# تغییر انحنا، کمیتی ناوردا به‌منظور بررسی تغییرِشکل ارتفاعی شبکه‌های کنترل ژئودزی، تحقیق موردی: بررسی فرونشست خراسان با استفاده از مشاهدات ترازیابی دقیق

معصومه آمیغ‌پی[۱]، بهزاد وثوقی[۲*] و سیاوش عربی[۳]

[۱] دانشجوی دکتری ژئودزی، دانشکده مهندسی نقشه‌برداری، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، تهران، ایران
[۲] دانشیار، دانشکده مهندسی نقشه‌برداری، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، تهران، ایران
[۳] رئیس اداره ترازیابی دقیق، سازمان نقشه‌برداری کشور، تهران، ایران

(تاریخ دریافت: ۱۳۸۸/۸/۲۰، تاریخ پذیرش: ۱۳۸۹/۱۲/۲۴، دسترسی برخط: ۱۳۹۰/۳/۲۵)

**چکیده**

استخراج کمیت‌هایی مستقل از دیتوم در بررسی تغییرِشکل در شبکه‌های کنترل ژئودزی، نقش موثری در تفسیر صحیح نتایج و بررسی‌های گوناگون ژئو دینامیکی خواهند داشت. در این تحقیق رفتار تغییرِشکل ارتفاعی منطقه خراسان، که در مناطق مشهد، نیشابور و کاشمر دچار فرونشست‌های قابلِ‌توجهی است، با محاسبه کمیت‌های ناوردای تانسور تغییر انحنا نسبت به دو دیتوم متفاوت، مورد بررسی قرار گرفت. نتایج به‌دست آمده از هر دو دیتوم، نشانگر بیشینه تغییر انحنای میانگین $2\times10^{-9}$ و بیشینه تغییر انحنای گاوسی $5\times10^{-15}$ و بیانگر نرخ زیاد فرونشست منطقه است. این نتایج نشان‌دهنده مناسب بودن جایگزینی روش‌های دیگر سرشکنی مشاهدات ژئودتیکی مربوط به بررسی تغییرِشکل، با کمیت‌های ناوردای استخراج شده از تانسور تغییر انحنا، مخصوصا در مناطقی که با مشکل تثبیت دیتوم مواجه‌اند، است. براین اساس به معیارهای ناوردای مناسبی برای بررسی نحوه تغییرِشکل ارتفاعی پوسته زمین و گستره مکانی آن، با استفاده از مشاهدات ژئودتیکی دست یافتیم.

**واژه‌های کلیدی**: دیتوم، شبکه‌های کنترل ژئودزی، ناوردا، فرونشست

# The change of curvature as an invariant measure for studying height deformation in geodetic control networks

Masoome Amighpey[1], Behzad Voosoghi[1*], and Siyavash Arabi[2]

[1]*Faculty of Geodesy and Geomatics Engineering, K. N. Toosi University of Technology, Tehran, Iran*
[2]*National Cartographic Center of Iran, Tehran, Iran*

(Received: 11 November 2009, accepted: 15 March 2011, available online: 15 June 2011)

**Summary**

One of the existing problems in geodetic control networks for computing displacement vectors is finding a fixed station which has no deformation within the observation

*Corresponding author: vosoghi@kntu.ac.ir *نگارنده رابط:

interval. This problem comes from the datum-dependency characteristic of the displacement vector. Accordingly, extraction of invariant parameters of the deformation tensor in geodetic control networks which are independent from datum has an effective role in the accurate interpretation of results in geodynamic studies. In height networks, change of the curvature tensor and its associated invariants have been introduced for assessing vertical deformation. The summation and difference of elongation of change of the curvature tensor are two common invariants of this tensor. Additionally, changes of the Gaussian and mean curvature parameters are two other key invariants with physical interpretations that are used to describe deformation behavior.

Although many methods have been proposed to calculate deformation tensor fields on the earth's surface, few refer to the actual surface of the Earth. Most of these methods formulate the problem on reference surfaces such as projection planes or spheres and, consequently, their results suffer from possible effects of inaccuracy and incompleteness of the mathematical models of projections. In the present study, we used a method of differential geometry that allows deformation analysis of the actual surface of the Earth for a more reliable and accurate estimate of the surface deformation measures. The method takes advantage of the simplicity of 2-dimensional spaces versus 3-dimensional spaces without losing or neglecting information and effect of the third dimension in the final results.

Khorasan is a large province in the northeast of Iran where over-extraction of water resources for industrial and agricultural purposes has caused an extensive subsidence in some cities such as Mashhad, Neyshabour and Kashmar. Since the employment of first-order precise leveling network of Iran, which has been utilized twice for over two centuries in these cities, precise leveling has been one of the observations methods for measuring the subsidence. On the other hand, GPS and InSAR observations in these areas revealed the extent and magnitude of the subsidence. In this paper, we estimated the invariant parameters of the tensor of curvature using precise leveling observation to study the height deformation behavior of the province of Khorasan in these subsidence areas.

We computed the invariant parameters of change of curvature tensor relative to two distinct datums to evaluate their datum-independency characteristic as well as studying subsidence behavior. Obtained results relative to 2 datums show the unique value and pattern for each parameter and reveal the subsidence area. The computed maximum mean curvature change was approximately $2\times10^{-9}$, and the maximum Gaussian curvature change was approximately $5\times10^{-15}$, which confirms the high rate of subsidence in this area. This application reveals the capabilities and strengths of the proposed method and suggests the superseding of these invariant parameters with other geodetic network adjustment results, especially in areas in which a fixed datum is undefined.

**Key words:** Datum, geodetic control networks, invariant, subsidence

## ۱ مقدمه

بسیاری از مسائل شبکه‌های کنترل ژئودزی که به‌منظور بررسی تغییرِشکل پوسته زمین ایجاد می‌شوند، با مشکل نقص دیتوم و مشخص نبودن نقطه ثابت که خارج از منطقه تغییرِشکل است، مواجه‌اند. این مسئله در شبکه‌های ترازیابی که به‌منظور بررسی تغییرِشکل ارتفاعی منطقه از آنها استفاده می‌شود، نیز مطرح است. به‌ویژه در مناطقی که به‌منظور بررسی‌های ژئودینامیکی، با سرعت تغییرات کوچک، از این شبکه‌ها استفاده می‌شود، لزوم دستیابی به دیتوم ثابت امری کلیدی محسوب می‌شود.

یک راهکار متداول برای تثبیت دیتوم در این مسائل، مقایسه مشاهدات دو اپک و تثبیت دیتوم در منطقه‌ای

است که مشاهدات دو اپک تقریبا ثابت مانده‌اند. برای مثال، در یک شبکه ترازیابی دارای ۲ سری مشاهده، با مقایسه مشاهدات اختلاف ارتفاع در دو اپک، نقطه ثابت یعنی جایی که مشاهدات اختلاف ارتفاع آن نقطه به نقاط اطرافش تقریبا ثابت مانده است، انتخاب می‌شود. اما در عمل، این راهکار با مشکلاتی مواجه می‌شود، برای مثال وقتی کل منطقه طی فرایندی با سرعت یکنواخت دچار تغییرِشکل ارتفاعی شده باشد، مسلماً تغییرات نسبی ارتفاعی نقاط نسبت به هم، یعنی مشاهدات اختلاف ارتفاع، ثابت مانده اما کل منطقه دچار تغییرِشکل شده است و انتخاب این منطقه درحکم منطقه ثابت ارتفاعی، ما را در تفسیر تغییرات ارتفاعی منطقه دچار مشکل خواهد کرد (آمیغ‌پی و همکاران، ۱۳۸۵).

راهکار دیگر به‌منظور تثبیت دیتوم در شبکه‌های ژئودزی محلی، استفاده از سرشکنی آزاد است که در عمل به‌صورت گسترده‌ای مورد استفاده قرار می‌گیرد. فرض اولیه این روش ثابت ماندن موقعیت مرکز گرانی شبکه است که می‌باید توجیه منطقی برای آن وجود داشته باشد. نبود اطمینان از تحقق این فرض در بررسی‌های حرکات ژئودینامیکی مناطقی که اطلاع دقیقی از نحوه رفتار آنها موجود نیست، استفاده از این روش را محدود می‌سازد.

مشکلات موجود در روش‌های گوناگون تثبیت دیتوم، ما را به سمت جایگزینی روش‌های متداول بررسی تغییرِشکل(که از راه محاسبه تغییر موقعیت نقاط که کمیتی وابسته به دیتوم است، به بررسی تغییرِشکل منطقه می‌پردازد)، با کمیت‌های ناوردایی که مستقل از دیتوم باشند، هدایت می‌کند. در نظریهٔ مکانیک محیط‌های پیوسته، مقایسه کمیت‌های ناوردای استخراج شده از تانسورهای اساسی نوع اول ودوم، روشی متداول برای بررسی تغییرِشکل جسم است (پیتراسکیویس، ۱۹۷۷؛ ارنست، ۱۹۸۱). برای نمونه،گرافارند و وثوقی (۲۰۰۳) با تحقیق در کمیت‌های ناوردای تانسور اساسی نوع اول (تانسور متریک) و تانسور اساسی نوع دوم (تانسور انحنا)، به بررسی کمیت‌هایی همچون تغییر انحنا، برای شناخت تغییرِشکل سطحی زمین در منطقه اروپا و مدیترانه پرداختند. تانسور اساسی نوع اول در بررسی تغییرِشکل‌های مسطحاتی و تانسور اساسی نوع دوم در بررسی تغییرِشکل‌های ارتفاعی مورد استفاده می‌گیرد. نتایج حاکی از توان زیاد این کمیت‌ها در تفسیر تغییرِشکل سطحی زمین.

بیشتر روش‌های مطرح برای محاسبه میدان‌های تانسوری تغییرِشکل پوسته زمین، مسئله را روی یک سطح مرجع مثل صفحه تصویر یا کره فرمول‌بندی می‌کنند و در نتیجه، نتایج آنها تحت تاثیر نقص مدل‌های ریاضی این تبدیل خواهد بود. در این تحقیق، برای بررسی تغییرِشکل پوسته زمین، از روش گرافارند و وثوقی (۲۰۰۳) که آنالیز تغییرِشکل را به طور صحیح‌تر و قابلِ اعتمادتری درسطح واقعی زمین به دست می‌آورد، استفاده شده است. این روش با بهره‌گیری از نظریهٔ پوسته، ضمن داشتن مزیت آسانی روابط در فضای دوبُعدی، مشکل از دست دادن اطلاعات بُعد سوم را نیز نخواهد داشت.

پوسته‌ها اجسامی هستند که بُعد ضخامتشان نسبت به دو بُعد دیگر کوچک‌تر است، بنابر این می‌توان آنها را به‌صورت یک جسم سطحی در نظر گرفت. نظریهٔ پوسته برای شرح رفتار تغییرِشکل سه‌بُعدی چنین جسمی، در فضای دوبُعدی سطحی، ایجاد شده است. از مزایای بررسی پوسته زمین بر مبنای نظریهٔ پوسته، تعریف پارامترهای تغییرِشکل مرتبط با سطح واقعی زمین به‌جای تعریف این پارامترها نسبت به یک سطح فرضی دیگر مانند صفحه است. درضمن این روش گرچه از سادگی روابط فضای دوبُعدی بهره می‌برد، اما نقش مولفه ارتفاعی

را هم در نظر می‌گیرد. از دیگر مزایا این روش تعریف تانسورهای جدیدی مانند تانسور تغییر انحنا است که در استرین صفحه‌ای مطرح نیست.

در این تحقیق، بررسی رفتار ارتفاعی پوسته زمین به‌صورت مستقل از دیتوم، مدنظر بود. ازآنجاکه تحقیقات گوناگون صورت گرفته در منطقه خراسان با منابع ژئودتیکی متفاوت همچون تداخل‌سنجی راداری، GPS و ترازیابی دقیق، نشان‌دهنده نرخ زیاد فرونشست در مناطق گوناگون آن بوده است (آمیغ‌پی و همکاران، ۱۳۸۶؛ معتق و همکاران، ۲۰۰۷؛ اندرسون و همکاران، ۲۰۰۸؛ آمیغ‌پی و همکاران، ۲۰۰۸)، مشاهدات ترازیابی دقیق این منطقه برای بررسی کمیت‌های ناوردای تانسور تغییر انحنا انتخاب شد و نتایج حاصل مورد تحلیل قرار گرفت.

در قسمت بعد این مقاله، با مروری بر صورت اساسی دوم سطح، نحوه استخراج تانسور تغییر انحنا و کمیت‌های ناوردای آن بررسی خواهد شد. پس از آن نتایج محاسبات کمیت‌های ناوردای تانسور تغییر انحنا برای مشاهدات ترازیابی دقیق استان خراسان عرضه می‌شود و وابسته نبودن این کمیت‌ها به تعریف دیتوم مورد آزمون قرار خواهد گرفت. درنهایت و در قسمت آخر، نتیجه‌گیری و پیشنهادات خواهد آمد.

## ۲ آنالیز تغییرِشکل سطحی

آنالیز تغییرِشکل سطحی از راه بررسی تغییرات کمیت‌های ناوردای تانسورهای اساسی نوع اول و دوم، به تحقیق در تغییر خصوصیات هندسی سطح می‌پردازد. بررسی تغییرات بین دو وضعیت مرجع (قبل از تغییرِشکل) و جاری (بعد از تغییرِشکل) صورت می‌گیرد. در این تحقیق ازآنجاکه بررسی رفتار ارتفاعی مدنظر بود، تغییرات تانسور اساسی نوع دوم (تانسور تغییرانحنا) مورد توجه قرار گرفت.

### ۲-۱ صورت‌های اساسی نوع اول و دوم سطح

صورت اساسی اول سطح، صورت درجه دومی است که به‌صورت زیر تعریف می‌شود (بدا و همکاران، ۱۹۹۵):

$$I(q_1,q_2)=\langle dx,dx\rangle=a_{\alpha\beta}dq_\alpha dq_\beta\,, \qquad (۱)$$

که $q_1,q_2$ مختصات خمیده‌خط سطحی و x مختصات دکارتی فضایی‌اند. $a_{\alpha\beta}$ مختصات تانسور متقارن سطحی A هستند که A تانسور متریک سطح است. تانسور اساسی نوع اول در تقریب اول مستقل از تعریف دیتوم است. صورت اساسی دوم سطح به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$II(q_1,q_2)=-\langle dn,dx\rangle=b_{\alpha\beta}dq_\alpha dq_\beta \qquad (۲)$$

که n بردار نرمال بر سطح است. ضرایب $b_{\alpha\beta}$ از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} b_{\alpha\beta}&=-\langle\frac{\partial n}{\partial q_\alpha},\frac{\partial x}{\partial q_\beta}\rangle \\ &=-\langle\frac{\partial n}{\partial q_\alpha},a_\beta\rangle=\langle n,\frac{\partial a_\alpha}{\partial q_\beta}\rangle \end{aligned} \qquad (۳)$$

$b_{\alpha\beta}$ مختصات تانسور متقارن سطحی B هستند و B تانسور اساسی نوع دوم سطح یا تانسور انحنا است. تانسور اساسی نوع دوم نیز در تقریب اول مستقل از تعریف دیتوم است.

### ۲-۲ انحنای گاوسی و متوسط

با معلوم بودن تانسور اساسی نوع اول و دوم سطح، انحنای گاوسی (k) و انحنای متوسط (h)، به‌منزلهٔ دو معیار ناوردای هندسی به‌صورت زیر تعریف می شوند:

$$k(q_1,q_2)=\frac{\det(b_{\alpha\beta})}{\det(a_{\alpha\beta})}\,, \qquad (۴)$$

$$h(q_1,q_2)=\frac{1}{2}a^{\alpha\beta}b_{\alpha\beta}\,, \qquad (۵)$$

در این رابطه، $\det(a_{\alpha\beta})$ و $\det(b_{\alpha\beta})$ دترمینان تانسورهای متریک و انحنا هستند. انحنای گاوسی مستقل از جهت بردار نرمال برسطح است، درحالی‌که انحنای متوسط وابسته به جهت این بردار است. بنابراین به علت خصوصیت ناوردایی انحنای گاوسی نسبت به تغییر دستگاه مختصات سطحی و تغییر جهت بردار نرمال، این پارامتر به‌منظور بررسی هندسه سطح مناسب‌تر است.

### ۲-۳ تانسور تغییر انحنا

در آنالیز تغییرِشکل سطحی به روش نظریه پوسته، اختلاف بین صورت اساسی دوم تغییرِشکل سطح در دو وضعیت جاری( $\mathrm{II}_r$ ) و مرجع ( $\mathrm{II}_l$ )، معیاری اساسی برای بررسی رفتار ارتفاعی سطح است. طبق قرار داد، پارامترهای موجود در روابط در وضعیت مرجع با حروف بزرگ و در وضعیت جاری با حروف کوچک نوشته می‌شود. به این منظور،تانسور تغییر انحنا به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} &II_r - II_l = b_{\lambda\theta}dq^{\lambda}dq^{\theta} \\ &- B_{\Lambda\Theta}dQ^{\Lambda}dQ^{\Theta} \\ &= b_{\lambda\theta}\frac{\partial q^{\lambda}}{\partial Q^{\Lambda}}\frac{\partial q^{\theta}}{\partial Q^{\Theta}}dQ^{\Lambda}dQ^{\Theta} - B_{\Lambda\Theta}dQ^{\Lambda}dQ^{\Theta} \\ &= K_{\Lambda\Theta}dQ^{\Lambda}dQ^{\Theta} \end{aligned} \qquad (۶)$$

که، $K_{\Lambda\Theta}$ ،تانسور تغییرِشکل انحنا، به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

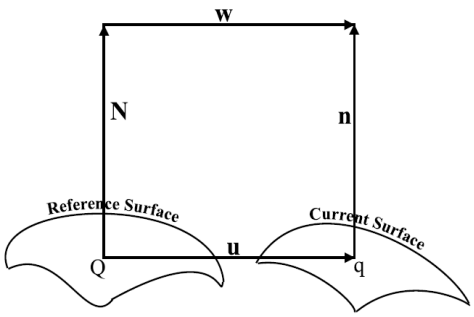
$$\begin{aligned} &K_{\Lambda\Theta}(Q^{\phi}) = b_{\lambda\theta}(Q^{\phi})\frac{\partial q^{\lambda}}{\partial Q^{\Lambda}}\frac{\partial q^{\theta}}{\partial Q^{\Theta}} \\ &- B_{\Lambda\Theta}(Q^{\phi}) \end{aligned} \qquad (۷)$$

اما ازآنجاکه در کاربردهای عملی معمولا بردار جابه‌جایی اندازه گیری می‌شود (شکل ۱)، رابطه بالا را به‌صورت تابعی از بردار جابجایی(u) می‌توان به‌صورت زیر نوشت (گرافارند و وثوقی، ۲۰۰۳):

$$\begin{aligned} &K_{\Lambda\Theta} = -\langle\frac{\partial w}{\partial Q^{\Lambda}},\frac{\partial X}{\partial Q^{\Theta}}\rangle \\ &-\langle\frac{\partial w}{\partial Q^{\Lambda}},\frac{\partial u}{\partial Q^{\Theta}}\rangle - \langle\frac{\partial N}{\partial Q^{\Lambda}},\frac{\partial u}{\partial Q^{\Theta}}\rangle \end{aligned} \qquad (۸)$$

که در این رابطه w بردار اختلاف بردارهای نرمال در وضعیت مرجع (N) وجاری (n) است:

$$w = n - N \qquad (۹)$$




**شکل ۱.** نمایش وضعیت جاری و مرجع، بردار جابجایی و بردار اختلاف بردارهای نرمال (گرافارند و وثوقی، ۲۰۰۳).

### ۲-۴ کمیت‌های ناوردای تانسور تغییر انحنا

مختصات تانسورهای تغییرِشکل وابسته به مختصات سطحی است، بنابر این به‌منظور بررسی تغییرِشکل به‌صورت مستقل از مختصات سطحی به دنبال کمیت‌های ناوردایی از این تانسورها هستیم که دارای تفسیر فیزیکی مشخصی نیز باشند. کمیت‌های ناوردای مطرح در تانسور تغییرِشکل نوع دوم ، مجموع و تفاضل مقادیر ویژه تانسور تغییر انحنا ، $\Lambda_1 + \Lambda_2$ و $\Lambda_1 - \Lambda_2$ هستند. از طرفی قبلا دو کمیت ناوردای انحنای گاوسی و انحنای میانگین در ارتباط با تانسور تغییرِشکل نوع دوم تعریف شدند که اختلاف انحنای گاوسی و میانگین در دو وضعیت جاری و مرجع معیار مناسب‌تری از تغییرِشکل سطحی مطرح هستند، زیرا این معیارها دارای تفسیر فیزیکی مرتبط با مناطق فرونشست و بالا آمدگی‌اند. تغییر انحنای گاوس به‌صورت زیر تعریف می‌شود (وثوقی، ۲۰۰۰):

$$k - K = \frac{\det(b_{\lambda\theta})}{\det(a_{\lambda\theta})} - \frac{\det(B_{\Lambda\Theta})}{\det(A_{\Lambda\Theta})}, \qquad (۱۰)$$

تغییر انحنای میانگین به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

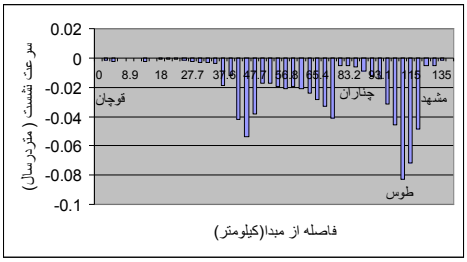
$$h - H = \frac{1}{2}\left[a^{\lambda\theta}b_{\lambda\theta} - A^{\Lambda\Theta}B_{\Lambda\Theta}\right], \qquad (۱۱)$$

## ۳ بررسی الگوی تغییرِشکل ارتفاعی خراسان

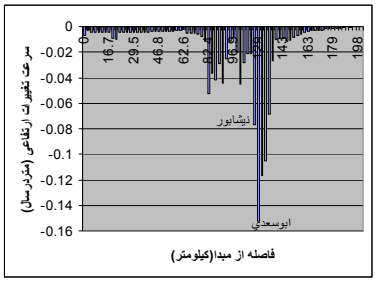
استان خراسان یکی از مناطق ایران است که در اثر استخراج بی‌رویه آب‌های زیرزمینی در مناطق متعددی همچون مشهد، نیشابور و کاشمر، دچار فرونشست قابل‌توجهی است. به‌منظور بررسی کارآیی کمیت‌های ناوردای تانسور تغییر انحنا، این پارامتر برای مناطق گوناگونی محاسبه شد. ازآنجاکه وضعیت تغییرِشکل استان خراسان در مناطق فرونشست با منابع متفاوت ژئودتیکی تعیین شده و مشخص بود، کمیت‌های ناوردای تانسور تغییر انحنا در این منطقه مورد بررسی قرار گرفت. به‌منظور ارزیابی استقلال کمیت‌های استخراج شده از تانسور تغییر انحنا از دیتوم، با انتخاب دو دیتوم متفاوت (از طریق معرفی دو نقطه ثابت ارتفاعی متفاوت) این کمیت‌ها محاسبه شدند که در هر دو حالت نتایج یکسانی حاصل شد. در این قسمت به عرضه و بررسی این نتایج خواهیم پرداخت.

### ۳-۱ بررسی الگوی تغییرِشکل ارتفاعی خراسان با استفاده از مشاهدات ترازیابی دقیق

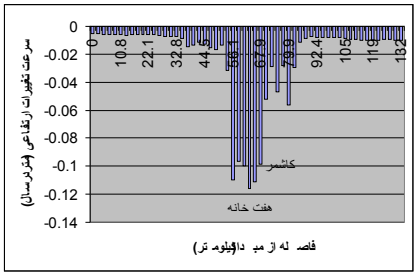
ترازیابی دقیق یکی از قدیمی‌ترین و با دقت‌ترین ابزارهای ژئودتیکی اندازه‌گیری تغییرِشکل ارتفاعی است که در زمینه فرونشست استان خراسان نیز اولین گزارش‌های حاکی از نرخ زیاد این فرونشست با مقایسه دو اپک مشاهداتی شبکه ترازیابی دقیق کشور ازسوی سازمان نقشه‌برداری کشور ارائه شد. شکل ۲ سرعت تغییرات ارتفاعی فرونشست مشهد در مسیرمشهد-قوچان، نیشابور در مسیر سبزوار- امام تقی،کاشمر در مسیر دهن قلعه- شادمهر را نشان می‌دهد. شکل ۳ مسیرهای ترازیابی دقیق درجه‌یک کشور را که در استان خراسان موجود است، نمایش می‌دهد.




(الف)

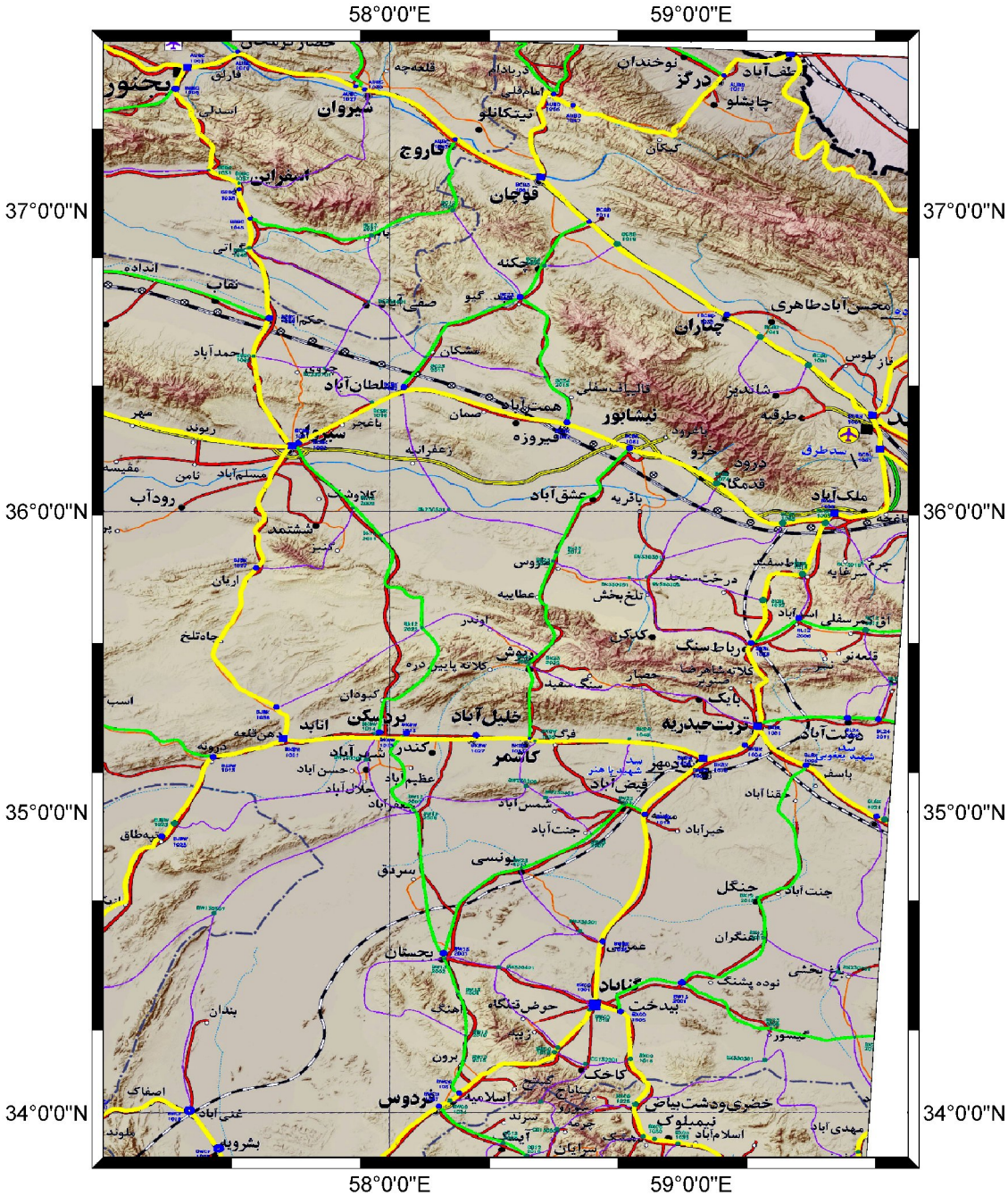



(ب)




(ج)

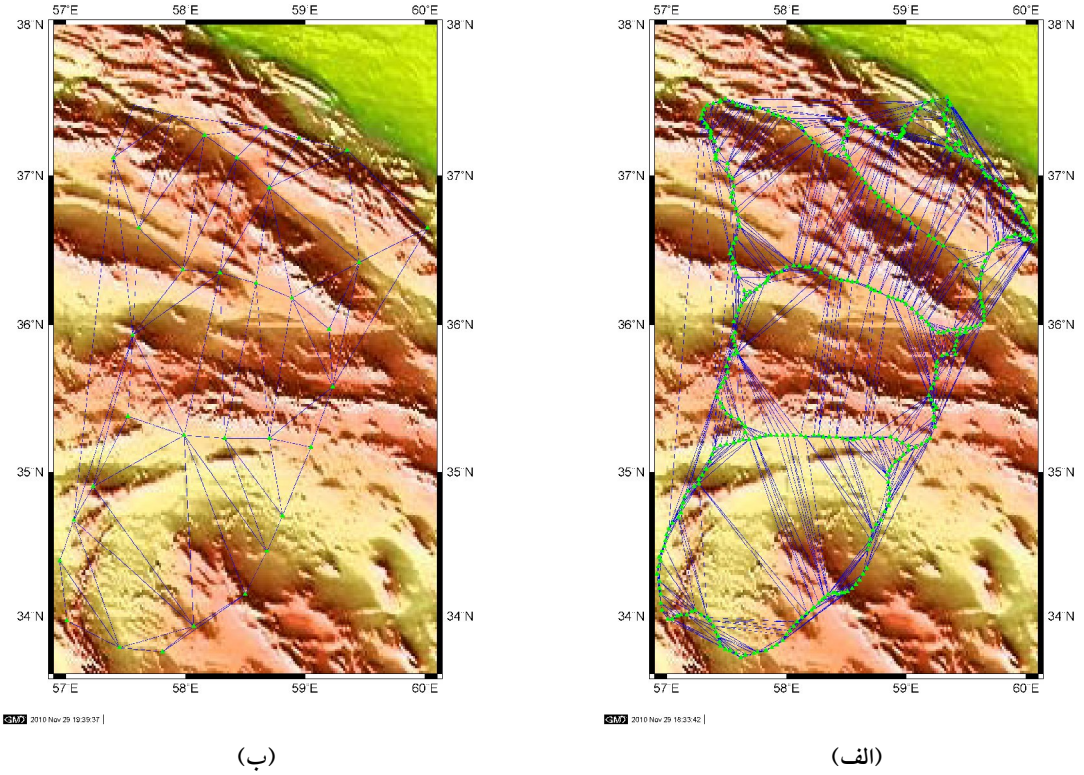
**شکل ۲.** سرعت تغییرات ارتفاعی(متر در سال): (الف) مشهد در مسیرمشهد-قوچان، (ب) نیشابور در مسیر سبزوار- امام تقی و (ج) کاشمر در مسیر دهن قلعه- شادمهر (آمیغ‌پی و همکاران، ۱۳۸۶).




**شکل ۳.** مسیرهای ترازیابی دقیق کشور در استان خراسان، مسیرهای درجه یک با خطوط زردرنگ، مسیرهای درجه دو با خطوط سبزرنگ و مسیرهای درجه سه با خطوط بنفش نشان داده شده است.

### ۳-۱-۱ مراحل محاسبات

ازآنجاکه ما به‌دنبال محاسبه کمیت‌های ناوردای تانسور تغییر انحنا، درحکم کمیت‌های جایگزین برای تفسیر تغییرِشکل ارتفاعی منطقه بودیم، دو اپک مشاهدات شبکه ترازیابی دقیق درجه‌یک خراسان را در دو دیتوم متفاوت سرشکن ساختیم و سرعت تغییر ارتفاعی منطقه را در این دو دیتوم متفاوت به دست آوردیم. این دو دیتوم متفاوت با معرفی کردن نقاط ثابت ارتفاعی AUBC1055 در سرشکنی نخست و BCBK1065 در سرشکنی دوم تعریف شد. به‌منظور عملی ساختن محاسبات روی سطح زمین، بردارهای سرعت به‌دست آمده و بردار اختلاف بردارهای نرمال بر سطح در وضعیت جاری و مرجع طبق روابط موجود در پایان‌نامه دکتری وثوقی (۲۰۰۰)، روی سطح زمین تصویر شدند. پس از آن تانسور تغییر انحنا و کمیت‌های ناوردای آن در هر دو دیتوم محاسبه شد و نتایج عددی آن ترسیم شد. در مدل‌های ریاضی تانسور تغییر انحنا، نیاز به محاسبه مشتقات جزیی بردارهای ارتفاع، سرعت، نرمال یکه و مشتق جزیی بردار اختلاف بردارهای نرمال در دو وضعیت جاری و مرجع داشت. ما به‌منظور محاسبه این مشتقات از حل عددی اجزا محدود دوبُعدی استفاده کردیم. ازآنجاکه در شبکه مشاهدات ترازیابی دقیق درجه‌یک، شاهد تراکم نقاط در راستای مسیرهای ترازیابی در فواصل ۲ کیلومتری و از طرفی کمبود نقاط در سایر مناطق و راستاها هستیم، مثلث بندی به‌دست آمده شکل نامناسبی پیدا می‌کرد که منجر به زیاد شدن خطای ناشی از ناپایداری ماتریس طراحی می‌شد (شکل ۴-الف). به‌این‌منظور، برای بهبود وضعیت شکل هندسی مثلث‌بندی در حل اجزا محدود و پایدارسازی




(ب) (الف)

**شکل ۴.** مثلث‌بندی شبکه ترازیابی با استفاده از (الف) همهٔ نقاط شبکه درجه‌یک در منطقه و (ب) نقاط با فواصل ۲۸ کیلومتر، بنچ مارک‌های ترازیابی با مثلث سبز مشخص شده است.

معادلات، نقاط ترازیابی دقیق را در فواصل ۲۸ کیلومتری انتخاب کردیم (شکل ۴-ب). با استفاده از این مشتقات، تانسور تغییر انحنا و کمیت‌های ناوردای آن به دست آمد.

در مرحله بعد خطاهای فاحش (نتایج دارای اُریبی (بایاس)) که عمدتاً به دلیل شکل نامناسب اِلمان‌ها (مثلث‌ها) در برخی مناطق ایجاد شده بود، از کمیت‌های ناوردای به‌دست آمده حذف شدند. نتایج محاسبه کمیت‌های ناوردا در شکل‌های ۶ تا ۱۰ نشان داده شده است.

### ۳-۱-۲ تحلیل و بررسی نتایج

به‌منظور بررسی عملی ناوردا بودن کمیت‌های استخراج شده از تانسور تغییر انحنا، از دو دیتوم متفاوت AUBC1055 (که با مشاهدات دو اپک ترازیابی دقیق و سایر منابع ژئودتیکی و شواهد زمین‌شناسی محل تأیید شده بود) و BCBK1065 (که در منطقه فرونشست واقع بود و در سرعت تغییرِشکل ارتفاعی منطقه اُریبی ایجاد می‌کرد)، استفاده شد. شکل ۵ مقدار سرعت به‌دست آمده بر مبنای استفاده از این دو دیتوم را نشان می‌دهد. در ترسیم نتایج، مقادیر مثبت با رنگ آبی و مقادیر منفی با رنگ سرخ نشان داده شده است. مثلث‌های سبزرنگ نشان‌دهنده ایستگاه‌های ترازیابی دقیق است. همان‌طور که در شکل ۵ دیده می‌شود، بسته به انتخاب نقطه ثابت، شکل ۵- الف نشان‌دهنده فرونشست در منطقه و شکل ۵- ب نشان‌دهنده بالاآمدگی در منطقه است که این خود گویای محدودیت وابستگی نتایج به‌دست آمده از کمیت سرعت تغییرِشکل ارتفاعی به دیتوم انتخابی است.

معیارهای ناوردای مرتبط با تانسور تغییر انحنایی که مورد بررسی قرار گرفت، شامل: مجموع و تفاضل مقادیر ویژه تانسور تغییر انحنا و تغییر انحنای گاوسی و میانگین بود. شکل ۶ مجموع و تفاضل مقادیر ویژه تانسور تغییر انحنا را برای دیتوم AUBC1055 و شکل ۷ مجموع و تفاضل مقادیر ویژه تانسور تغییر انحنا را برای دیتوم BCBK1065 نشان می‌دهد.

همان‌طورکه در شکل‌های ۶ و ۷ دیده می‌شود، مقادیر عددی مجموع و تفاضل مقادیر ویژه تانسور تغییر انحنا و الگوی به‌دست آمده از آنها برای دو دیتوم یکسان و نشان‌دهنده مناطق سه‌گانه فرونشست است.

مجموع مقادیر ویژه تانسور تغییر انحنا، ممکن است کمیتی مثبت یا منفی باشد. مطابق شکل‌های ۶-الف و ۷-الف، منحنی میزان‌ها در مناطق فرونشست الگوی مشخصی را نشان داده‌اند که فارغ از علامتشان، الگوی مشابهی با الگوی سرعت تغییرِشکل منطقه و تفاضل مقادیر ویژه دارند (شکل ۸). تنها تفاوت آن است که در مناطق فرونشست، شاهد تغییر علامتی هستیم که الگوی ظاهری مجموع مقادیر ویژه را نسبت به الگوی سرعت تغییرِشکل منطقه و تفاضل مقادیر ویژه متفاوت کرده است. همان‌طور که در شکل ۸ دیده می‌شود، مقدار بیشینه قدر مطلق مجموع مقادیر ویژه تانسور تغییر انحنا، از مناطق فرونشست نیشابور و کاشمر عبور می‌کند.

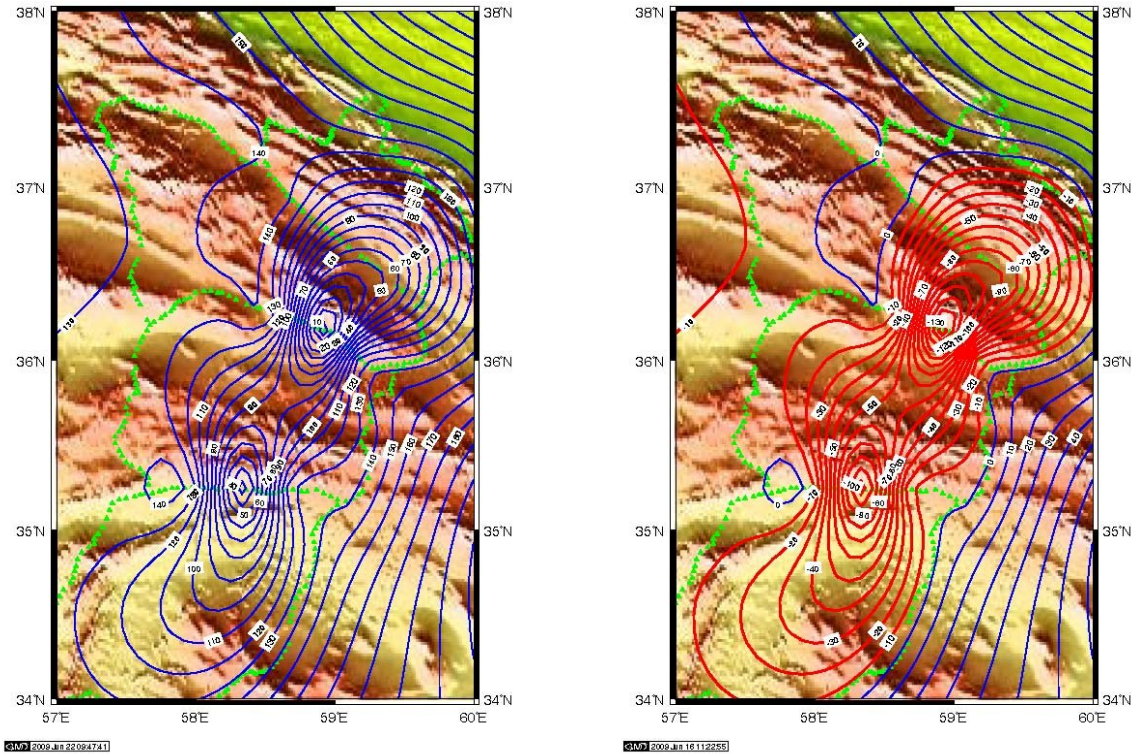
همان‌طور که در شکل‌های ۶-ب و ۷-ب دیده می‌شود، تفاضل مقادیر ویژه تانسور تغییر انحنا طبق تعریف، همواره مقداری مثبت است. همان‌طور که در این شکل‌ها دیده می‌شود، منحنی میزان‌ها مناطق سه‌گانه فرونشست، را پوشش داده‌اند و بیشینه مقدار کمیت تفاضل مقادیر ویژه از منطقه فرونشست کاشمر که بیشترین نرخ فرونشست را دارد، به‌دست آمده است.

علاوه بر کمیت‌های مجموع و تفاضل مقادیر ویژه تانسور تغییر انحنا، تغییر انحنای گاوسی و میانگین درحکم دو کمیت ناوردای دارای تفسیر فیزیکی مشخص در قسمت قبل معرفی شدند. برخلاف دو کمیت مجموع و تفاضل مقادیر، علامت این کمیت‌ها دارای مفهوم مشخصی در ارتباط با جهت بردار نرمال بر سطح است، یعنی مثبت بودن علامت کمیت‌های تغییر انحنای گاوسی

و میانگین، به معنای فرونشست منطقه مورد بررسی و منفی بودن علامت این کمیت‌ها، به معنای بالا آمدگی آن منطقه است. این مهم‌ترین ویژگی این دو کمیت ناوردا است. سرعت کمیت تغییر انحنای گاوسی نسبت به هر دو دیتوم در شکل ۹، و سرعت کمیت تغییر انحنای میانگین نسبت به هر دو دیتوم در شکل ۱۰ نشان داده شده است. نکته قابل‌توجه، نتایج یکسان به‌دست آمده برای مقادیر تغییر انحنای میانگین و گاوسی نسبت به دو دیتوم متفاوت است که موید ناوردا بودن این کمیت‌ها است.

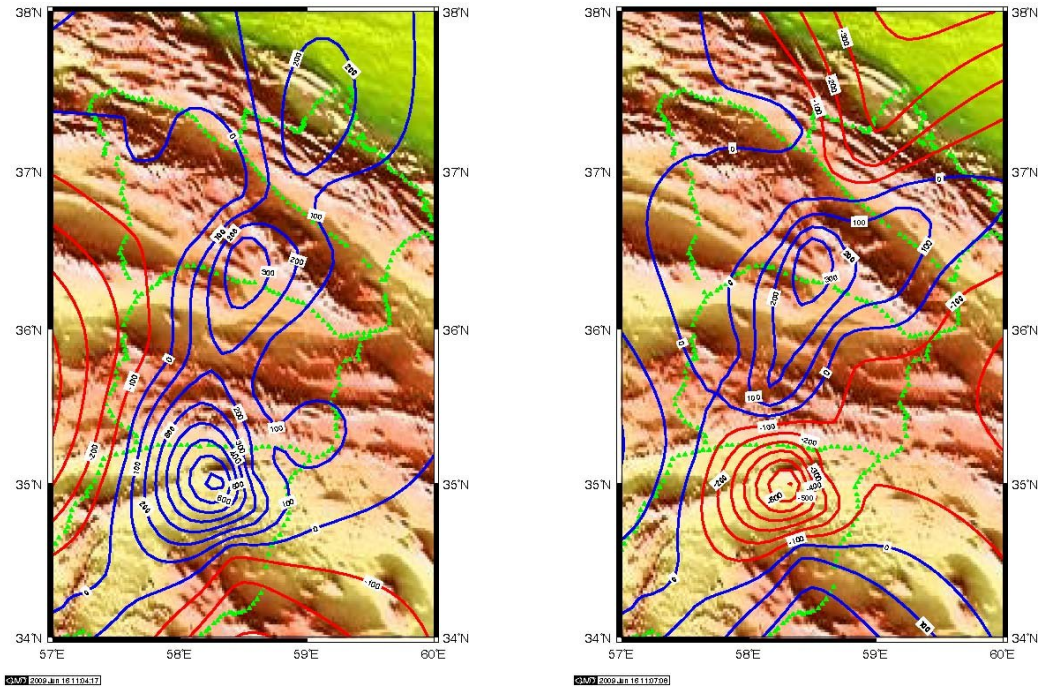
مطابق شکل ۹ منحنی میزان‌ها در سه منطقه فرونشست مشهد، ابوسعدی و کاشمر، سه الگوی تغییر انحنای مثبت را نشان می‌دهند. نکته قابل‌توجه آن است که بزرگ‌ترین تغییر انحنا مربوط به فرونشست مشهد است که گستره منطقه فرونشست گسترده‌تری دارد و پس از آن مربوط به فرونشست کاشمر است، گرچه نرخ فرونشست به‌ترتیب در ابوسعدی، کاشمر و مشهد بیشینه است.

شکل ۱۰ سرعت تغییر انحنای میانگین را نشان می‌دهد که شاهد تغییر انحنای میانگین مثبت در مناطق سه‌گانه فرونشست هستیم. باتوجه به تشابه بیشتر الگوی تغییرِشکل ارتفاعی منطقه ( شکل ۵-الف) با الگوی به‌دست آمده از سرعت تغییر انحنای گاوسی منطقه، به‌نظر می‌رسد که سرعت تغییر انحنای گاوسی کمیت پایدارتری در ارزیابی نتایج تغییر ارتفاعی باشد و بنابراین ارزیابی‌های به‌دست آمده از آن صحیح‌تر و قابلِ‌اعتمادتر است.



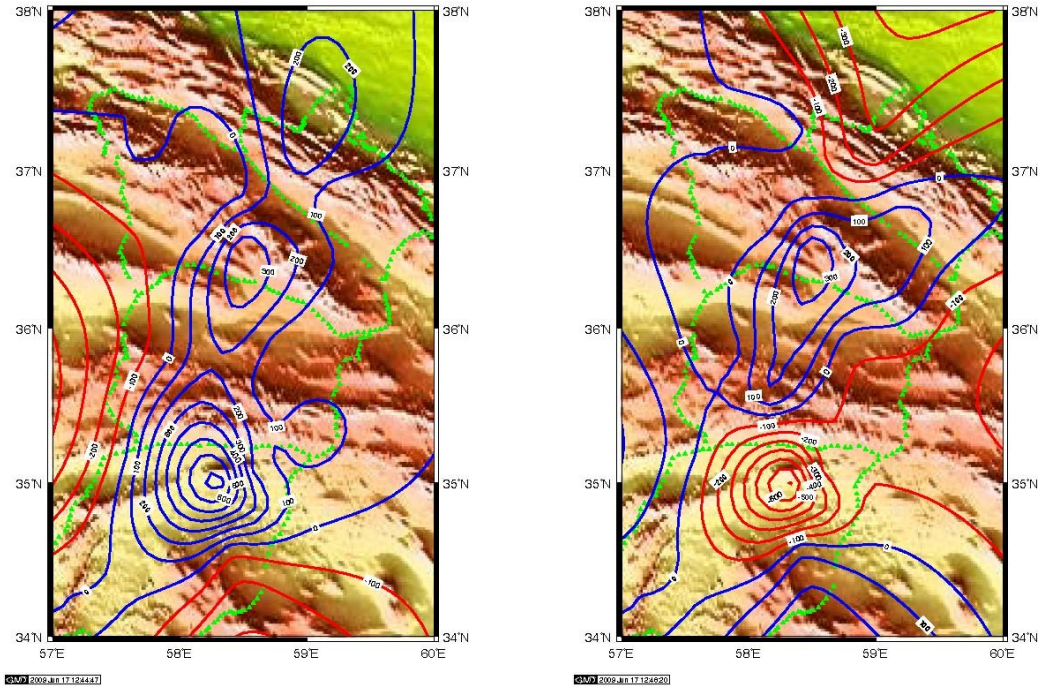

(ب) (الف)

**شکل ۵.** سرعت تغییرِشکل ارتفاعی(میلی‌متر در سال) منطقه خراسان برمبنای دیتوم : (الف) AUBC1055 و (ب) BCBK1065



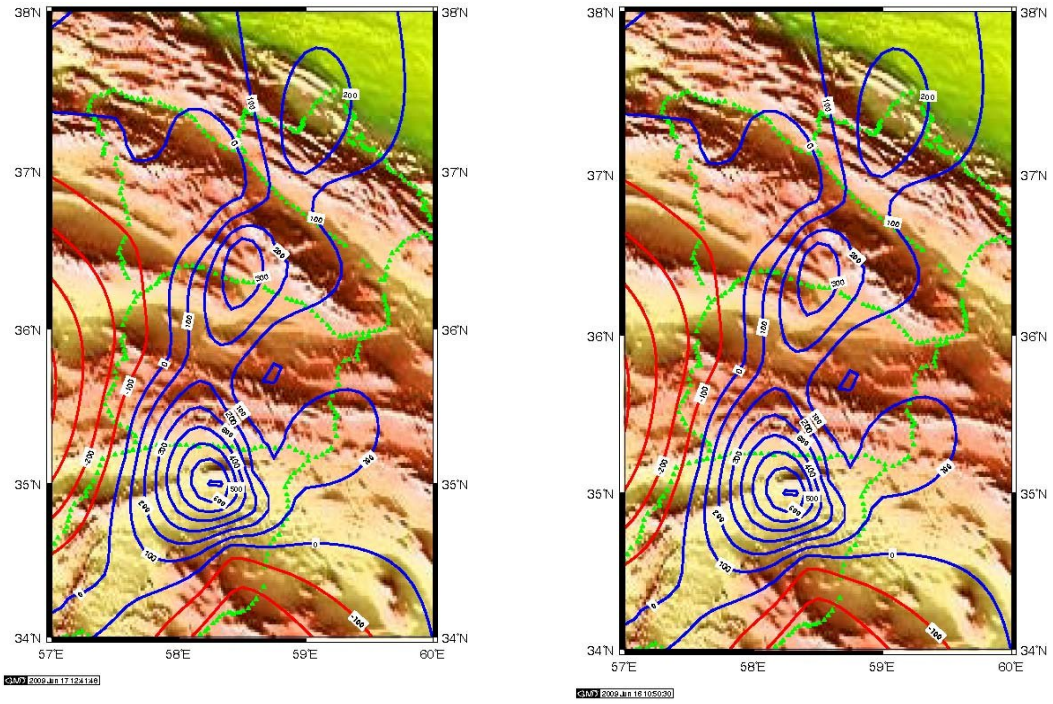

(ب) (الف)

**شکل ۶.** (الف) مجموع و (ب) تفاضل مقادیر ویژه تانسور تغییر انحنا ( نسبت به دیتوم AUBC1055)، تصویر زمینه، نشان‌دهنده توپوگرافی منطقه است (برای نمایش مقادیر ۱۰۰۰ برابر شده‌اند).



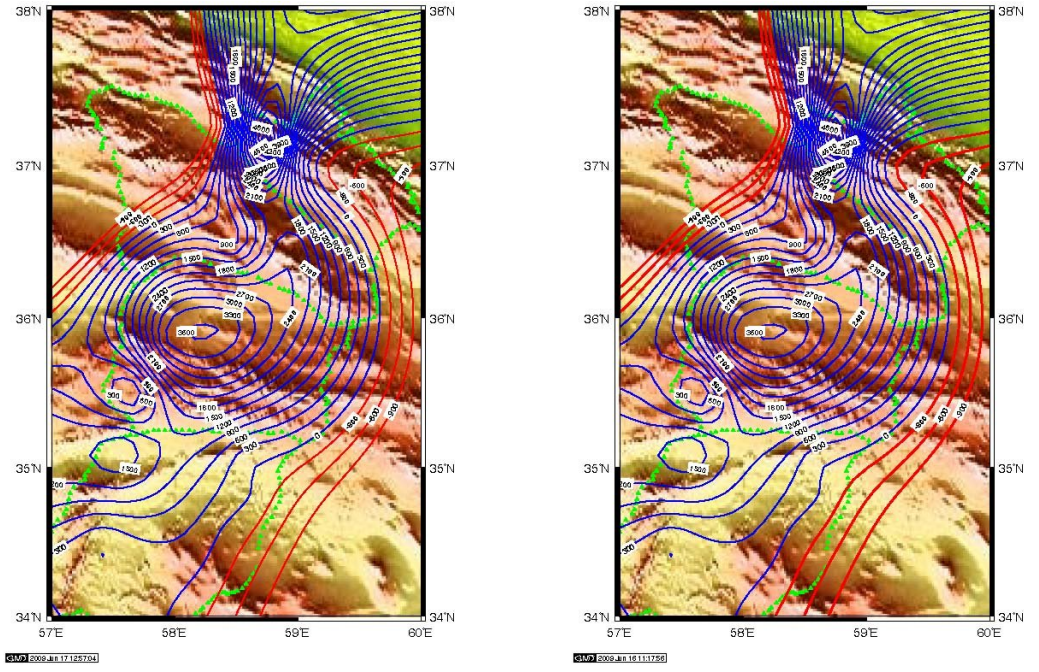

(ب) (الف)

**شکل ۷.** (الف) مجموع و (ب) تفاضل مقادیر ویژه تانسور تغییر انحنا (نسبت به دیتوم BCBK1065 )، (برای نمایش مقادیر ۱۰۰۰ برابر شده‌اند).



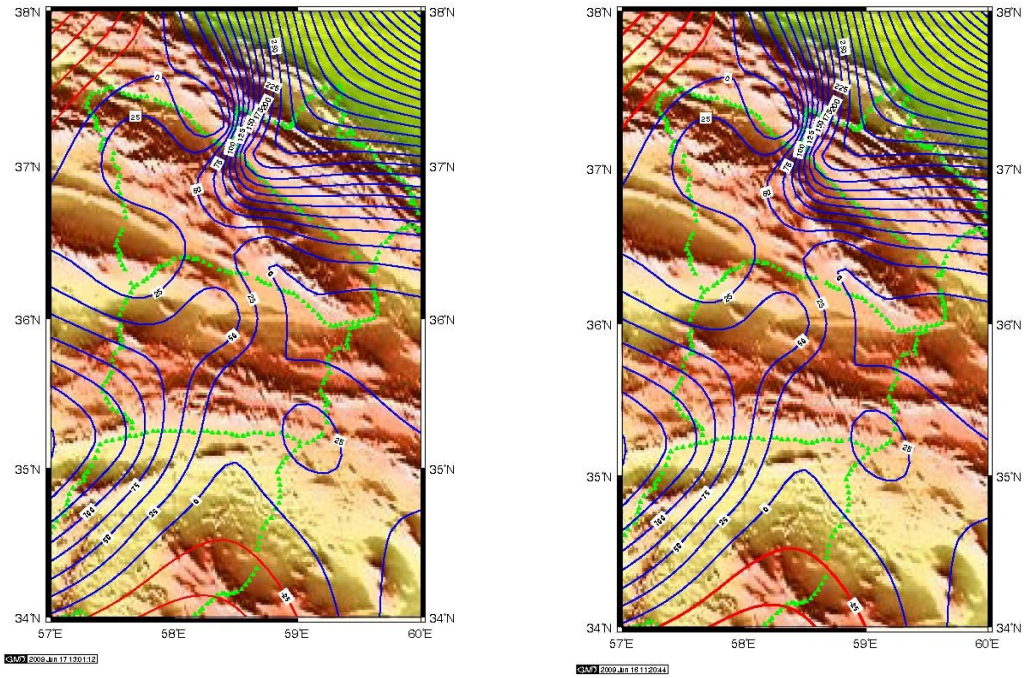

(ب) (الف)

**شکل ۸.** قدرمطلق مجموع مقادیر ویژه تانسور تغییر انحنا نسبت به دیتوم : (الف) AUBC1055 و (ب) BCBK1065. (برای نمایش مقادیر ۱۰۰۰ برابر شده‌اند).




(ب) (الف)

**شکل ۹.** سرعت کمیت تغییر انحنای گاوسی نسبت به دیتوم، (الف) AUBC1055 و (ب) BCBK1065. (برای نمایش مقادیر $10^{18}$ برابر شده‌اند).




(ب) (الف)

**شکل ۱۰.** سرعت کمیت تغییر انحنای میانگین نسبت به دیتوم، الف- AUBC1055 ، ب- BCBK1065. (برای نمایش مقادیر $10^{11}$ برابر شده‌اند).

## ۴ نتیجه‌گیری

استخراج کمیت‌هایی مستقل از دیتوم در مطالعات تغییرِشکل در شبکه‌های کنترل ژئودزی، نقش موثری در تفسیر صحیح نتایج و بررسی‌های گوناگون ژئو دینامیکی خواهند داشت.در این تحقیق، روش پیشنهادی وثوقی (۲۰۰۰) که به بررسی تغییرِشکل سطح واقعی زمین با نگرش ذاتی، با استفاده از نظریهٔ پوسته، می پردازد، برای بررسی تغییرِشکل منطقه خراسان در ایران استفاده شد. ازآنجاکه براساس مشاهدات منابع ژئودتیکی همچون تداخل‌سنجی راداری، ترازیابی دقیق و GPS تغییرِشکل عمده این منطقه ، فرونشست‌های قابل‌توجه است، با استفاده از تانسور تغییرِشکل نوع دوم، کمیت‌های ناوردای مرتبط با این تانسور به‌منظور بررسی رفتار این منطقه استخراج شدند.

کمیت تغییر انحنای گاوسی الگوی مکانی تغییرِشکل را به‌خوبی نمایش داد و بنابراین از این کمیت می‌توان برای بررسی حرکات قائم منطقه استفاده کرد. ازآنجاکه علامت کمیت‌های مجموع و تفاضل مقادیر ویژه تانسور تغییر انحنا دارای تفسیر فیزیکی خاصی نیست و مقدار این کمیت‌ها برای ما اهمیت دارد، کمیت پیشنهادی جایگزین برای پارامتر مجموع مقادیر ویژه تانسور تغییر انحنا، قدر مطلق مجموع مقادیر ویژه این تانسور است که در مناطق دچار فرونشست شاهد مقادیر بیشینه این کمیت بودیم که رفتار منطقه را به‌صورت مناسبی نمایش می‌داد.

در این تحقیق برای به‌دست آوردن مشتقات عددی موردِنیاز در محاسبه تانسور تغییر انحنا، از حل عددی اجزای محدود استفاده شد که به شکل اِلمان‌های مثلثی بسیار حساس است. این ویژگی باعث ایجاد اُریبی در جواب برخی مناطق شد. دیگر فرض این روش مانسته (هموژن) در نظر گرفتن تغییرِشکل در اِلمان‌ها است که با

توجه به پراکندگی داده‌های ترازیابی دقیق در این تحقیق، و بزرگی اِلمان‌های پیش‌گفته، بیانگر واقعیت رفتار تغییرِشکل در منطقه نیست.

نتیجه اساسی این تحقیق، پیشنهاد استفاده از کمیت‌های ناوردای استخراج شده از تانسور تغییر انحنا، به‌ویژه کمیت تغییر انحنای گاوسی، در بررسی تغییرِشکل ارتفاعی پوسته زمین، به‌خصوص در مناطقی است که با مشکل تثبیت دیتوم مواجه‌اند.

## تشکر و قدردانی

از همکاری مطلوب سازمان نقشه‌برداری کشور و اداره کل نقشه‌برداری زمینی و همچنین جناب آقای دکتر توکلی برای در اختیار دادن داده‌های موردِنیاز در این تحقیق، کمال تشکر را داریم.

## منابع

آمیغ‌پی، م.، عربی، س.، طالبی، ع.، و جمور، ی.، ۱۳۸۵، گزارش تغییرات ارتفاعی مسیرهای ترازیابی شبکه درجه‌یک کشور: سازمان نقشه‌برداری کشور.

آمیغ‌پی، م.، عربی، س.، طالبی، ع.، و جمور، ی.، ۱۳۸۶، بررسی مناطق فرونشست ایران براساس داده‌های ترازیابی: همایش ژئوماتیک، تهران، ایران.

Amighpey, M., Mousavi, Z., Nankali, H., Arabi, S., Sedighi, M., and Hosseini, S., 2008, Studying subsidence in Iran with leveling and permanent GPS observations: egu, Vienna, Austria.

Anderssohn, J., Wetzel, H., Walter, T., Motagh, M., Djamour, Y., and Kaufmann, H., 2008, Land subsidence pattern controlled by old alpine basement faults in the Kashmar Valley, northeast Iran: results from InSAR and leveling: Geophys. J. Int., **174**(1), 287-294.

Beda, G., Kozak, I., and Verhas, J., 1995, Continuum mechanics: Akademiai Kiado, Budapest.

Ernst, L. J., 1981, A geometrically nonlinear finite element shell theory: WTHD, no. **132**, Department of Mechanical Engineering, Delft University of Technology.

Grafarend, E. W., and Voosoghi, B., 2003, Intrinsic deformation analysis of the Earth's surface based on displacement fields derived from space geodetic measurements, Case studies: present-day deformation patterns of Europe and of the Mediterranean area (ITRF data sets): Journal of Geodesy, **77**, 303-326.

Motagh, M., Djamour, Y., Walter, T. R., Wetzel, H. U., Zschau, J., and Arabi, S., 2007, Land subsidence in Mashhad Valley, northeast Iran; results from InSAR, levelling and GPS: Geophys. J. Int., **168**(2), 518-526.

Pietraszkiewicz,W., 1977, Introduction to the non-linear theory of shells: Mitteilungen aus dem institut fuer Mechanik Nr 10, Ruhr-Universita¨ t Bochum, Germany.

Voosoghi, B., 2000, Intrinsic deformation analysis of the Earth surface based on 3 dimensional displacement fields derived from space geodetic measurenments: Ph.D thesis, University of Stuttgart.