مدل‌سازی انتشار امواج در محیط اکوستیکی دوبُعدی به روش تفاضل متناهی در حیطه فرکانس

نوید امینی[۱] و عبدالرحیم جواهریان[۲*]

[۱] دانشجوی دکتری، مؤسسه ژئوفیزیک دانشگاه تهران، ایران
[۲] استاد بازنشسته ژئوفیزیک، مؤسسه ژئوفیزیک دانشگاه تهران و استاد دانشکده مهندسی نفت دانشگاه صنعتی امیرکبیر، تهران، ایران

javaheri@ut.ac.ir, amini_navid@yahoo.com

(تاریخ دریافت: ۱۳۸۸/۸/۹، تاریخ پذیرش: ۱۳۸۹/۳/۲۶)

چکیده

مدل‌سازی انتشار امواج با استفاده از روش تفاضل متناهی در حیطه فرکانس FDFD (frequency domain finite-difference) در مدل‌سازی‌های لرزه‌ای چندچشمه‌ای (multi-source) و به‌ویژه در توموگرافی شکل موج (waveform tomography) کاربرد گسترده‌ای دارد. در این مقاله، مدل‌سازی انتشار امواج در محیط آکوستیکی دوبعدی ناهمگن مورد بررسی قرار می‌گیرد. برای این منظور از تقریب مرتبه دوم معادله موج آکوستیک در حیطه فرکانس استفاده می‌شود و نتایج برای سه مدل سرعتی دوبعدی متفاوت مورد بررسی قرار می‌گیرد. به‌منظور جذب امواج بازتاب شده از کران‌های مدل، از روش لایه کاملاً جورشده PML (perfectly matched layer) استفاده شده است که می‌تواند به صورت مطلوبی بازتاب ناشی از کران‌های مدل را تضعیف کند. فرمول‌بندی معادله موج در حیطه فرکانس، مدل‌سازی همزمان انتشار امواج را برای چندین چشمه‌ای میسر می‌سازد. همچنین با توجه به روابط تجربی موجود در مورد سازوکار جذب می‌توان با استفاده از مقادیر سرعت مختلط، جذب انرژی را نیز لحاظ کرد. همچنین به دلیل ساختار ویژه الگوریتم FDFD و استقلال مولفه‌های فرکانسی از همدیگر می‌توان از امکانات پردازش موازی سود جست.

واژه‌های کلیدی: مدل‌سازی انتشار امواج، تفاضل متناهی، حیطه فرکانس، FDFD، PML

Frequency domain finite-difference wave propagation modeling in 2D acoustic media

Navid Amini[1], and Abdorahim Javaherian[2*]

[1] *Institute of Geophysics, University of Tehran, Iran*
[2] *formerly Institute of Geophysics, University of Tehran, presently Department of Petroleum Engineering, Amirkabir University of Technology, Tehran, Iran*

(Received: 31 October 2009, accepted: 16 June 2010)

Corresponding author: javaheri@ut.ac.ir نگارنده رابط:

Summary

Seismic wave propagation modeling is helpful in understanding waveform behavior involving velocity anomalies due to complicated geological structures. On the other hand, forward modeling is the kernel of inversion and tomography procedures, so developing forward modeling algorithms is an inevitable need. In order to model wave propagation, it is necessary to solve complete wave equation for 3D media. Because of limitations in computational resources, solving complete wave equation with all ideal considerations such as heterogeneity, anisotropy, and absorption, for 3D media is difficult. Thus by considering easier conditions we can solve wave equation with normal computers. Solving wave equation with computers needs to discretization techniques such as boundary integral, finite-element or finite-difference methods. Boundary integral methods are suitable for simple models while finite-element or finite-difference methods are predominantly used for heterogeneous models. Depending on the domain for which wave equation is going to be solved, we can categorize methods to time-space, frequency-space, Laplace, slowness-space and etc. Recently, the frequency domain finite-difference (FDFD) method has found extensive application in multi-source experiment modeling, especially in waveform tomography. Because of the special form of wave equation in the frequency domain, the modeling of multi-source experiments is a straightforward job. On the other hand, considering absorption mechanisms is easy.

This study deals with wave propagation modeling in a 2D acoustic heterogeneous media, using the second-order approximation of acoustic wave equation in the frequency domain. The acoustic wave equation is formulated as the first-order hyperbolic system involving fields of pressure and particle velocities. This system is discretized using the second-order staggered grid stencil. To avoid spurious reflections from the model boundaries, a sponge-like perfectly matched layer (PML) is implemented. Solving wave equation in the frequency domain leads to a large matrix equation. The key step in the frequency domain finite-difference modeling that controls computational efficiency is the numerical inversion of the massive matrix. The matrix structure depends on the spatial derivatives approximation. In order to solve this system, different direct solvers can be used. The UMFPACK (unsymmetric multifrontal sparse LU factorization package) solver, which is embedded in MATLAB and has acceptable performance in solving the general system of equations, was selected for this study. For each frequency component, it is necessary to solve a large system of equations to obtain a single frequency component of the pressure wavefield. In this paper we review criteria to avoid numerical dispersion and errors during the finite-difference approximation, and time aliasing during frequency sampling. Choosing appropriate spatial and frequency discretization intervals is very important in FDFD modeling. Choosing large Δ (spatial discretization interval) values will cause the pressure field to be inadequately sampled in space and numerical dispersion. For the scheme presented here, we should have more than 10 grid points per minimum wavelength to keep dispersion errors small. On the other hand according to the sampling theorem, if $df > 1/t_{\max}$, where t_{max} is maximum time and df is frequency components sampling interval, we encounter time aliasing. The present FDFD package is written in MATLAB programming language. MATLAB supports sparse algebra and makes possible the solution of large system of equations with minimum usage of memory, which is the main concern in FDFD algorithms. Examples of waveform modeling using FDFD are shown. In the first example, the headwave originating from a high velocity layer is modeled; in the second example, the wave behavior in a trap model is shown; and in the last example, a salt dome model is studied.

Key words: Frequency domain, finite-difference, FDFD, seismic modeling, PML

۱ مقدمه

با مدل‌سازی انتشار موج در محیط‌های پیچیده می‌توان از نحوه رفتار جبهه موج در مواجهه با ساختارهای پیچیده آگاهی یافت. با استفاده از مدل‌سازی می‌توان لرزه‌نگاشت‌های مصنوعی را با توجه به سناریوهای محتمل زمین‌شناسی و مخزنی ایجاد کرد و از آن در تفسیر داده‌ها سود جست. مقایسه لرزه‌نگاشت‌های مصنوعی و لرزه‌نگاشت‌های واقعی به درک اندازه‌گیری‌های لرزه‌ای کمک می‌کنند. از طرف دیگر در فرایند وارون‌سازی داده‌های لرزه‌ای، مدل‌سازی هسته اصلی الگوریتم وارون‌سازی است (هرمن و همکاران، ۲۰۰۹؛ ویریوکس و همکاران، ۲۰۰۹؛ پرت، ۱۹۹۹؛ پرت و همکاران، ۱۹۹۸)، از این رو توسعه الگوریتم‌های مدل‌سازی امواج لرزه‌ای نیازی انکارناپذیر است.

برای به‌دست آوردن کامل‌ترین پاسخ بایستی معادله موج کشسان سه‌بعدی را با فرض محیط جاذب، ناهمگن و ناهمسانگرد حل کرد. اگرچه فرمول‌بندی چنین مسائلی امکان‌پذیر است ولی با توجه به پیچیدگی‌های عددی پیش‌رو و امکانات محاسباتی حاضر عملی‌ساختن آن کاری پرمشقّت است. ازاین‌رو با توجه به نیاز می‌توان از انواع ساده‌تر معادلات موج استفاده کرد. حل عددی معادله موج نیازمند استفاده از روش‌های گسسته‌سازی (discretization) نظیر انتگرال‌های مرزی، المان‌های محدود یا تفاضل متناهی است که استفاده از هر کدام از این روش‌ها به میزان پیچیدگی مدل زمین‌شناسی و همچنین نوع کاربرد بستگی دارد (اشتکل و پرت، ۱۹۹۸). برای مدل‌های ساده همگن و شبه‌همگن که متشکل از تعداد محدودی از نواحی همگن با مرزهای هندسی منظم هستند می‌توان از روش انتگرال‌های مرزی و برای محیط‌های ناهمگن می‌توان از روش‌های المان‌های محدود یا تفاضل متناهی سود جست که با توجه به نیاز دانش لرزه‌شناسی به مدل‌سازی در محیط‌های پیچیده دو روش آخر بیشتر استفاده شده‌اند (مارفورت، ۱۹۸۴). از طرف دیگر می‌توان روش‌های حل معادله موج را با توجه به حیطه‌ای که در آن معادله موج حل می‌شود طبقه‌بندی کرد. حیطه‌هایی که معمولاً برای حل معادله موج مورد استفاده قرار می‌گیرند ترکیبی از زمان- مکان، زمان- عدد موج، فرکانس- مکان، کندی- مکان، لاپلاس و یا انواع دیگر حیطه‌ها هستند. مدل‌سازی انتشار موج در حیطه فرکانس کاربرد گسترده‌ای در مدل‌سازی‌های لرزه‌ای چند چشمه‌ای و به‌ویژه توموگرافی شکل موج دارد که این امر به دلیل کارایی محاسباتی این روش است (پرت و ورتینگتون، ۱۹۹۰؛ اشتکل و پرت، ۱۹۹۸).

مدل‌سازی عددی انتشار امواج در حیطه فرکانس را ابتدا لیسمر و دریک (۱۹۷۲) مورد بررسی قرار دادند و سپس مارفورت (۱۹۸۴)، پرت و ورتینگتون (۱۹۹۰)، پرت (۱۹۹۰)، جو و همکاران (۱۹۹۶)، اشتکل و پرت (۱۹۹۸) و هوستت و همکاران (۲۰۰۴) آن را توسعه دادند. مهم‌ترین برتری مدل‌سازی در حیطه فرکانس نسبت به حیطه زمان قابلیت مدل‌سازی همزمان چشمه‌های چندگانه است. همچنین مدل‌سازی پدیده جذب نیز در حیطه فرکانس بسیار ساده‌تر از حیطه زمان عملی می‌شود، زیرا در حیطه فرکانس می‌توان به سادگی ضرایب جذب را به صورت تابعی از فرکانس نوشت (پرت، ۱۹۹۰). همچنین به‌منظور مدل‌سازی (forward modeling) و یا وارون‌سازی می‌توان بعضی از مولفه های فرکانسی را انتخاب کرد که این امر نیز حجم محاسبات را تا حد زیادی کاهش می‌دهد. در حیطه فرکانس، حل معادله موج به ازای یک مولفه فرکانسی دلخواه منجر به حل یک معادله ضمنی ماتریسی بسیار بزرگ می‌شود. برای حل این معادله می‌باید تدابیری برای کمینه‌کردن حافظه مورد نیاز رایانه به‌منظور ذخیره‌سازی و حل آن اندیشید. مهم‌ترین

مرحله حل معادله موج، حل معادله ماتریسی مذکور است. ساختار ضرایب این معادله ماتریسی به نوع تقریب مورد استفاده در مشتق‌گیری روش تفاضل متناهی و همچنین نوع مدل جاذب کران‌های مدل وابسته است.

در این مقاله، تقریب مرتبه دوم شبکه استگر (staggered grid) معادله موج آکوستیک در حیطه فرکانس مورد بحث قرار می‌گیرد (شبکه استگر شبکه‌ای است که مقادیر چگالی روی موقعیت میانی نقاط شبکه و مقادیر فشار روی نقاط شبکه محاسبه می‌شود). بدین‌منظور معادله موج آکوستیکی در دستگاه معادلات دیفرانسیل مرتبه اول هذلولی فرمول‌بندی می‌شود که سرعت ذره و فشار را دربر می‌گیرد (ویریوکس، ۱۹۸۴). سپس با استفاده از تقریب مرتبه دوم شبکه استگر معادله به‌صورت گسسته در می‌آید. به‌منظور جلوگیری از بازتاب امواج از کران‌های مدل از روش شبه‌اسفنجی (sponge-like) لایه های کاملاً جور شده (PML) که برنگر (۱۹۹۴) برای امواج الکترومغناطیسی عرضه کرده است استفاده می‌شود. برای حل معادله ماتریسی ضمنی نیز از روش UMFPACK (unsymmetric multifrontal sparse LU factorization package) (دیویس و داف، ۱۹۹۷؛ دیویس، ۲۰۰۴) استفاده می‌شود. در این مقاله ابتدا معادله موج، شرایط مرزی جاذب در کران‌ها، تقریب تفاضل متناهی و همچنین دگرنامی زمانی (time aliasing) مورد بحث و بررسی قرار می‌گیرد.

۲ زمینه نظری

۲-۱ معادله موج آکوستیک

معادله موج اکوستیک را می‌توان با استفاده از دستگاه معادلات دیفرانسیل مرتبه اول هذلولی برای یک محیط دوبعدی به صورت زیر نوشت (ویریوکس، ۱۹۸۴؛ هوستت و همکاران، ۲۰۰۴):

$$\frac{\partial P(x,z,t)}{\partial t}=K(x,z)\frac{\partial Q(x,z,t)}{\partial x}+K(x,z)\frac{\partial R(x,z,t)}{\partial z}+S(x,z,t)$$
$$\frac{\partial Q(x,z,t)}{\partial t}+\frac{\partial R(x,z,t)}{\partial t}=b(x,z)\left(\frac{\partial P(x,z,t)}{\partial x}+\frac{\partial P(x,z,t)}{\partial z}\right) \tag{۱}$$

که $Q(x,z,t)$ و $R(x,z,t)$ مولفه‌های سرعت ذره، $P(x,z,t)$ میدان فشار و $S(x,z,t)$ چشمه فشار است. وارون چگالی (شناوری) با $b(x,z)$ و مدول بالک نیز با $K(x,z)$ نشان داده شده است. برای جلوگیری از بازتاب امواج از کران‌های فیریکی مدل، از روش لایه‌های کاملاً جور شده (PML) استفاده شده است (برنگر، ۱۹۹۴). این روش که به صورت گسترده‌ای در مدل‌سازی امواج الکترومغناطیسی، آکوستیکی و کشسانی مورد استفاده قرار می‌گیرد، توانایی خوبی در جذب امواج دارد. لایه PML یک لایه جاذب غیر فیزیکی است که قسمت بیرونی کران‌های مدل را احاطه می‌کند (شکل ۱). برای استفاده از لایه جاذب PML می‌باید معادله (۱) را برحسب محورهای مختصات x و z جداسازی کرد و یک جمله میرایی به مولفه‌های افقی و قائم اضافه کرد:

$$\frac{\partial P_x(x,z,t)}{\partial t}+\gamma_x(x)P_x(x,z,t)=k(x,z)\frac{\partial Q(x,z,t)}{\partial x}+S(x,z,t)$$
$$\frac{\partial P_z(x,z,t)}{\partial t}+\gamma_z(z)P_z(x,z,t)=k(x,z)\frac{\partial R(x,z,t)}{\partial z} \tag{۲}$$
$$\frac{\partial Q(x,z,t)}{\partial t}+\gamma_x(x)Q(x,z,t)=b(x,z)\left(\frac{\partial P_x(x,z,t)}{\partial x}+\frac{\partial P_z(x,z,t)}{\partial x}\right)$$

$$\frac{\partial R(x,z,t)}{\partial t}+\gamma_z(x)R(x,z,t)$$
$$=b(x,z)\left(\frac{\partial P_x(x,z,t)}{\partial z}+\frac{\partial P_z(x,z,t)}{\partial z}\right)$$

که به‌منظور جداسازی معادلات، مشتقات افقی و قائم $P(x,z,t)$ به مولفه‌های افقی و قائم $P_x(x,z,t)$ و $P_z(x,z,t)$ تجزیه شده‌اند، به‌گونه‌ای که $P=P_x+P_z$ توابع یک‌بعدی γ_x و γ_z جملات میرایی هستند که رفتار لایه جاذب را در چهار طرف مدل تعیین می‌کنند. این توابع میرایی درون مدل زمین‌شناسی مقداری برابر صفر و درون ناحیه جاذب مقادیر غیرصفر دارند. هوستت و همکاران (۲۰۰۴) رابطه زیر را برای جملات میرایی پیشنهاد داده‌اند:

$$\gamma(x)=c_{PML}\cos(\frac{\pi}{2}\frac{x}{L}) \tag{۳}$$

که L پهنای ناحیه جاذب PML و x یک مختصات محلی درون لایه PML است که مبدا آن لبه بیرونی مدل زمین‌شناسی است. مقدار c_{PML} نیز با توجه به پهنای لایه PML با آزمون و خطا تعیین می‌شود. برای به‌دست آوردن پاسخ در حیطه فرکانس، دستگاه معادلات (۲) به حیطه فرکانس برده می‌شود و با در نظر گرفتن دو تابع جدید $\xi(x)=1+i\,\gamma(x)/\omega$ و $\xi(z)=1+i\,\gamma(z)/\omega$ و همچنین خاصیت مشتق در حیطه فرکانس،

$$\frac{\partial P(t)}{\partial t}\Leftrightarrow -iwP(w)$$

معادله موج به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{aligned}&\frac{-i\omega\xi(x)}{K(x,z)}P_x(x,z,\omega)\\&=\frac{\partial Q(x,z,\omega)}{\partial x}+S(x,z,\omega)\\&\frac{-i\omega\xi(z)}{K(x,z)}P_z(x,z,\omega)\\&=\frac{\partial R(x,z,\omega)}{\partial z}\end{aligned} \tag{۴}$$

$$\begin{aligned}&-i\omega Q(x,z,\omega)\\&=\frac{b(x,z)}{\xi(x)}\frac{\partial P(x,z,\omega)}{\partial x}\\&-i\omega R(x,z,\omega)\\&=\frac{b(x,z)}{\xi(z)}\frac{\partial P(x,z,\omega)}{\partial z}\end{aligned}$$

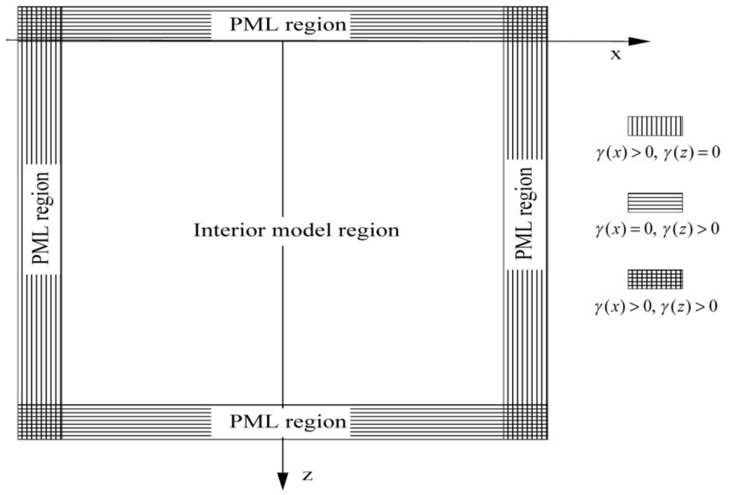
بعد از حذف معادلات وابسته به Q و R و جمع کردن مولفه‌های افقی و عمودی فشار (P_x و P_z) می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\xi(x)}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{b(x,z)}{\xi(x)}\frac{\partial P(x,z,\omega)}{\partial x}\right)\\&+\frac{1}{\xi(z)}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{b(x,z)}{\xi(z)}\frac{\partial P(x,z,\omega)}{\partial z}\right)\\&+\frac{\omega^2P(x,z,\omega)}{K(x,z)}=S(x,z,\omega)\end{aligned} \tag{۵}$$

۲-۲ تقریب تفاضل متناهی

با استفاده از تقریب مرتبه دوم که کلی و همکاران (۱۹۷۶) عرضه کرده‌اند، عملگرهای تفاضل متناهی را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{b(x,z)}{\xi_x(x)}\frac{\partial P(x,z,\omega)}{\partial x}\right)\right]_{i,j}\approx\frac{1}{\Delta^2}\left(\begin{aligned}&\frac{b_{i+1/2,j}}{\xi_{xi+1/2}}(P_{i+1,j}-P_{i,j})\\&-\frac{b_{i-1/2,j}}{\xi_{xi-1/2}}(P_{i,j}-P_{i-1,j})\end{aligned}\right)$$
$$\left[\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{b(x,z)}{\xi_z(z)}\frac{\partial P(x,z,\omega)}{\partial z}\right)\right]_{i,j}\approx\frac{1}{\Delta^2}\left(\begin{aligned}&\frac{b_{i,j+1/2}}{\xi_{zi+1/2}}(P_{i,j+1}-P_{i,j})\\&-\frac{b_{i,j-1/2}}{\xi_{zi-1/2}}(P_{i,j}-P_{i,j-1})\end{aligned}\right) \tag{۶}$$



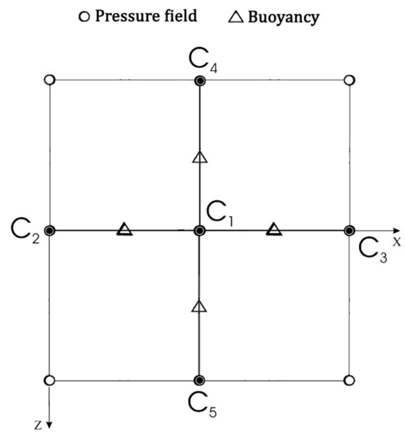
شکل ۱. لایه جاذب PML. رفتار توابع میرایی $\gamma(x)$ و $\gamma(z)$ در نواحی متفاوت چهارگانه بالا، پایین، چپ و راست با هاشور نشان داده شده است.

که $\xi_{xi\pm1/2}=\frac{1}{2}(\xi_{xi\pm1}+\xi_{xi})$ و $b_{i\pm1/2,j}=\frac{1}{2}(b_{i\pm1,j}+b_{i,j})$ و Δ فاصله نقاط شبکه پس از گسسته‌سازی است . بعد از جای‌گذاری عملگر تفاضل متناهی در معادله (۵) معادله تفاضل متناهی معادله موج به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\frac{\omega^2}{K_{i,j}}P_{i,j}= -\frac{1}{\xi_{xi}\Delta^2}\begin{pmatrix}\frac{b_{i+1/2,j}}{\xi_{xi+1/2}}(P_{i+1,j}-P_{i,j})\\ -\frac{b_{i-1/2,j}}{\xi_{xi-1/2}}(P_{i,j}-P_{i-1,j})\end{pmatrix} -\frac{1}{\xi_{zi}\Delta^2}\begin{pmatrix}\frac{b_{i,j+1/2}}{\xi_{zi+1/2}}(P_{i,j+1}-P_{i,j})\\ -\frac{b_{i,j-1/2}}{\xi_{zi-1/2}}(P_{i,j}-P_{i,j-1})\end{pmatrix}+S_{i,j} \qquad (۷)$$

که $P_{i,j}$ نمایانگر فشار روی یک نقطه دلخواه شبکه با اندیس (i,j) و $S_{i,j}$ تابع چشمه پس از گسسته سازی است. همچنین به دلیل استفاده از شبکه استگر، پارامتر شناوری ($b_{i,j}$) می‌باید در موقعیت‌های میانی نقاط شبکه درونیابی شود (شکل ۲). بدین ترتیب ضرایب پنج تایی استنسیل تفاضل متناهی به صورت زیر ظاهر می‌شوند:

$$\begin{aligned}
C_1 &= \frac{\omega^2}{K_{i,j}} -\frac{1}{\xi_{xi}\Delta^2}\left(\frac{b_{i+1/2,j}}{\xi_{xi+1/2}}+\frac{b_{i-1/2,j}}{\xi_{xi-1/2}}\right) -\frac{1}{\xi_{zi}\Delta^2}\left(\frac{b_{i,j+1/2}}{\xi_{zi+1/2}}+\frac{b_{i,j-1/2}}{\xi_{zi-1/2}}\right)\\
C_2 &= \frac{1}{\xi_{xi}\Delta^2}\frac{b_{i-1/2,j}}{\xi_{xi-1/2}}\\
C_3 &= \frac{1}{\xi_{xi}\Delta^2}\frac{b_{i+1/2,j}}{\xi_{xi+1/2}}\\
C_4 &= \frac{1}{\xi_{zj}\Delta^2}\frac{b_{i,j-1/2}}{\xi_{zj-1/2}}\\
C_5 &= \frac{1}{\xi_{zj}\Delta^2}\frac{b_{i,j+1/2}}{\xi_{zj+1/2}}
\end{aligned} \qquad (۸)$$



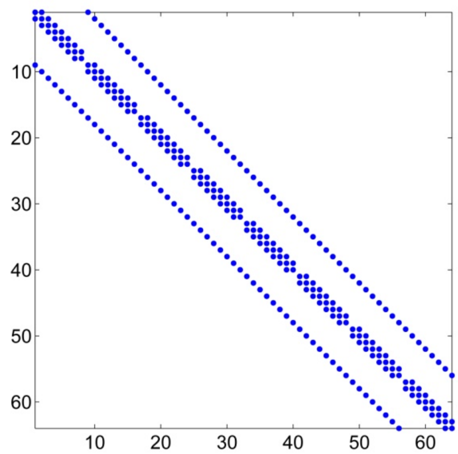
شکل ۲. نمایش استنسیل تفاضل متناهی استگر. میدان فشار (دایره ها) روی گره ها محاسبه می‌شود درحالی‌که شناوری (مثلث‌ها) به صورت افقی و قائم روی نقاط مینی درونیابی می‌شود. استنسیل پنج‌تایی عملگر تفاضل متناهی با $C_1, C_2 \ldots C_5$ نمایش داده شده است.

معادله گسسته حیطه فرکانس (۷) منجر به یک دستگاه معادلات خطی بسیار بزرگ می‌شود که می‌توان آن‌را به صورت ماتریسی بیان کرد:

$$FP = S \tag{۹}$$

که F ماتریس امپدانس (impedance matrix) نامیده می‌شود و به خواص فیزیکی محیط و فرکانس وابسته است. P بردار حاوی میدان فشار و S نیز بردار حاوی تابع چشمه فشاری است. در این معادله ماتریس F و بردار S معلوم و بردار P مجهول مسئله است . به دلیل استفاده از لایه جاذب در کران‌های مدل، ماتریس F مختلط و نامتقارن است. اگر شبکه دارای nz سطر و nx ستون باشد ماتریس F دارای $(nx \times nz)^2$ عضو می‌شود ($nx \times nz$ سطر و $nx \times nz$ ستون) که با در نظر گرفتن رهیافت حاضر $5 \times nx \times nz - 2 \times (nx + nz)$ تای آنها غیرصفر خواهند بود. ماتریس F ماتریسی بزرگ اما تُنُک (sparse) است که عضوهای غیرصفر آن روی قطر اصلی و چند قطر فرعی مجاور واقع شده‌اند (شکل ۳). برای هر مولفه فرکانسی می‌باید معادله (۹) حل شود تا مولفه فرکانسی نظیر میدان موج به‌دست آید.

بدیهی است با توجه به ابعاد ماتریس F محاسبه وارون آن مقرون به صرفه نیست زیرا ماتریس F^{-1} مولفه‌های غیرصفر زیادی پیدا می‌کند و علاوه بر حجم زیاد محاسبات، حجم زیاد حافظه را برای ذخیره‌سازی می‌طلبد. برای غلبه بر این مشکل، روش تجزیه ماتریس به عضوهای L و U (بالامثلثی و پایین‌مثلثی) یا به عبارت دیگر استفاده از حل کننده‌های مستقیم (direct solver) در دستور کار قرار می‌گیرد. در این زمینه محققان الگوریتم‌های گوناگونی را نظیر UMFPACK، MUMPS، Super LU، PARDISO، SuiteSparseQR و مانند آن عرضه کرده‌اند که تلاش همهٔ آنها این است که در ساخت عضوهای L و U کمترین عضوهای غیرصفر ایجاد شود.



شکل ۳. الگوی تنکی ماتریس F برای حالتی که $nx = nz = 8$ باشد. در این حالت تعداد کل عضوهای ماتریس F شامل ۴۰۹۶ درایه است که ۲۲۸ عدد از آنها غیرصفر هستند. عضوهای غیرصفر روی قطر اصلی و دو قطر فرعی مجاور توزیع شده‌اند.

در ایـن مقالـه، از روش UMFPACK استـفاده شـده اسـت. روش UMFPACK بـا استـفاده از نظریـه گـراف نسبت به تجزیه ماتریس F به عضو L و U اقدام می‌کند و پس از آن با ضرب مقادیر حاصل در جملـه سـمت راسـت معادله (۹) مولفه میـدان فـشار محاسـبه مـی‌شـود. در روش UMFPACK همهٔ تلاش خود را به کار می‌گیرنـد کـه در

حین تجزیه ماتریس F، کمترین عضوهای غیرصفر ایجاد شود و محاسبات با سرعت بیشتر و کمترین نیاز به حافظه صورت پذیرد. تجزیه ماتریس F فقط یک‌بار به ازای هر مولفه فرکانسی صورت می‌گیرد که این امر روش پیش‌گفته را برای مدل‌سازی‌های چند چشمه‌ای مناسب می‌سازد (پرت و ورتینگتون، ۱۹۹۰).

۲-۳ مدل‌سازی چشمه‌های چندگانه

به منظور مدل‌سازی چند چشمه‌ای کافی است جملات اضافی مربوط به سایر چشمه ها را به صورت بردارهایی به معادله (۹) اضافه کرد:

$$F[P_1,P_2,P_3,\ldots]=[S_1,S_2,S_3,\ldots] \tag{۱۰}$$

این معادله دارای چندین جمله سمت راست است که $S_1, S_2, S_3 \ldots$ بردارهای نظیر چشمه‌های متفاوت هستند. زمان اجرای محاسبات برای حل معادله با جملات سمت راست چندگانه (۱۰) تقریباً برابر با زمان حل مسئله تک چشمه‌ای است زیرا زمان‌برترین قسمت محاسبات همان تجزیه ماتریس F به عضوهای L و U است که پس از عملی ساختن آن احتساب چشمه‌های اضافی فقط یک ضرب ماتریسی ساده به محاسبات می‌افزاید.

۲-۴ پاشندگی عددی و دگرنامی زمانی

انتخاب فواصل گسسته‌سازی مکانی در تفاضل متناهی و همچنین مولفه‌های فرکانسی مسئله مهمی‌در مدل‌سازی انتشار امواج در روش FDFD است. یک دیدگاه ایده‌آل این است که Δ و فاصله مولفه‌های فرکانسی (df) را تا جای ممکن کوچک انتخاب کرد تا خطای محاسبات کاهش یابد، ولی این امر باعث افزایش حجم محاسبات می‌شود و کارایی الگوریتم را کاهش می‌دهد. از طرفی بزرگ انتخاب کردن مقدار Δ نیز نمونه‌برداری ناقص مکانی میدان موج و در نتیجه پاشندگی عددی (numerical dispersion) را در پی دارد. می‌توان نشان داد که می‌باید حداقل ۱۰ نمونه به ازای کوچک‌ترین طول موج در نظر گرفته شود تا خطای پاشندگی تا حد امکان کوچک باقی بماند (جو و همکاران، ۱۹۹۶). همچنین طبق نظریه نمونه‌برداری، اگر $df>1/t_{\max}$ (t_{max} زمان بیشنه مدل‌سازی) باشد در بازگشت به حیطه زمان دگرنامی زمانی روی خواهد داد. این به آن معنی است که تناوبی بودن تبدیل فوریه معکوس باعث می‌شود که نمونه‌های زمانی بزرگ‌تر از t_{max} حول محور زمان تا بخورند و به صورت مولفه‌های زمانی کوچک‌تر ظاهر شوند. به‌منزلهٔ ترفند تکمیلی، برای تضعیف مولفه های زمانی دگرنامی، می‌توان از روش فرکانس مختلط استفاده کرد (مالیک و فریزر، ۱۹۸۷). با در نظر گرفتن خاصیت انتقالی تبدیل فوریه می‌توان به جای $P(\omega)$ مقدار $P(\omega+i\alpha)$ را محاسبه کرد که در اینجا α عددی کوچک و حقیقی است:

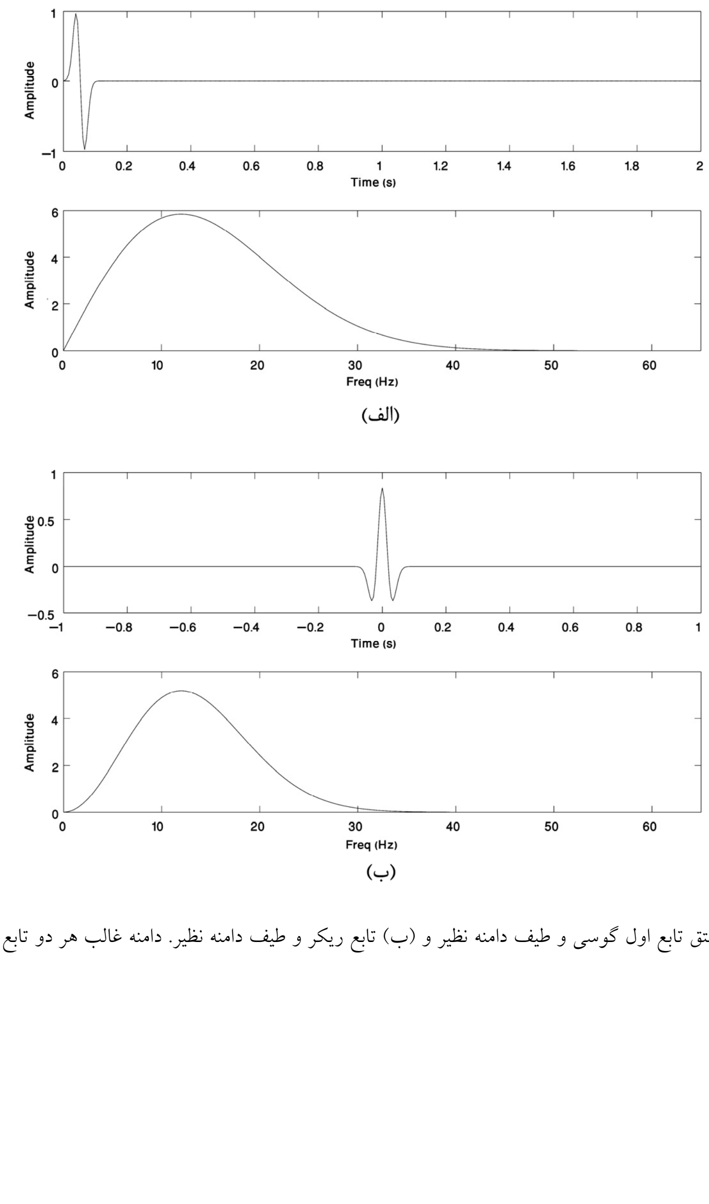
$$p(t)\exp^{-\alpha t} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \exp^{-i\omega t} P(\omega+i\alpha) \tag{۱۱}$$

با استفاده از این روش مولفه‌های دگرنام شده سیگنالی که در حیطه زمان به‌دست می‌آیند در مقدار کوچکی ضرب و بدین‌ترتیب تضعیف می‌شوند (از دیدگاه فیزیکی وجود یک مولفه کوچک موهومی باعث ایجاد پدیده جذب می‌شود، به‌گونه‌ای که هرچه زمان بیشتری می‌گذرد، دامنه سیگنال بیشتر کاهش می‌یابد). در این مقاله، از مقدار پارامتر $\alpha=\ln(50)/t_{\max}$ که مالیک و فریزر (۱۹۸۷) معرفی کرده‌اند استفاده شده است.

۳ الگوریتم محاسبات

برای مدل‌سازی انتشار امواج آکوستیکی در محیط دوبعدی با الگوریتم FDFD در محیط MATLAB

برنامه‌نویسی صورت گرفته است. ورودی برنامه‌ها شامل ماتریس میدان سرعت، میدان چگالی، تابع چشمه، مختصات چشمه‌ها و مختصات گیرنده‌ها، بردار حاوی مولفه‌های فرکانسی و خصوصیات لایه PML هستند . در الگوریتم FDFD حلقه اصلی حول مولفه‌های فرکانسی عمل می‌کند و در هر تکرار ماتریس F نظیر مولفه فرکانسی آن تکرار تولید می‌شود. ماتریس F بسیار بزرگ است و نمی‌توان کل آن را ذخیره کرد ولی از آنجا که ماتریسی تُنک است می‌توان با ذخیره کردن عضوهای غیرصفر، آن را به صورت تنک ذخیره نمود. در ادامه، مولفه فرکانسی نظیر چشمه در جمله سمت راست معادله (۹) در بردار S جای‌گذاری می‌شود. عضوهای بردار S همگی به‌جز عضوی که نظیر محل چشمه است، صفر هستند ازاین‌رو می‌توان آن را نیز به صورت تنک ذخیره کرد. از توابع مشتق اول گاوسی، ریکر و یا انواع دیگر می‌توان درحکم چشمه استفاده کرد. شکل ۴ تابع مشتق اول گاوسی و تابع ریکر و همچنین طیف فرکانسی نظیر آنها را برای حالتی که فرکانس غالب هر دو آنها ۱۲ هرتز باشد نشان می‌دهد. همان‌طور که در این شکل پیدا است طیف دامنه تابع ریکر با سرعت بیشتری به سمت صفر می‌گراید، ازاین‌رو مدل‌سازی با استفاده از این تابع به مولفه‌های فرکانسی کمتری نیازمند است و به همین دلیل استفاده از تابع ریکر ترجیح داده می‌شود.

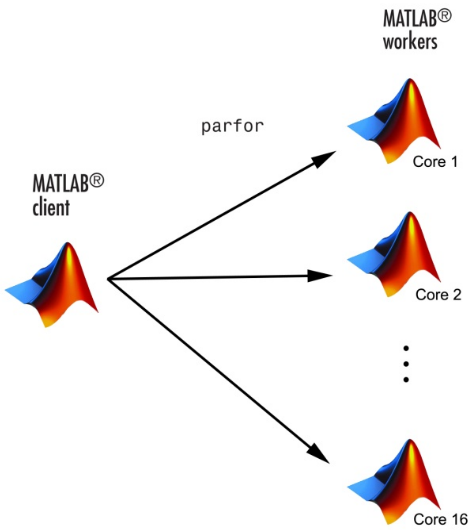


شکل ۴. (الف) مشتق تابع اول گوسی و طیف دامنه نظیر و (ب) تابع ریکر و طیف دامنه نظیر. دامنه غالب هر دو تابع ۱۲ هرتز است.

در مرحله آخر با استفاده از الگوریتم UMFPACK معادله ماتریسی (۹) حل می‌شود و مولفه تک فرکانس میدان موج به‌دست می‌آید. برای به‌دست آوردن لرزه‌نگاشت در حیط زمان می‌باید به ازای همهٔ مولفه‌های فرکانسی، میدان موج را محاسبه و با استفاده از تبدیل فوریه معکوس لرزه‌نگاشت را در حیطه زمان بازسازی کرد. ازآنجاکه محاسبه مولفه‌های فرکانسی از هم مستقل‌اند، می‌توان از قابلیت پردازش موازی سود جست و محاسبه هریک از مولفه‌های فرکانسی را به یک پردازنده سپرد و در آخر حاصل پردازش پردازنده‌های متفاوت را یکجا ذخیره کرد. در این مقاله، برنامه‌ها روی رایانه پرسرعت موسسه ژئوفیزیک اجرا شد. این رایانه دارای چهار پردازنده چهارهسته‌ای است و بدین ترتیب می‌توان از وجود ۱۶ پردازنده سود جست و سرعت اجرای مدل‌سازی را ۱۶ برابر کرد (شکل ۵).

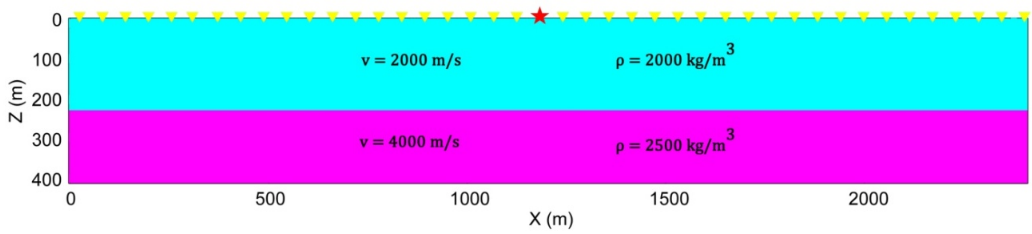
۴ مثال‌ها

نتایج مدل‌سازی انتشار موج با استفاده از الگوریتم FDFD روی سه مدل نشان داده شده است. در شکل ۶ خواص فیزیکی مدل مورد استفاده برای مدل‌سازی نمایش داده شده است. این مدل شامل دو لایه افقی است که لایه اول دارای سرعت ۲۰۰۰ متر بر ثانیه و چگالی ۲۰۰۰ کیلو گرم بر متر مکعب و لایه دوم دارای سرعت ۴۰۰۰ متر بر ثانیه و چگالی ۲۵۰۰ کیلو گرم بر متر مکعب است. چشمه و گیرنده‌ها روی سطح زمین واقع شده‌اند و تابع ریکر با فرکانس غالب ۱۲ هرتز درحکم چشمه استفاده شده است. با توجه به سرعت کمینه مدل و طیف فرکانسی چشمه، فاصله نقاط شبکه ۸ متر انتخاب شد که بدین‌ترتیب تقریباً از کوچک‌ترین طول موج ۱۰ بار نمونه برداری صورت می‌گیرد. با توجه با اینکه t_{max} برابر ۱/۵ ثانیه است، فاصله مولفه‌های فرکانسی df برابر ۰/۶۷ هرتز ($df = \frac{1}{t_{\max}} = \frac{1}{1.5s} = 0.67Hz$) انتخاب شده است و مدل‌سازی برای ۹۸ مولفه فرکانسی از مولفه فرکانس صفر تا ۶۵ هرتز صورت پذیرفته است. برای جذب امواج بازتابی از کرانه‌های مدل نیز پهنای لایه PML، ۲۰ نقطه شبکه در نظر گرفته شده است. شکل ۷ نحوه انتشار موج را در زمان‌های متفاوت نشان می‌دهد. همان‌طور که در این شکل پیدا است لایه جاذب PML به‌خوبی عمل کرده و از بازتاب امواج از کران‌های مدل جلوگیری کرده است.

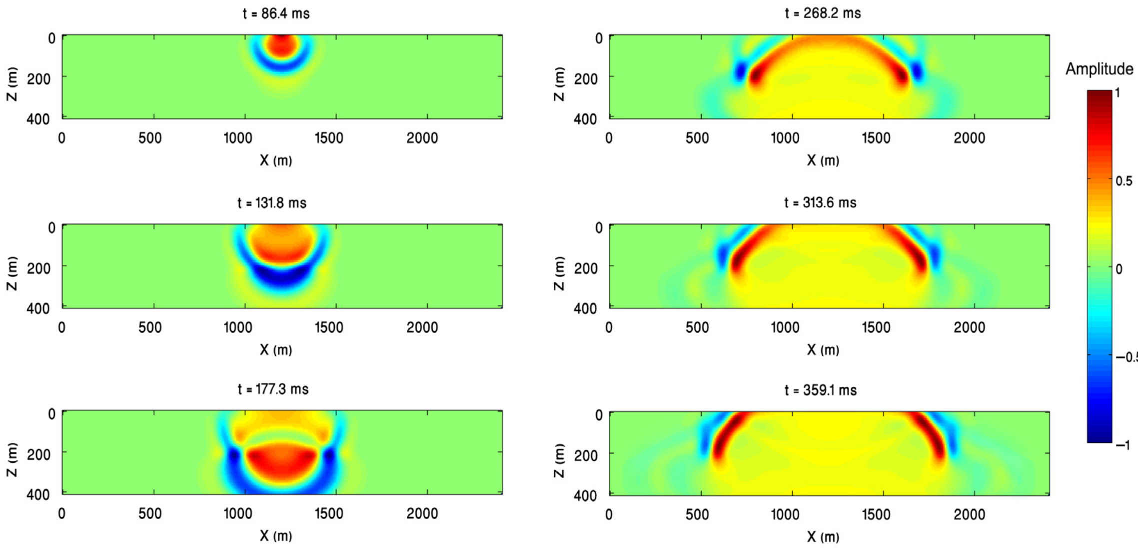


شکل ۵. نحوه توزیع حل مولفه‌های فرکانسی متفاوت روی پردازنده‌های متفاوت. parfor در این شکل به معنای parallel for loop است.

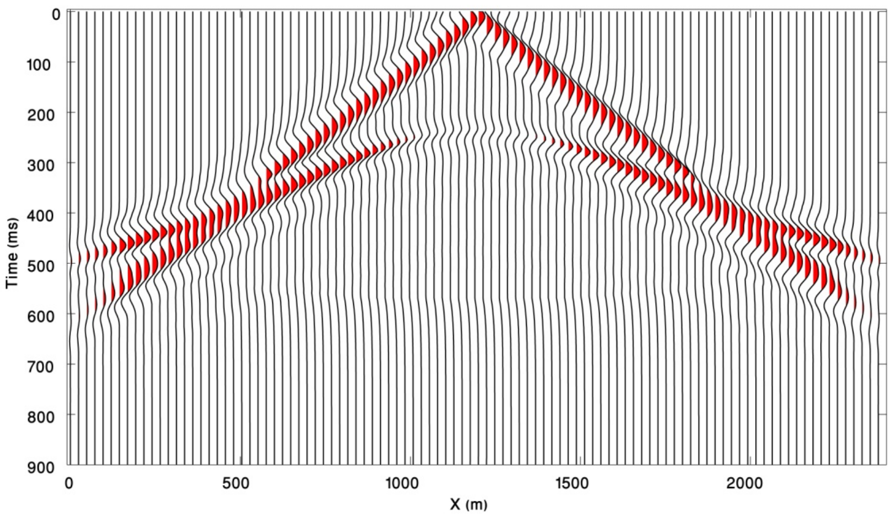
شکل ۸ لرزه‌نگاشت چشمه مشترک نظیر گیرنده‌های نشان داده شده در شکل ۶ را نشان می‌دهد. در این مثال فاصله گیرنده‌ها ۲۴ متر بوده است. امواج مستقیم، امواج شکست مرزی و بازتاب ناشی از لایه اول به خوبی قابل مشاهده است.



شکل ۶. مدل زمین‌شناسی مثال اول. چشمه با علامت ستاره و گیرنده‌ها با مثلث نمایش داده شده‌اند.



شکل ۷. نحوه انتشار موج در مدل زمین‌شناسی دولایه در مراحل زمانی متفاوت.



شکل ۸. لرزه‌نگاشت چشمه مشترک حاصل ثبت میدان موج با گیرنده‌های واقع شده در سطح مدل زمین‌شناسی دولایه. امواج مستقیم و امواج شکست مرزی هر دو با برون‌راند خطی و بازتاب ناشی از لایه اول با برون‌راند هذلولی به‌خوبی قابل مشاهده هستند.

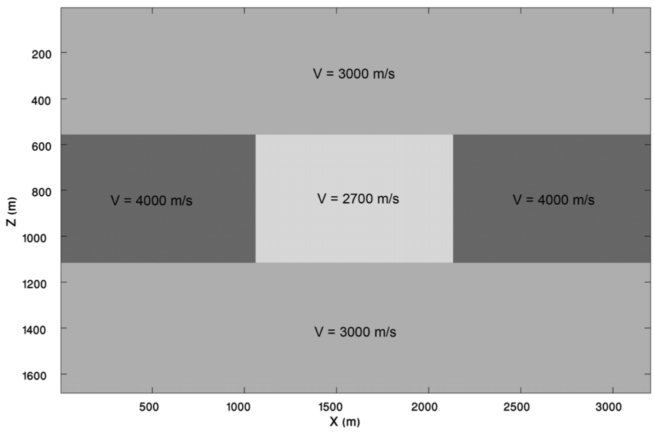
در مثال دوم نحوه انتشار موج در یک مدل پیچیده‌تر که به نوعی نمایانگر یک تله نفتی است مورد بررسی قرار گرفته است (شکل ۹). این مدل شامل سه لایه موازی است که لایه اول و سوم خصوصیات یکسانی دارند اما لایه دوم دارای تغییرات جانبی سرعت است . قطعه کم‌سرعت در وسط مدل با سرعت معادل ۲۷۰۰ متر بر ثانیه نمایانگر مخزن حاوی هیدروکربور است. در این مدل چگالی کل محیط ثابت فرض شده است. ابعاد این مدل شامل ۴۰۰ ×۲۱۰ سلول و فاصله نقاط شبکه ۸ متر است. پهنای لایه جاذب PML، ۲۰ نقطه شبکه در نظر گرفته شده است. چشمه نیز از نوع ریکر با فرکانس غالب ۱۲ هرتز است. شکل ۱۰ نحوه انتشار امواج را برای حالتی که چشمه در مختصات $x = ۱۶۰۰\ m$ و $z = ۸\ m$ واقع شده است، نشان می‌دهد. در زمان ۰/۴۰ ثانیه جبهه موج کاملاً وارد لایه دوم شده و پراش ناشی از فصل مشترک قطعه کم‌سرعت ۲۷۰۰ متر بر ثانیه و قطعه‌های پرسرعت ۴۰۰۰ متر بر ثانیه به‌خوبی قابل مشاهده است. همین رخداد در قسمت پایینی قطعه کم‌سرعت نیز روی می‌دهد (شکل ۱۰-ب). شکل ۱۱ لرزه‌نگاشت چشمه مشترک نظیر چشمه پیش‌گفته و گیرنده‌های واقع در سطح زمین را نشان می‌دهد. این لرزه‌نگاشت حاوی رخدادهای متنوعی است که با حروف اختصاری علامت‌گذاری شده است. رخداد DW که برون‌راند خطی دارد موج مستقیمی‌است که درون لایه اول منتشر می‌شود. رخداد H1 هذلولی ناشی از بازتاب جبهه موج از لایه اول است که به دلیل تغییرات سرعت جانبی تغییر قطبیدگی موجک در قسمت میانی هذلولی به‌خوبی قابل مشاهده است. رخدادهای D1 پراش ناشی از فصل مشترک قطعه کم‌سرعت ۲۷۰۰ متر بر ثانیه و قطعه های پرسرعت ۴۰۰۰ متر بر ثانیه نشان داده شده در شکل ۱۰-الف است . رخداد H2 نیز هذلولی ناشی از بازتاب جبهه موج از لایه دوم است . قسمت میانی این هذلولی به علت سرعت کم قطعه کم‌سرعت ۲۷۰۰ متر بر ثانیه دچار پایین افتادگی شده است. تغییرات قطبیدگی نیز در امتداد این لایه به‌خوبی قابل مشاهد است. رخدادهای D2 پراش ناشی از فصل مشترک قطعه کم‌سرعت ۲۷۰۰ متر بر ثانیه و قطعه‌های پرسرعت ۴۰۰۰ متر بر ثانیه نشان داده شده در شکل ۱۰-ب است. رخداد BT نیز ناشی از بازتاب چندگانه امواج از دیواره‌ها و کف قطعه کم‌سرعت است .

با توجه به قابلیت مدل‌سازی با چشمه‌های چندگانه، می‌توان به آسانی مقطع دورافت صفر حاصل از این مدل سرعتی را نیز محاسبه کرد (شکل ۱۲). در این حالت چشمه‌ها و گیرنده‌ها روی هم منطبق شده‌اند. در این شکل لایه اول و لایه دوم و تغییرات قطبیدگی، همچنین منحنی‌های پراش ناشی از تغییرات ناگهانی سرعتی به‌خوبی قابل مشاهده‌اند. همچنین تغییرات قطبیدگی در یال چپ و یال راست منحنی‌های پراش به‌خوبی دیده می‌شود. رخداد هذلولی شکل در قسمت پایین مقطع ناشی از بازتاب چندگانه امواج از دیواره‌ها و کف قطعه کم‌سرعت است . بدیهی است پس از مهاجرت، مدل سرعتی بازیابی خواهد شد.

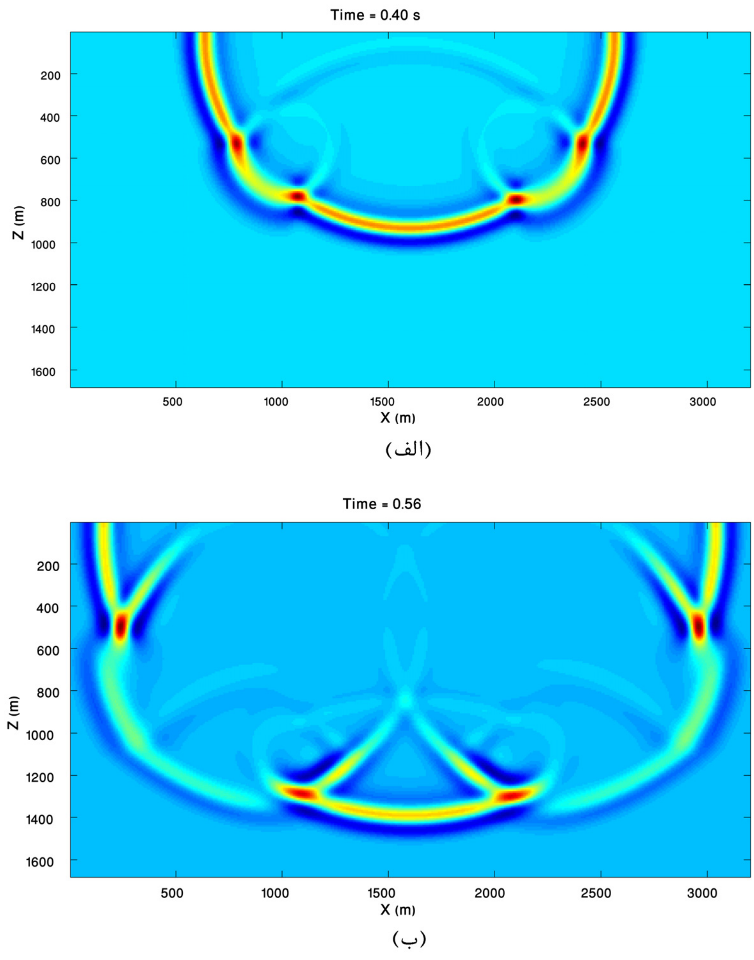
در مثال آخر نحوه انتشار موج در یک مدل پیچیده که دارای ساختاری گنبدنمکی است بررسی می‌شود (شکل ۱۳). ابعاد این مدل ۳۳۰ × ۱۶۰ سلول و فاصله نقاط شبکه ۸ متر است . پهنای لایه جاذب PML، ۲۰ نقطه شبکه در نظر گرفته شده است. گستره تغییرات سرعت در این مدل از ۲۰۰۰ تا ۵۰۰۰ متر بر ثانیه است . شکل ۱۴ مقطع دورافت صفر نظیر مدل سرعتی پیش‌گفته را نشان می‌دهد. در این شکل هذلولی‌های پراش و همچنین بازتاب ناشی از دیواره‌ای گنبدنمکی به‌خوبی قابل مشاهده است.

۵ بحث

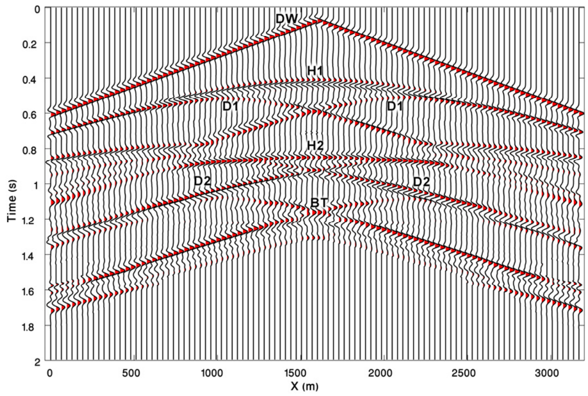
هرچند استفاده از روش FDFD برای مدل‌سازی انتشار امواج لرزه‌ای در مقایسه با روش‌های حیطه زمان (TDFD) نیازمند استفاده از امکانات نرم‌افزاری و سخت‌افزاری پیچیده‌تری است



شکل ۹. مدل زمین‌شناسی دارای تغییرات جانبی سرعت.



شکل ۱۰. نحوه انتشار موج در مدل زمین‌شناسی دارای تغییرات جانبی سرعت (شکل ۹) در مراحل زمانی متفاوت. پراش ناشی از تغییرات ناگهانی سرعت در قسمت بالا و پایین قطعه کم سرعت قابل مشاهده است.



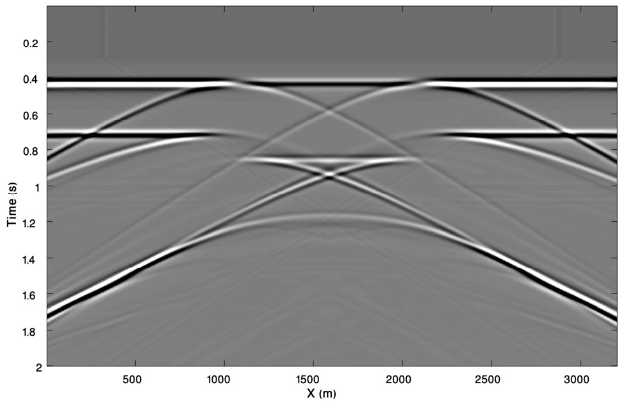
شکل ۱۱. لرزه‌نگاشت چشمه مشترک حاصل ثبت میدان موج با گیرنده‌های واقع شده در سطح زمین (شکل ۹). رخداد DW موج مستقیمی است که روی سطح زمین منتشر می‌شود. رخدادهای H1 و H2 هذلولی‌های ناشی از بازتاب جبهه موج از لایه اول و دوم هستند. رخدادهای D1 و D2 پراش ناشی از فصل مشترک قطعه کم‌سرعت و قطعه‌های پر سرعت‌اند. رخداد BT نیز ناشی از بازتاب چندگانه امواج از دیواره‌ها و کف قطعه کم سرعت است.

ولی به‌لحاظ وجود کنترل روی مولفه‌های فرکانسی در حین مدل‌سازی همچنین قابلیت مدل‌سازی همزمان چندین چشمه و کاربرد آن در توموگرافی شکل موج استفاده‌های روز افزونی در دانش لرزه‌شناسی پیدا کرده است. همانند روش‌های تفاضل متناهی در حیطه زمان، بزرگ‌ترین چشمه خطا در روش FDFD موجود نحوه گسسته‌سازی شبکه و تقریب‌های تفاضل متناهی در حل معادله موج است . هرچند تقریب‌های مرتبه بزرگ‌تر از دو در گسسته‌سازی تفاضل متناهی در حیطه زمان به‌کار می‌رود، ولی این کار در حیطه فرکانس با محدودیت همراه است. زیرا استفاده از تقریب‌های مرتبه بزرگ‌تر باعث بزرگ شدن ابعاد و گستره استنسیل می‌شود که این خود افزایش پهنای باند (bandwidth) ماتریس امپدانس و در نتیجه ایجاد مشکلات در حل معادله (۹) را به دنبال دارد.

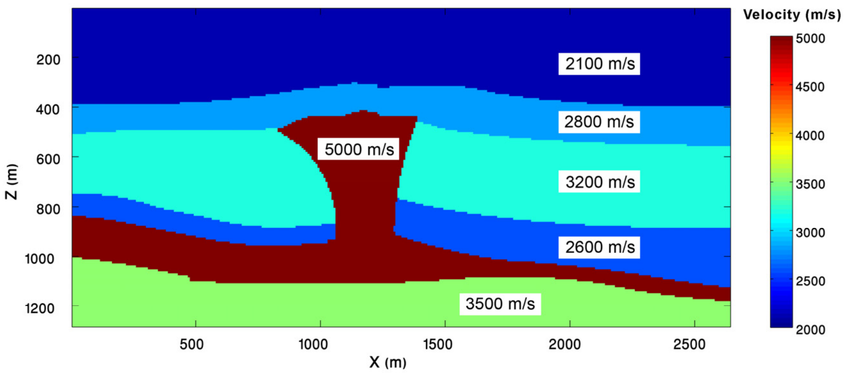
پاشندگی عددی عمده‌ترین چشمه خطا در روش FDFD تلقی می‌شود که مقدار آن در راستای اضلاع سلول‌ها (راستای افقی و قائم) کمتر و در راستای نیم‌ساز سلول‌ها بیشتر است؛ ولی اگر موارد با توجه شرایطی که در قسمت ۲-۴ بحث شد رعایت شود، خطا قابل چشم‌پوشی است. همچنین همان‌گونه که نتایج مثال‌های دو و سه (شکل‌های ۱۲ و ۱۴) نشان می‌دهند هم در مدل‌های سرعتی با تباین سرعتی زیاد (گنبدنمکی) و هم تباین سرعتی کم (تله‌نفتی) این روش به‌خوبی از عهده کار بر می‌آید و تنها ارضای شرایط نمونه‌برداری آن کفایت می‌کند. بدیهی است کوچک‌ترین ساختاری که قابل بررسی است سلولی به ابعاد Δ است که ابعاد آن در راستای افقی و راستای قائم برابر است. به عبارت دیگر می‌توان با کوچک کردن فاصله نقاط شبکه و افزایش فرکانس غالب چشمه، ساختارهای ریزتر را مدل‌سازی کرد. البته بدیهی است کوچک کردن ابعاد سلول باعث افزایش حجم محاسبات می‌شود.

۶ نتیجه‌گیری

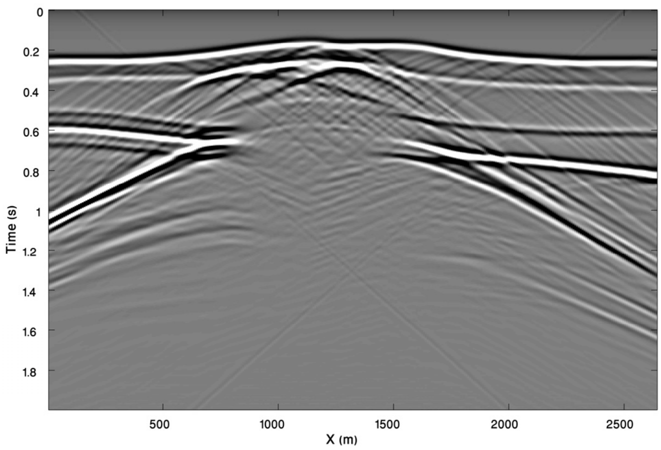
در این مقاله، تقریب مرتبه دوم معادله موج آکوستیک در حیطه فرکانس برای مدل‌سازی انتشار موج در محیط ناهمگن مورد استفاده قرار گرفت که حاصل کار یک عملگر تفاضل متناهی پنج‌تایی با گسترش متقارن افقی و قائم است. ازآنجاکه برای جلوگیری از خطای عددی در تفاضل متناهی در روش حاضر، حداقل ۱۰ نمونه به ازای کوچک‌ترین طول موج نیاز است، استفاده از این روش



شکل ۱۲. مقطع دورافت صفر نظیر مدل سرعتی دارای تغییرات جانبی سرعت شکل ۹.



شکل ۱۳. مدل سرعتی گنبد نمکی.



شکل ۱۴. مقطع دورافت صفر نظیر مدل سرعتی گنبد نمکی شکل ۱۱.

برای مدل‌های بزرگ توصیه نمی‌شود. برای حل معادله ماتریسی موج در حیطه فرکانس از الگوریتم UMFPACK استفاده شد که با توجه به سرعت زیاد آن در حل معادله و در دسترس بودن آن در نرم‌افزار MATLAB، استفاده از آن در حل این مسئله توصیه می‌شود. برای جلوگیری از بازتاب موج از کران‌های مدل از روش PML استفاده شد که استفاده از لایه‌ای با ضخامت ۲۰ نقطه شبکه نتایج مطلوبی حاصل کرد. برای نیل به نتایج بهتر می‌توان عرض لایه PML را افزود که البته باعث افزایش ابعاد مدل و درنتیجه کند شدن محاسبات می‌شود. با توجه به استقلال مولفه‌های فرکانسی، استفاده از امکانات پردازش موازی برای محاسبه مولفه متفاوت فرکانسی فشار با پردازنده‌های متفاوت، بسیار کارا است و این الگوریتم نسبت به روش‌های مدل‌سازی در حیطه زمان برتری دارد.

منابع

Berenger, J. P., 1994, A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves: Journal of Computational Physics, **114**, 185-200.

Davis, T. A., 2004, Algorithm 832: UMFPACK, an unsymmetric-pattern multifrontal method: ACM Transactions on Mathematical Software, **30**, 196-199.

Davis, T. A., and Duff, I. S., 1997, An unsymmetric-pattern multifrontal method for LU factorization: SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing, **18**, 140-158.

Herrmann, F. J., Erlangga, Y. A., and Lin, T. T. Y., 2009, Compressive simultaneous full-waveform simulation: Geophysics, **74**, A35-A40.

Hustedt, B., Operto, S., and Virieux, J., 2004, Mixed-grid and staggered-grid finite-difference methods for frequency-domain acoustic wave modeling: Geophysical Journal International, **157**, 1269-1296.

Jo, C. H., Shin, C. S., and Suh, J. H., 1996, An optimal 9 point, finite difference, frequency-space, 2-D scalar wave extrapolator: Geophysics, **61**, 529-537.

Kelly, K. R., Ward, R. W., Treitel, S., and Alford, R. M., 1976, Synthetic seismograms: a finite-difference approach: Geophysics, **41**, 2-27.

Lysmer, J., and Drake, L. A., 1972, A finite element method for seismology: Methods in Computational Physics: Volume 11. Seismology: Surface waves and earth oscillations, Academic Press, pp. 181-216.

Mallick, S., and Frazer, L. N., 1987, Practical aspects of reflectivity modeling: Geophysics, **52**, 1355-1364.

Marfurt, K. J., 1984, Accuracy of finite-difference and finite-elements modeling of the scalar and elastic wave equations: Geophysics, **49**, 533-549.

Pratt, R. G., 1990, Frequency domain elastic wave modeling by finite differences: A tool for cross-hole seismic imaging: Geophysics, **55**, 626-632.

Pratt, R. G., 1999, Seismic waveform inversion in the frequency domain, Part 1: Theory and verification in a physical scale model: Geophysics, **64**, 888-901.

Pratt, R. G., and Worthington, M. H., 1990, Inverse theory applied to multisource cross-hole tomography: Part-I: Acoustic wave-equation method: Geophysical Prospecting, **38**, 287-310.

Pratt, R. G., Shin, C., and Hicks, G. J., 1998, Gauss-Newton and full Newton methods in frequency-space seismic waveform inversion: Geophysical Journal International, **133**, 341-362.

Stekl, I., and Pratt, R., 1998, Accurate viscoelastic modeling by frequency-domain finite differences using rotated operators: Geophysics, **63**, 1779-1794.

Virieux, J., 1984, SH wave propagation in heterogeneous media, velocity stress finite difference method: Geophysics, **49**, 1259-1266.

Virieux, J., Operto, S., Ben-Hadj-Ali, H., Brossier, R., Etienne, V., Sourbier, F., Giraud, L., and Haidar, A., 2009, Seismic wave modeling for seismic imaging: The Leading Edge, **28**, 538-544.