridge University press.

Simpson, J. E., 1986, Mixing at the front of a gravity current: Acta Mechanica.,**63,** 245–253.

Stommel, H., 1948, The westward intensification of wind drive ocean currents: Trans. Americ. Geophys. Un., **29,** 202–1948.

Tritton, D. J., 1998, Physical Fluid Dynamics: Oxford university press.

Weinan, E. and Liu, J. G., 1996, Essentially compact schemes for unsteady viscous incompressible flows: J. Comput. Phys., **126**, 122–138.

Wood, I. R., 1970, A lock exchange flow: J. Fluid Mech., **42**, 671–787.