

مقایسه عملکرد روش‌های آب‌فشرده و فشرده ترکیبی مرتبه ششم در گسسته‌سازی مکانی مدل آب کم‌عمق دولایه‌ای: نمایش امواج گرانی-لختی و راسبی خطی

سرمد قادر^{۱*}، فرهنگ احمدی‌گیوی^۱ و حکیم گلشاهی^۲

^۱استادیار، گروه فیزیک فضا، مؤسسه ژئوفیزیک دانشگاه تهران، تهران، ایران
^۲دانشجوی دکتری فیزیک دریا، دانشگاه آزاد اسلامی واحد علوم و تحقیقات، تهران، ایران

sghader@ut.ac.ir, ahmadig@ut.ac.ir, h_golshahy@yahoo.com

(تاریخ دریافت: ۱۳۸۹/۱/۲۰، تاریخ پذیرش: ۱۳۸۹/۶/۳۰)

چکیده

در این مقاله به بررسی دقت و مقایسه عملکرد دو روش فشرده، یعنی روش‌های آب‌فشرده و فشرده ترکیبی مرتبه ششم برای گسسته‌سازی مکانی شکل خطی‌شده معادلات آب کم‌عمق دولایه‌ای برای شبکه‌های گوناگون (یعنی شبکه‌های آراکاو و شبکه Z) پرداخته می‌شود. بدین منظور ابتدا روابط پاشندگی پیوسته دولایه‌ای امواج گرانی-لختی و امواج راسبی با استفاده از معادلات دولایه‌ای خطی‌شده معرفی می‌شود و سپس شکل عمومی روابط پاشندگی گسسته دولایه‌ای این امواج در شبکه‌های گوناگون عرضه می‌شود. شکل عمومی حاصل به آسانی امکان مقایسه دقت و میزان خطای تولید شده با روش‌های فوق را برای این امواج فراهم می‌کند. نتایج نشان می‌دهد که در مورد امواج گرانی-لختی، روش فشرده ترکیبی مرتبه ششم نسبت به روش آب‌فشرده هم مرتبه بهبود دارد و این مسئله در شبکه Z بسیار بارز است. در مورد امواج راسبی، وضعیت معکوس است، به گونه‌ای که روش فشرده ترکیبی تنها در شبکه آراکاو C نسبت به روش آب‌فشرده بهبود دارد. به‌طور کلی، در بین شبکه‌های به کار گرفته شده، هم در مورد امواج گرانی-لختی و هم در مورد امواج راسبی، شبکه Z دارای کمترین خطا است.

واژه‌های کلیدی: روش فشرده ترکیبی، روش آب‌فشرده، معادلات آب کم‌عمق دولایه، شبکه‌های آراکاو، شبکه Z

Comparison of the efficiency of the sixth-order super compact and combined compact methods for spatial discretization of two-layer shallow water model: presentation of linear inertia-gravity and Rossby waves

Sarmad Ghader^{1*}, Farhang Ahmadi-Givi¹, and Hakim Golshahy²

¹Space Physics Department, Institute of Geophysics, University of Tehran, Iran

²Islamic Azad University, Science and Research Branch, Tehran, Iran

(Received: 09 April 2010, accepted: 21 September 2010)

Summary

Many types of atmospheric and oceanic motions possess an oscillatory structure in both space and time, such as inertia-gravity waves and Rossby waves. This paper concentrates on these waves. Two-dimensional shallow-water models are usually used to describe these kinds of waves. The advantages of the shallow-water equations are their

*Corresponding author:

sghader@ut.ac.ir

*نگارنده رابط:

computational and mathematical simplicity relative to more complicated three-dimensional models. The single-layer shallow water models are extensively used in the numerical study of large scale atmospheric and oceanic motions. These simple models, however, provide no information regarding vertical motions in the atmosphere or oceans. The simple multilayer shallow-water models are usually employed to resolve this issue. In some regions of the oceans and seas, two-layer shallow-water equations are sufficient to account for the dynamics of fluids (e.g., the Strait of Gibraltar in the Atlantic Ocean, the Mediterranean Sea and the Strait of Hormoz in the Persian Gulf and the Oman Sea). Two-layer models are not only simple models of rotating-stratified fluid dynamics, but they are also proper models for the simulation of many phenomena in the ocean and atmosphere.

The compact finite-difference schemes are simple and powerful ways to reach the objectives of high accuracy and low computational cost. Compared with the traditional explicit finite-difference schemes of the same-order, compact schemes have proved to be significantly more accurate along with the benefit of using smaller stencil sizes, which can be essential in treating non-periodic boundary conditions. Applications of some families of the compact schemes, in particular the super compact finite difference method and the combined compact finite difference method, to spatial differencing in some idealized models of the atmosphere and oceans show that compact finite difference schemes can be considered as promising methods for the numerical simulation of atmosphere–ocean dynamics. Most of these studies apply compact finite difference methods to single-layer models of the atmosphere and oceans, but application to more complicated multi-layer model is lacking.

The linearized single-layer shallow-water equations have been used in many research studies as a tool for numerical accuracy assessment of different numerical schemes in a linear extent. In the present work, the extension of this idea to two-layer shallow-water equations is used. To this end, two general discrete dispersion relations, those of inertial-gravity and Rossby waves, for the linearized two-layer shallow-water equations on different numerical grids are derived. These general discrete dispersion relations can be used for the evaluation of the performance of any numerical scheme.

This paper is also focused on accuracy assessment of the sixth-order super compact (SCFDM) and sixth-order combined compact (CCFDM) finite difference schemes for spatial differencing of the linearized two-layer shallow-water equations on different numerical grids (i.e., Arakawa's A-E and Randall's Z grids). General discrete dispersion relations derived for the inertial-gravity waves and Rossby waves on different numerical grids are used to evaluate the accuracy of the sixth-order SCFDM and sixth-order CCFDM schemes for spatial differencing of the linearized two-layer shallow-water equations.

In general, for both inertia-gravity and Rossby waves, the minimum error occurs on the Z grid using either the sixth-order SCFDM or the sixth-order CCFDM method. For Randall's Z grid, it is observed that the sixth-order CCFDM method exhibits a substantial improvement in measuring the frequency of linear inertia-gravity waves of the two-layer shallow-water model on the sixth-order SCFDM method. This property is not observed for other numerical grids. For Rossby waves, the sixth-order CCFDM shows improvement on the sixth-order SCFDM method on Arakawa's C grid. In addition, for Arakawa's C grid it can be observed that the baroclinic and barotropic modes of the inertia gravity waves in the under-resolved case show dissimilar behavior.

Key words: Combined compact scheme, super compact scheme, two-layer shallow-water equations, Arakawa grids, Z grid

۱ مقدمه

بسیاری از حرکت‌های جوی و اقیانوسی، شکل موجی دارند که هم در فضا و هم در زمان دارای خاصیت تناوبی هستند. برای توصیف این امواج، می‌توان از دینامیک امواج آب کم‌عمق دوبعدی استفاده کرد. معادلات آب کم‌عمق، لایه نازکی از شارهای با چگالی ثابت را توصیف می‌کند، به گونه‌ای که مؤلفه‌های افقی سرعت در راستای قائم تغییر نمی‌کنند و تقریب هیدرواستاتیک در نظر گرفته می‌شود. این معادلات به طور گسترده در زمینه‌های گوناگون جوی و اقیانوسی به کار می‌روند (والیس، ۲۰۰۶؛ چو و همکاران، ۲۰۰۷). به علاوه، توصیف همه فرایندهای فیزیکی اقیانوسی در یک مدل سه‌بعدی بسیار دشوار است. از این رو یکی از مزایای استفاده از مدل‌های ساده‌تر مانند معادلات آب کم‌عمق، نسبت به معادلات سه‌بعدی، ساده‌تر بودن مسائل محاسباتی و ریاضی آن است. در معادلات آب کم‌عمق با اضافه کردن لایه‌ها، می‌توان اثرات چینه‌بندی را نیز در نظر گرفت. در برخی از نواحی اقیانوسی و یا دریاها از جمله تنگه جبل الطارق و تنگه هرمز، می‌توان چینه‌بندی چگالی آب را با تقریب خوبی به صورت دولایه فرض کرد و برای توصیف دینامیک چنین محیط‌هایی معادلات آب کم‌عمق دولایه‌ای را مورد استفاده قرار داد (چن و پنگ، ۲۰۰۶؛ کاسترو و همکاران، ۲۰۰۷). در حقیقت، مدل آب کم‌عمق دولایه، نه تنها مدلی ساده از یک شار چینه‌بندی شده است، بلکه به شکل مطلوبی، مدلی مناسب برای بسیاری از پدیده‌های موجود در جو و اقیانوس است (گیل، ۱۹۸۲).

در اغلب موارد، به دلیل نبود حل تحلیلی برای معادلات حاکم بر فرایندهای جوی و اقیانوسی، می‌باید از روش‌های عددی استفاده کرد. روش تفاضل متناهی از رایج‌ترین روش‌های عددی برای حل معادلات حاکم بر دینامیک شارها است. در سال‌های اخیر، با توجه به

پیچیدگی ذاتی شارش‌های جوی و اقیانوسی، گرایش به سمت افزودن بر دقت در شبیه‌سازی عددی این شارش‌ها، افزایش یافته است. روش‌های تفاضل متناهی فشرده با توجه به کارایی مناسبی که در حل معادلات حاکم بر دینامیک شارها از خود نشان داده‌اند (هرش، ۱۹۷۵؛ لل، ۱۹۹۲)، در تحقیقات اخیر مورد توجه قرار گرفته‌اند. برای نمونه، می‌توان به کارهای قادر و اصفهانیان (۱۳۸۵)، اصفهانیان و قادر (۱۳۸۶)، یان‌ون و دکسون (۱۹۹۶)، دکسون و یان‌ون (۲۰۰۱)، نیپی و ایشی (۲۰۰۳)، اصفهانیان و همکاران (۲۰۰۵)، قادر و اصفهانیان (۲۰۰۶)، محب الحجه و دریچل (۲۰۰۷) و قادر و همکاران (۲۰۰۹) در مورد روش‌های آب‌فشرده مرتبه ششم (SCD6) و فشرده ترکیبی مرتبه ششم (CCD6) اشاره کرد.

در این تحقیق، ابتدا معادلات آب کم‌عمق برای یک محیط دولایه بیان می‌شود (سلمون، ۲۰۰۲؛ والیس، ۲۰۰۶). در ادامه، برای بررسی موردی، با توجه به اهمیت ویژگی‌های رابطه پاشندگی امواج گرانی-لختی و امواج راسبی در دینامیک جو و اقیانوس، رابطه پاشندگی پیوسته دولایه‌ای این امواج معرفی می‌شود. بدین منظور، از تقریب صفحه f برای مسئله امواج گرانی-لختی و از تقریب صفحه β برای مسئله امواج راسبی در معادلات آب کم‌عمق دولایه‌ای استفاده شده است. رابطه پاشندگی گسسته امواج گرانی-لختی در یک مدل آب کم‌عمق تک‌لایه را آراکاو و لمب (۱۹۷۷) برای شبکه‌های آراکاو و رندال (۱۹۹۴) برای شبکه Z معرفی کرده‌اند که در آن برای گسسته‌سازی مکانی معادلات، طرحواره مرتبه دوم مرکزی به کار رفته است. در یک محیط تک‌لایه، بلايو (۲۰۰۰) با ارائه شکل عمومی رابطه پاشندگی گسسته امواج گرانی-لختی و امواج راسبی برای شبکه‌های آراکاو، عملکرد طرحواره‌های گوناگون، از جمله CCD6 را مورد مقایسه قرار داده است. اصفهانیان و همکاران (۲۰۰۵) نیز شکل عمومی رابطه پاشندگی گسسته

به منزله روش‌های تفاضل متناهی با دقت و توانایی تفکیک زیاد در گسسته‌سازی مکانی معادلات آب کم‌عمق دولایه‌ای برای شبکه‌های آراکاو A تا E و شبکه Z است. بدین منظور، روش‌های SCD6 و CCD6 برای حل معادلات آب کم‌عمق دولایه خطی شده به کار رفته و رابطه پاشندگی گسسته دولایه‌ای امواج گرانی-لختی و راسی در شبکه‌های گوناگون مورد ارزیابی قرار می‌گیرد. طرحواره‌های به کار رفته در محاسبه مشتق اول S_1 و مشتق دوم S_2 در نقاط گره (در نقطه z_m) از شبکه و همین‌طور برای درون‌یابی S_0 و مشتق اول $S_{\frac{1}{2}}$ در نقاط میانی (در نقطه $z_m + \frac{1}{2}$)، در جدول ۱ آورده شده است. در این جدول عملگرهای $\Delta_x^{\circ} = (\Delta_x^+ + \Delta_x^-) / 2$ و $\Delta_x^2 = \Delta_x^+ \Delta_x^- = \Delta_x^- \Delta_x^+$ براساس نمادگذاری $f_z = f_{z+1} - f_z$ و $\Delta_x^- f_z = f_z - f_{z-1}$ تعریف شده‌اند و d فاصله شبکه‌ای است. اساس محاسبه این طرحواره‌ها که شامل طرحواره درون‌یابی مرتبه ششم (IS6)، آب‌فشرده مرتبه ششم (SCD6) و فشرده ترکیبی مرتبه ششم (CCD6) هستند، بسط تیلور حول نقطه گره و حول نقطه میانی از شبکه است.

۳ معادلات آب کم‌عمق دولایه‌ای

برای توصیف دینامیک یک محیط دولایه که چگالی آب در هر لایه مقداری ثابت است، می‌توان از معادلات آب کم‌عمق به صورت مجزا در هر لایه استفاده کرد. بدین منظور، معادلات تکانه در دو بعد و معادله پایستگی جرم برای یک شاره تراکم ناپذیر با در نظر گرفتن تقریب هیدرواستاتیک برای هر لایه نوشته می‌شوند و از چگالی شاره بالای آب صرف‌نظر می‌شود (گیل، ۱۹۸۲).

امواج گرانی-لختی را برای شبکه Z عرضه کرده‌اند. در راستای این تحقیقات، در مقاله حاضر، پس از معرفی شکل عمومی رابطه پاشندگی گسسته دولایه‌ای امواج گرانی-لختی و راسی برای شبکه‌های آراکاو A تا E (میسینگر و آراکاو، ۱۹۷۶) و شبکه Z (رنдал، ۱۹۹۴)، روابط پیش‌گفته برای بررسی توانایی و دقت دو روش تفاضل متناهی SCD6 و CCD6 مورد استفاده قرار می‌گیرند.

۲ روش آب‌فشرده و فشرده ترکیبی مرتبه ششم

در روش‌های تفاضل محدود فشرده متقارن استاندارد، مثل روش آب‌فشرده، برای تقریب مشتق اول، از خود تابع و مشتقات فرد آن و برای تقریب مشتق دوم، از خود تابع و مشتقات زوج آن استفاده می‌شود (لل، ۱۹۹۲؛ هرش، ۱۹۷۵). از دیگر روش‌های فشرده می‌توان به روش فشرده ترکیبی اشاره کرد که در این روش، مشتق اول و دوم به طور هم‌زمان تقریب زده می‌شوند (چو و فن، ۱۹۹۸، ۱۹۹۹، ۲۰۰۰؛ قادر و اصفهانیان، ۲۰۰۶). ویژگی این روش هنگامی بیشتر آشکار می‌شود که در معادلات حاکم، هم مشتق اول و هم مشتق دوم وجود داشته باشد. قادر و اصفهانیان (۲۰۰۶)، شکل عمومی طرحواره‌های تفاضل متناهی فشرده ترکیبی (GCCFD) را ارائه کرده‌اند. این شکل عمومی، در واقع خانواده‌ای از روش‌های فشرده سه‌نقطه‌ای با دقت و توانایی تفکیک زیاد است که می‌تواند برای هر مرتبه از دقت مورد نظر به کار گرفته شود. در این پژوهش، فرمول‌بندی روش آب‌فشرده نیز مطابق با تحقیق اصفهانیان و همکاران (۲۰۰۵) استفاده شده است.

هدف از پژوهش حاضر، بررسی دقت و توانایی تفکیک روش آب‌فشرده مرتبه ششم و فشرده ترکیبی مرتبه ششم

جدول ۱. طرحواره‌های مرتبه ششم برای درون‌یابی، محاسبه مشتق اول و مشتق دوم.

S_0	$\frac{3}{10} f_{j+\frac{3}{2}} + f_{j+\frac{1}{2}} + \frac{3}{10} f_{j-\frac{1}{2}} = \frac{3}{4} (f_{j+1} + f_j) + \frac{1}{20} (f_{j+2} + f_{j-1})$	IS6
$S_{\frac{1}{2}}$ S_1 S_2	$\begin{cases} f'_{j+\frac{1}{2}} - \frac{7}{254} (f'_{j+\frac{3}{2}} + f'_{j-\frac{1}{2}}) + \frac{17d}{254} (f''_{j+1} - f''_j) = \frac{120}{127d} (f_{j+1} - f_j) \\ f'_j + \frac{7}{16} (f'_{j+1} + f'_{j-1}) - \frac{d}{16} (f''_{j+1} - f''_{j-1}) = \frac{15}{16d} (f_{j+1} - f_{j-1}) \\ f''_j - \frac{1}{8} (f''_{j+1} + f''_{j-1}) + \frac{9}{8d} (f'_{j+1} - f'_{j-1}) = \frac{3}{d^2} (f_{j+1} - 2f_j + f_{j-1}) \end{cases}$	CCD6
$S_{\frac{1}{2}}$ S_1 S_2	$\begin{cases} f'_{j+\frac{1}{2}} = \left(\frac{320 (12 + \Delta_x^2)}{1920 + 240 \Delta_x^2 + \Delta_x^4} \right) (f_{j+1} - f_j) / 2d \\ f'_j = \left(\frac{10 (12 + \Delta_x^2) \Delta_x^\circ}{120 + 30 \Delta_x^2 + \Delta_x^4} \right) f_j / d \\ f''_j = \left(\frac{30 (12 + \Delta_x^2) \Delta_x^2}{360 + 60 \Delta_x^2 + \Delta_x^4} \right) f_j / d^2 \end{cases}$	SCD6

که در آن ρ چگالی، H ضخامت میانگین در هر لایه است و $g = (\rho_1 / \rho_2) g_0$ برای سادگی در نوشتار معرفی شده و f پارامتر کوریولیس است. اندیس‌های ۱ و ۲ به ترتیب معرف لایه‌های اول و دوم و زیرنویس‌های x و y نشان‌دهنده مشتق نسبت به مختصات x و y هستند. شکل ۱ طرحواره‌ای از یک محیط دولایه با عمق ثابت را نشان می‌دهد. لایه اول با چگالی کمتر روی لایه دوم با چگالی بیشتر قرار گرفته و چگالی در هر لایه مقداری ثابت است.

دستگاه معادلات (۱) را می‌توان در شبکه‌های آراکاو A تا E حل کرد، ولی در مورد شبکه Z بایستی معادلات را برحسب مؤلفه قائم تاوایی ($\zeta = \partial_x v - \partial_y u$)، واگرایی افقی ($\delta = \partial_x u + \partial_y v$) و ضخامت لایه (h) به صورت زیر بیان کرد:

با انتگرال‌گیری از معادله پیوستگی و استفاده از شرایط مرزی، معادله پیوستگی جرم برای هر لایه برحسب مؤلفه‌های افقی سرعت (u, v) و ضخامت لایه (h) به دست می‌آید. به این ترتیب، معادلات مدل آب کم‌عمق دولایه خطی شده برحسب (u, v, h)، شامل شش معادله به صورت زیر است:

$$\begin{cases} \partial_t u_1 - f v_1 + g \partial_x (h_1 + h_2) = 0 \\ \partial_t v_1 + f u_1 + g \partial_y (h_1 + h_2) = 0, \\ \partial_t h_1 + H_1 (\partial_x u_1 + \partial_y v_1) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \partial_t u_2 - f v_2 + g \partial_x h_1 + g \partial_x h_2 = 0 \\ \partial_t v_2 + f u_2 + g \partial_y h_1 + g \partial_y h_2 = 0, \\ \partial_t h_2 + H_2 (\partial_x u_2 + \partial_y v_2) = 0 \end{cases}$$

$$\lambda_{bt}^2 = \frac{g(H_1 + H_2)}{f_0^2}, \quad (۶)$$

$$\lambda_{bc}^2 = \frac{1}{f_0^2} \frac{g'H_1H_2}{(H_1 + H_2)}.$$

رابطه (۴)، شبیه رابطه پاشندگی امواج گرانی-لختی در مدل تک لایه است؛ با این تفاوت که شعاع تغییر شکل راسبی (λ) در مدل تک لایه، به شعاع تغییر شکل معادل (λ_e) تغییر پیدا کرده است. باید توجه داشت که وقتی لایه‌ها دارای چگالی یکسان باشند ($g'=0$)، رابطه پاشندگی مدل دولایه به رابطه پاشندگی مدل تک لایه تبدیل می‌شود و در این صورت $\lambda_e = \lambda_{bt}$ همان شعاع تغییر شکل راسبی در مدل تک لایه (λ) خواهد بود.

اگر $g' = \alpha g$ و $H_2 = \gamma H_1$ در نظر بگیریم، رابطه (۴) به صورت رابطه (۷) در می‌آید:

$$(\omega / f_0)^2 = 1 + \mu_{\pm} \lambda_{bt}^2 (k^2 + l^2), \quad (۷)$$

$$\mu_{\pm} = \frac{1}{2} \left[1 \pm \sqrt{1 - 4\varepsilon^2} \right], \quad (۸)$$

$$\varepsilon = \sqrt{\alpha\gamma} / (1 + \gamma)^2, \quad (۹)$$

که $\mu_+ = \mu_{bt}$ معرف مد فشارورد، $\mu_- = \mu_{bc}$ معرف مد کژفشار و $\varepsilon = \lambda_{bc} / \lambda_{bt}$ نسبت شعاع تغییر شکل کژفشار به شعاع تغییر شکل فشارورد است. به این ترتیب، شعاع تغییر شکل معادل به صورت $\lambda_e = \sqrt{\mu_{\pm}} \lambda_{bt}$ تعریف می‌شود.

طبق رابطه (۷)، بسامد و سرعت فاز امواج گرانی-لختی، به شکل یکنواخت با عدد موج تغییر کرده و صفر نمی‌شود؛ همین‌طور سرعت گروه نیز صفر نخواهد شد. این ویژگی در فرایند تنظیم زمین‌گرد از اهمیت زیادی برخوردار است (رنالد، ۱۹۹۴). در این تحقیق، مقدار نوعی $\alpha = 0.003$ فرض شده (گیل، ۱۹۸۲) و لایه‌هایی با ضخامت میانگین یکسان در نظر گرفته شده‌اند ($\gamma = 1$).

$$\begin{cases} \partial_t \delta_1 - f \zeta_1 \\ + g(\partial_{xx}^2 + \partial_{yy}^2)(h_1 + h_2) = 0 \\ \partial_t \zeta_1 + f \delta_1 = 0 \\ \partial_t h_1 + H_1 \delta_1 = 0 \end{cases}, \quad (۲)$$

$$\begin{cases} \partial_t \delta_2 - f \zeta_2 \\ + (g_0 \partial_{xx}^2 + g_0 \partial_{yy}^2)(g_0 h_1 + g h_2) = 0 \\ \partial_t \zeta_2 + f \delta_2 = 0 \\ \partial_t h_2 + H_2 \delta_2 = 0 \end{cases}.$$

۴ امواج گرانی-لختی در محیط دولایه

۴-۱ رابطه پاشندگی پیوسته دولایه‌ای امواج گرانی-لختی

برای مسئله امواج گرانی-لختی در یک محیط دولایه، از مجموعه معادلات (۱) یا (۲) با در نظر گرفتن تقریب صفحه $f = f_0$ استفاده می‌شود که در آن f مقداری ثابت است. با فرض جواب موجی شکل به صورت $e^{i(kx+ly-\omega t)}$ ، رابطه پاشندگی پیوسته دولایه‌ای امواج گرانی-لختی به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} & (\omega^2 - f_0^2) \\ & = \frac{1}{2} \left(\frac{g(H_1 + H_2)}{\pm \sqrt{g^2(H_1 + H_2)^2 - 4gg'H_1H_2}} \right) (k^2 + l^2), \end{aligned} \quad (۳)$$

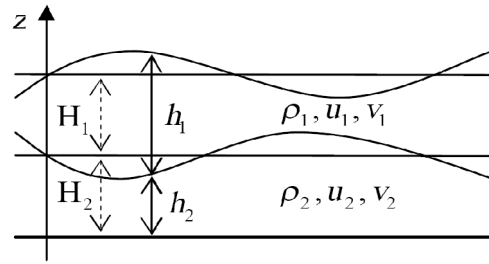
که در آن $g' = (1 - \rho_1 / \rho_2)g = g - g_0$ گرانی کاهیده است و k و l به ترتیب اعداد موج در راستای محورهای مختصات x و y هستند و ω بسامد این امواج است.

با استفاده از تعریف شعاع تغییر شکل فشارورد (λ_{bt}) و شعاع تغییر شکل کژفشار (λ_{bc}) می‌توان رابطه (۳) را به صورت رابطه (۴) نوشت:

$$(\omega / f_0)^2 = 1 + \lambda_e^2 (k^2 + l^2), \quad (۴)$$

$$\lambda_e^2 = \frac{\lambda_{bt}^2}{2} \left[1 \pm \sqrt{1 - 4(\lambda_{bc} / \lambda_{bt})^2} \right], \quad (۵)$$

موجی $e^{i(kx+ly-\omega t)}$ در نظر گرفت. با استفاده از روش عرضه شده بلايو (۲۰۰۰)، می‌توان شکل عمومی رابطه پاشندگی گسسته امواج گرانی-لختی را در یک محیط دولایه نیز برای هر یک از شبکه‌ها، مستقل از نوع طرحواره‌های به کارفته، به دست آورد. این رابطه پاشندگی گسسته که در جدول ۲ برحسب توابع تبدیل T داده شده است، برای هر یک از شبکه‌ها متفاوت است. علت این تفاوت، تغییر موقعیت متغیرها در شبکه‌های آراکاو و تغییر متغیر در شبکه Z است. توابع تبدیل $T_1, T_2, T_{\frac{1}{2}}, T_0$ به ترتیب مربوط به طرحواره‌های $S_0, S_{\frac{1}{2}}, S_1$ و S_2 در جدول ۳ آورده شده است که در آن، تابع تبدیل $T(k)$ مربوط به طرحواره دلخواه S در راستای x به صورت $S(e^{ikx}) = T(k)e^{ikx}$ تعریف می‌شود. توابع تبدیل



شکل ۱. طرحواری از یک محیط دولایه با عمق ثابت.

۲-۴ رابطه پاشندگی گسسته دولایه‌ای امواج گرانی-لختی

برای بررسی دقت طرحواره‌ها باید مشتقات مکانی موجود در دستگاه معادلات (۱) را برای شبکه‌های آراکاو A تا E و دستگاه معادلات (۲) را برای شبکه Z با استفاده از طرحواره‌های مورد نظر گسسته کرد و جواب را به شکل

جدول ۲. شکل عمومی رابطه پاشندگی گسسته دولایه‌ای امواج گرانی-لختی در شبکه‌های متفاوت.

Grid	Inertia-Gravity Waves Dispersion Relation
A	$(\omega / f_0)^2 = 1 - \mu_{\pm} \lambda_{bt}^2 (T_1^2(k) + T_1^2(l))$
B	$(\omega / f_0)^2 = 1 - \mu_{\pm} \lambda_{bt}^2 (T_{\frac{1}{2}}^2(k) T_0^2(l) + T_{\frac{1}{2}}^2(l) T_0^2(k))$
C	$(\omega / f_0)^2 = T_0^2(k) T_0^2(l) - \mu_{\pm} \lambda_{bt}^2 (T_{\frac{1}{2}}^2(k) + T_{\frac{1}{2}}^2(l))$
D	$(\omega / f_0)^2 = T_0^2(k) T_0^2(l) - \mu_{\pm} \lambda_{bt}^2 (T_1^2(k) T_0^2(l) + T_1^2(l) T_0^2(k))$
E	$(\omega / f_0)^2 = 1 - \mu_{\pm} \lambda_{bt}^2 (T_{\frac{1}{2}}^2(k) + T_{\frac{1}{2}}^2(l))$
Z	$(\omega / f_0)^2 = 1 - \mu_{\pm} \lambda_{bt}^2 (T_2(k) + T_2(l))$

درون‌یابی مرتبه ششم (IS6) برای درون‌یابی S_0 به کار رفته است؛ درحالی‌که شبکه‌های آراکاو A و E و شبکه Z درون‌یابی ندارند. براین اساس، منحنی‌های مربوط به آنها نیز در کنار یکدیگر آورده شده است.

با توجه به شکل‌های ۲ و ۳ تقریباً برای همه شبکه‌ها در عدد موج‌های کوچک (طول موج‌های بزرگ)، خطای نسبی خیلی ناچیز است و خطا در عدد موج‌های بزرگ روی می‌دهد. طبق این پربندهای خطای نسبی، انتظار می‌رود که روش فشرده ترکیبی نسبت به روش آبرفشرده از دقت بیشتری برخوردار باشد. در مورد شبکه‌های آراکاو B و C و شبکه Z تفاوت در پربندهای نسبی خطای بین این دو روش، خیلی بارز است؛ به گونه‌ای که پربندهای خطای نسبی ۱ تا ۵ درصد در روش فشرده ترکیبی برای شبکه آراکاو C به ازای $\lambda_{bt}/d = 2$ تنها در عدد موج‌های خیلی بزرگ ظاهر شده است و انتظار می‌رود که شبکه آراکاو C در این مورد دارای بیشترین دقت باشد.

برای اینکه بتوان یک برآورد کمی از میزان خطاها نیز به دست آورد، خطای کلی E_{rms} ، به صورت ریشه میانگین مجذور مربعات خطای نسبی بسامد رابطه پاشندگی گسسته دولایه‌ای امواج گرانی-لختی محاسبه شده است. جدول ۴ برای مد فشارورد و جدول ۵ برای مد کژفشار، مقادیر خطای کلی محاسبه شده را در شبکه‌های متفاوت و برای دو روش مرتبه ششم آبرفشرده و فشرده ترکیبی نشان می‌دهد. در این محاسبات برای هر راستا تعداد ۲۵۶ نقطه استفاده شده است. همچنین درصد بهبود روش فشرده ترکیبی نسبت به روش آبرفشرده نیز محاسبه شده که با رابطه (۱۰) تعریف می‌شود:

$$CCD6 \text{ درصد بهبود} = \left(1 - \frac{E_{rms \text{ CCD6}}}{E_{rms \text{ SCD6}}}\right) \times 100 \quad (10)$$

نسبت به SCD6

مربوط به راستای l را نیز می‌توان به شکل مشابه تعریف کرد (بلایو، ۲۰۰۰؛ اصفهانیان و همکاران، ۲۰۰۵). باید توجه داشت که فاصله شبکه‌ای d در شبکه آراکاو-E متفاوت با سایر شبکه‌ها است و در هنگام استفاده از توابع تبدیل مربوط به این شبکه بایستی $d^* = \sqrt{2}d$ را در نظر گرفت. چون رابطه پاشندگی گسسته، بسته به مقدار شعاع تغییر شکل فشارورد (λ_{bt}) در مقایسه با فاصله شبکه‌ای d ، در هر یک از شبکه‌های فوق دارای ویژگی‌های متفاوتی است (رنдал، ۱۹۹۴)، برای بررسی عملکرد این گسسته‌سازی‌ها، دو حالت $\lambda_{bt}/d = 2$ و $\lambda_{bt}/d = 0.5$ در حکم نمونه انتخاب شده‌اند. خطای نسبی محاسبه بسامد امواج گرانی-لختی دولایه‌ای نیز که به صورت $|\omega_n - \omega_e|/\omega_e$ تعریف می‌شود، برای هر روش عددی در هر یک از شبکه‌ها محاسبه شده است که ω_e مقدار بسامد دقیق و ω_n مقدار بسامد محاسبه شده به روش عددی (روش‌های SCD6 و CCD6) است. باید توجه داشت که رابطه پاشندگی پیوسته (که رابطه پاشندگی دقیق یا تحلیلی نیز به آن اطلاق می‌شود)، مستقل از نوع شبکه است. از طرفی کوچک‌ترین طول موجی که می‌توان با یک شبکه دارای فاصله شبکه‌ای معین d توصیف کرد، در راستای x به ازای $2\pi/k = 2d$ و در راستای l به ازای $2\pi/l = 2d$ به دست می‌آید (رنдал، ۱۹۹۴). بنابراین محاسبه خطای نسبی بسامد در بازه $0 < kd/\pi < 1$ و $0 < ld/\pi < 1$ صورت گرفته است.

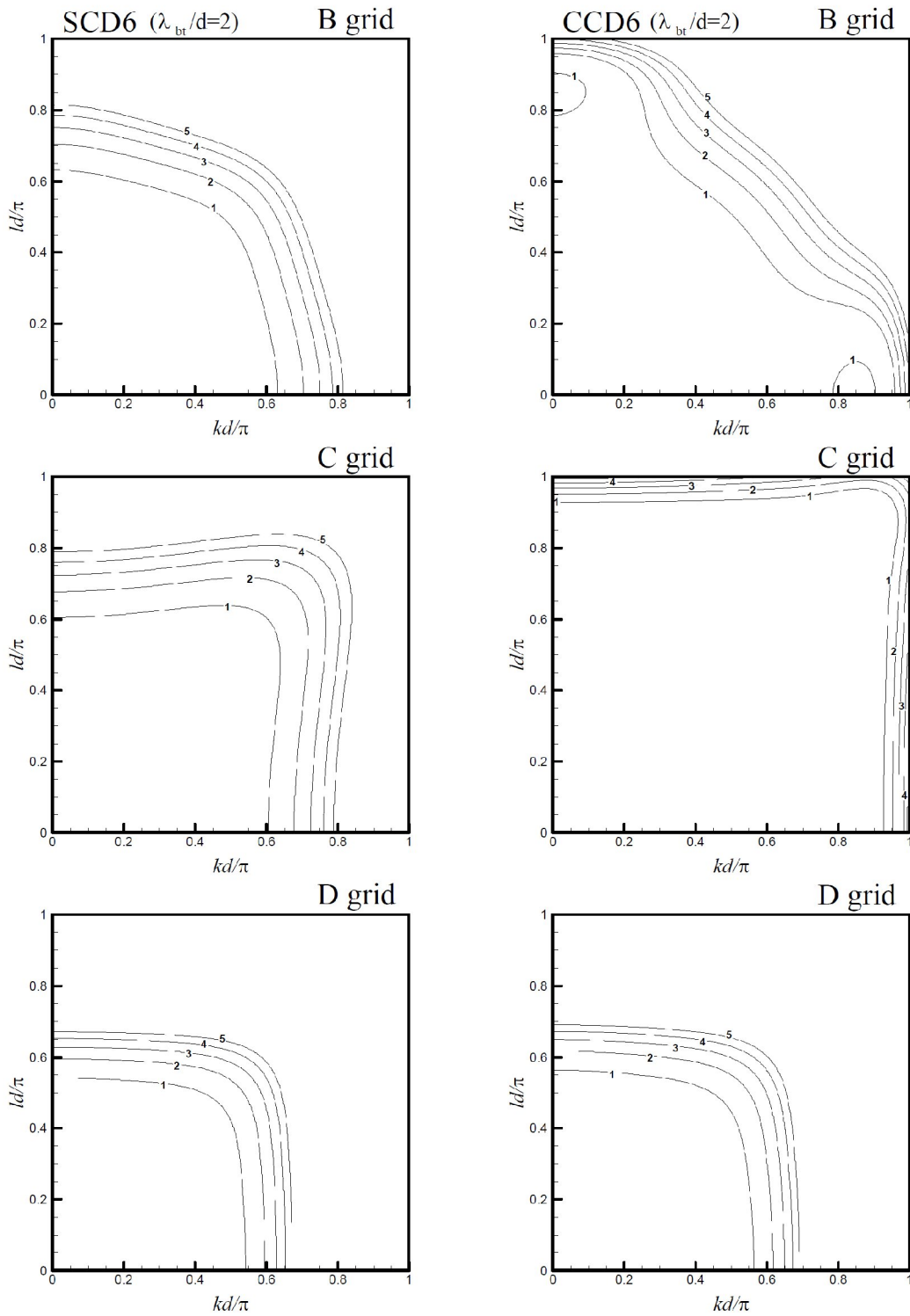
شکل‌های ۲ و ۳ پربندهای خطای نسبی ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ درصد محاسبه بسامد امواج گرانی-لختی دولایه‌ای را برای شبکه‌های متفاوت به ازای $\lambda_{bt}/d = 2$ در مد فشارورد نشان می‌دهند که در آنها برای محاسبه مشتق اول و دوم از دو روش مرتبه ششم آبرفشرده و فشرده ترکیبی استفاده شده است. برای مقایسه این دو روش در شرایط یکسان، در شبکه‌های آراکاو B، C و D طرحواره

شبکه C که کاربرد زیادی در مدل‌سازی فرایندهای جوی و اقیانوسی دارد و برای مسئله امواج گرانی-لختی در مدل آب کم‌عمق تک‌لایه عملکرد مناسبی از خود نشان می‌دهد، برخلاف انتظار در مدل دولایه برای مد کژفشار و حالت $\lambda_{br} < d$ خطای بسیار زیادی تولید می‌کند. شبکه C در طول موج‌های کوچک عملکرد ضعیف‌تری دارد و این مسئله در مورد مد کژفشار بارزتر است؛ به گونه‌ای که در مد کژفشار و به ازای $\lambda_{br}/d = 0.5$ ، شبکه C پس از شبکه D، دارای بیشترین خطا است. بنابراین، شبکه C برای استفاده در شبکه‌های با گام‌های شبکه‌ای درشت ممکن است با مشکل زیادی مواجه شود.

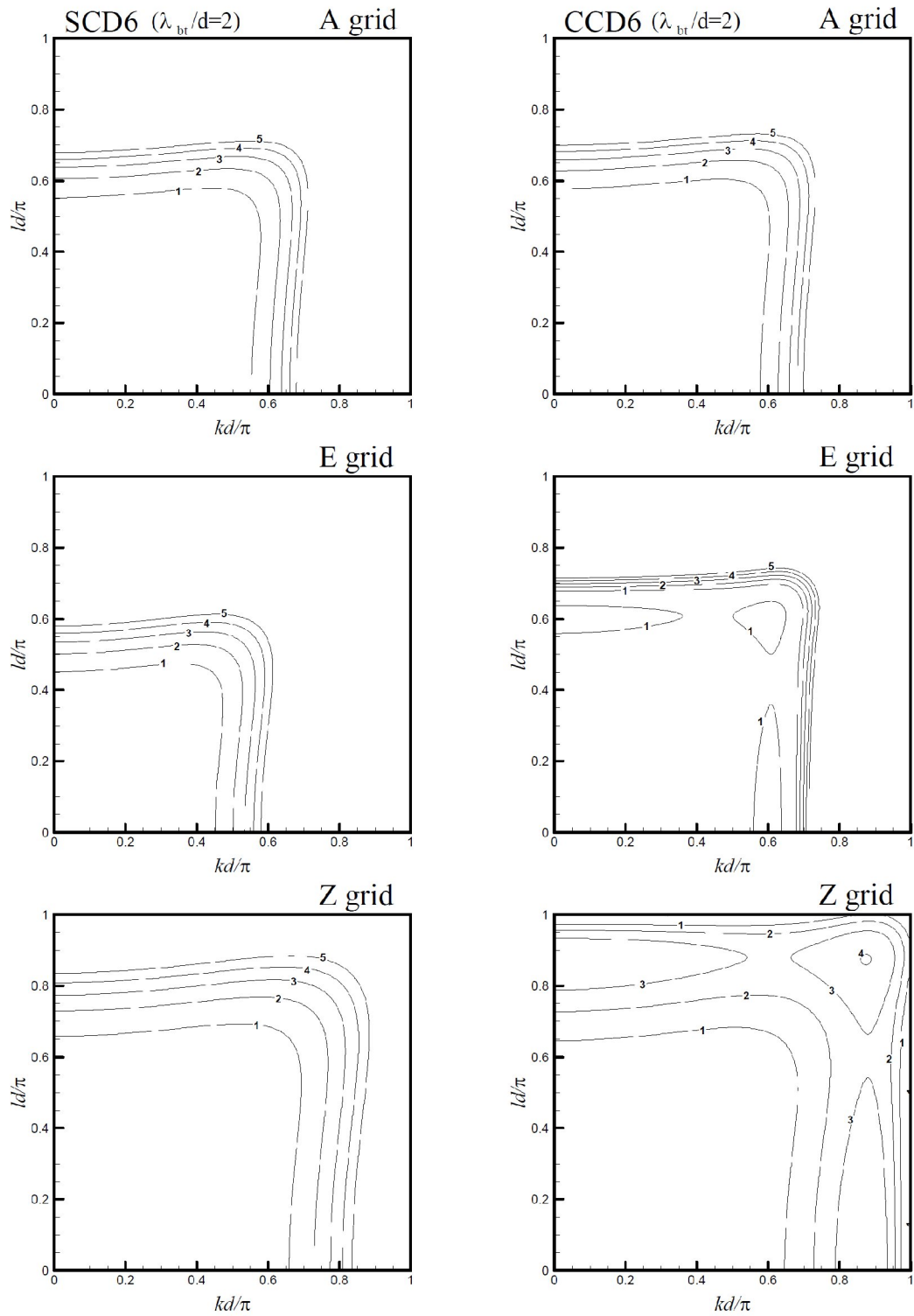
مطابق جداول ۴ و ۵، روش فشرده ترکیبی مرتبه ششم در همه شبکه‌ها نسبت به روش آبرفشرده مرتبه ششم دقت بیشتری دارد. در شبکه Z، در همه موارد روش فشرده ترکیبی مرتبه ششم نسبت به روش آبرفشرده با حدود ۶۰ درصد بهبود مواجه است. به جز در مد فشارورد و به ازای $\lambda_{br}/d = 2$ که شبکه آراکوا C دارای بیشترین دقت و بیشترین بهبود (حدود ۸۰ درصد) است، در سایر موارد، شبکه Z دارای کمترین خطا و بیشترین بهبود و شبکه آراکوا D دارای بیشترین خطا و کمترین بهبود است. این مطلب به دلیل توانایی بیشتر روش فشرده ترکیبی در برآورد مشتق دوم (که در این مدل دولایه، تنها در شبکه Z وجود دارد)، خصوصاً برای طول موج‌های کوچک است.

جدول ۳. توابع تبدیل T طرحواره‌های به کار گرفته شده برای درون‌یابی، محاسبه مشتق اول و مشتق دوم.

S_0	$T_0(k) = \frac{15 \cos kd/2 + \cos 3kd/2}{10 + 6 \cos kd}$	IS6
$S_{\frac{1}{2}}$ S_1 S_2	$\begin{cases} T_{\frac{1}{2}}(k) = \frac{i}{d} \frac{9(721 + 488 \cos kd - 9 \cos^2 kd) \sin kd/2}{2921 + 2379 \cos kd + 114 \cos^2 kd - 14 \cos^3 kd} \\ T_1(k) = \frac{i}{d} \frac{9(4 + \cos kd) \sin kd}{23 + 20 \cos kd + 2 \cos^2 kd} \\ T_2(k) = \frac{1}{d^2} \frac{-57 + 24 \cos kd + 33 \cos^2 kd}{23 + 20 \cos kd + 2 \cos^2 kd} \end{cases}$	CCD6
$S_{\frac{1}{2}}$ S_1 S_2	$\begin{cases} T_{\frac{1}{2}}(k) = \frac{i}{d} \frac{1440 \sin kd/2 + 160 \sin 3kd/2}{723 + 236 \cos kd + \cos 2kd} \\ T_1(k) = \frac{i}{d} \frac{100 \sin kd + 10 \sin 2kd}{66 + 52 \cos kd + 2 \cos 2kd} \\ T_2(k) = \frac{1}{d^2} \frac{-270 + 240 \cos kd + 30 \cos 2kd}{123 + 56 \cos kd + \cos 2kd} \end{cases}$	SCD6



شکل ۲. پربندهای خطای نسبی ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ درصد بسامد امواج گرانی-لغتی دولایه‌ای برای روش‌های SCD6 و CCD6 در شبکه‌های آراکوا B، C و D به ازای $\lambda_{bt}/d = 2$ در مد فشارورد.



شکل ۳. پربندهای خطای نسبی ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ درصد بسامد امواج گرانی-لختی دولایه‌ای برای روش‌های SCD6 و CCD6 در شبکه‌های آراکوا A و E و شبکه Z به ازای $\lambda_{bt}/d = 2$ در مد فشارورد.

$$\begin{cases} f_0 v_{g2} - g_0 \partial_x h_1 - g \partial_x h_2 = 0 \\ f_0 u_{g2} + g_0 \partial_y h_1 + g \partial_y h_2 = 0 \\ \partial_t u_{g2} - f_0 v_{a2} - \beta y v_{g2} = 0 \\ \partial_t v_{g2} + f_0 u_{a2} + \beta y u_{g2} = 0 \\ \partial_t h_2 + H_2 (\partial_x u_{a2} + \partial_y v_{a2}) = 0 \end{cases}, \quad (11)$$

$$\begin{cases} f_0 v_{g1} - g \partial_x (h_1 + h_2) = 0 \\ f_0 u_{g1} + g \partial_y (h_1 + h_2) = 0 \\ \partial_t u_{g1} - f_0 v_{a1} - \beta y v_{g1} = 0 \\ \partial_t v_{g1} + f_0 u_{a1} + \beta y u_{g1} = 0 \\ \partial_t h_1 + H_1 (\partial_x u_{a1} + \partial_y v_{a1}) = 0 \end{cases},$$

که $\beta = \partial f / \partial y$ مقداری ثابت است و اندیس‌های g و a به ترتیب معرف بخش زمین‌گرد و آزمین‌گرد و اندیس‌های ۱ و ۲ معرف لایه اول و دوم است. برای استفاده معادلات در شبکه Z ، بایستی دستگاه معادلات را برحسب مؤلفه قائم‌تاوایی (ζ)، واگرایی افقی (δ) و ضخامت لایه (h) به صورت زیر بیان کرد:

$$\begin{cases} f_0 \zeta_{g1} - g (\partial_{xx}^2 + \partial_{yy}^2) (h_1 + h_2) = 0 \\ \partial_t \zeta_{g1} + f_0 \delta_{a1} + \frac{\beta}{f_0} g \partial_x (h_1 + h_2) = 0 \\ f_0 \zeta_{a1} + \beta y \zeta_{g1} + \frac{\beta}{f_0} g \partial_y (h_1 + h_2) = 0 \\ \partial_t h_1 + H \delta_{a1} = 0 \end{cases}, \quad (12)$$

$$\begin{cases} f_0 \zeta_{g2} - (g_0 \partial_{xx}^2 + g \partial_{yy}^2) (g_0 h_1 + g h_2) = 0 \\ \partial_t \zeta_{g2} + f_0 \delta_{a2} + \frac{\beta}{f_0} g \partial_x (g_0 h_1 + g h_2) = 0 \\ f_0 \zeta_{a2} + \beta y \zeta_{g2} + \frac{\beta}{f_0} g \partial_y (g_0 h_1 + g h_2) = 0 \\ \partial_t h_2 + H \delta_{a2} = 0 \end{cases}$$

به ازای $\lambda_{bt}/d = 0.5$ ، شبکه‌های B و C از لحاظ دقت در مد فشارورد تفاوت چندانی ندارند، ولی در مد کژفشار، شبکه B پس از شبکه Z دارای بیشترین دقت است. به نظر می‌رسد که در بین شبکه‌های آراکاو، شبکه B می‌تواند جایگزین مناسبی برای شبکه C باشد، اگرچه شبکه C برای طول‌موج‌های بزرگ ($\lambda_{bt}/d = 2$) به‌ویژه در مد فشارورد، مناسب‌تر از شبکه B است. در شبکه C ، روش فشرده ترکیبی نسبت به روش آبرفشرده دارای درصد بهبود قابل ملاحظه‌ای است، به‌جز در مد کژفشار و به ازای $\lambda_{bt}/d = 0.5$ که بهبود چندانی وجود ندارد. این بهبود کم ممکن است به دلیل عملکرد ضعیف‌تر شبکه C برای طول‌موج‌های کوچک در مد کژفشار باشد. در شبکه B ، بهبود بیش از ۱۵ درصد است که هم در مد فشارورد و هم در مد کژفشار می‌توان مشاهده کرد.

۵ امواج راسبی در محیط دولایه

در مورد مسئله امواج راسبی نیز می‌توان از معادلات آب کم‌عمق دولایه‌ای خطی شده استفاده کرد. بدین‌منظور، به همان شیوه که گیل (۱۹۸۲) برای یک محیط تک‌لایه عرضه کرده است، پس از تقسیم‌بندی بردار سرعت به دو بخش زمین‌گرد (\bar{u}_g) و آزمین‌گرد (\bar{u}_a) به صورت $\bar{u} = \bar{u}_g + \bar{u}_a$ و در نظر گرفتن تقریب صفحه β به صورت $f = f_0 + \beta y$ ، از جملات کوچک‌تر صرف‌نظر می‌شود. بدین‌صورت، پس از استخراج معادلات تکانه و پیوستگی بی‌بعد، روابط بخش زمین‌گرد به‌ازای تقریب مرتبه صفرم و روابط بخش آزمین‌گرد به‌ازای تقریب مرتبه اول به دست می‌آید. بنابراین، معادلات حاکم برای امواج راسبی در یک محیط دولایه، شامل پنج معادله برای هر لایه است که در رابطه (۱۱) به ترتیب از بالا به پایین، دو معادله اول مربوط به بخش زمین‌گرد و سه معادله دیگر مربوط به بخش آزمین‌گرد است:

جدول ۴. خطای کلی محاسبه بسامد امواج گرانی - لختی دولایه‌ای با استفاده از روش‌های SCD6 و CCD6 برای شبکه‌های متفاوت به‌ازای $\lambda_{bt} / d = 2$ و $\lambda_{bt} / d = 0.5$ در مد فشارورد به همراه درصد بهبود روش CCD6 نسبت به روش SCD6.

شبکه	خطای کلی SCD6		خطای کلی CCD6		درصد بهبود نسبت CCD6 به SCD6	
	$\lambda_{bt} / d = 0.5$	$\lambda_{bt} / d = 2$	$\lambda_{bt} / d = 0.5$	$\lambda_{bt} / d = 2$	$\lambda_{bt} / d = 0.5$	$\lambda_{bt} / d = 2$
A	17.378	27.053	16.790	26.066	3.39	3.65
B	11.937	16.814	9.847	13.670	17.51	18.70
C	12.595	6.138	8.168	0.998	35.15	83.74
D	39.615	39.164	38.898	38.201	1.81	2.46
E	15.863	23.765	14.332	21.267	9.65	10.51
Z	3.522	4.887	1.330	1.901	62.24	61.10

جدول ۵. مشابه جدول ۴ ولی برای مد کژفشار.

شبکه	خطای کلی SCD6		خطای کلی CCD6		درصد بهبود نسبت CCD6 به SCD6	
	$\lambda_{bt} / d = 0.5$	$\lambda_{bt} / d = 2$	$\lambda_{bt} / d = 0.5$	$\lambda_{bt} / d = 2$	$\lambda_{bt} / d = 0.5$	$\lambda_{bt} / d = 2$
A	3.968	19.455	3.848	18.785	3.02	3.44
B	3.062	13.101	2.608	10.764	14.83	17.84
C	29.338	10.901	27.439	6.215	6.47	42.98
D	40.468	39.504	40.278	38.723	0.47	1.98
E	3.681	17.673	3.369	15.934	8.47	9.84
Z	0.907	3.859	0.329	1.467	63.77	61.99

شده است. همان‌گونه که قبلاً اشاره شد، برای مقایسه دو روش مرتبه ششم آبرفشرده و فشرده ترکیبی در شرایط یکسان، در شبکه‌های آراکاو A, B, C و D درونیابی با استفاده از طرحواره درونیابی مرتبه ششم صورت می‌گیرد.

شکل‌های ۴ و ۵ پربندهای خطای نسبی ۱۰، ۲۰، ۳۰، ۴۰ و ۵۰ درصد محاسبه بسامد در رابطه پاشندگی گسسته دولایه‌ای امواج راسبی را برای شبکه‌های متفاوت به ازای $\lambda_{bt}/d = 2$ در مد فشارورد نشان می‌دهند. خطای کلی در محاسبه بسامد امواج راسبی دولایه‌ای برای مد فشارورد در جدول ۸ و برای مد کثرفشار در جدول ۹ آورده شده است؛ با این تفاوت که این‌بار، درصد بهبود روش آبرفشرده مرتبه ششم (SCD6) نسبت به روش فشرده ترکیبی مرتبه ششم (CCD6) محاسبه شده است. باید توجه داشت که در این مقایسه، در هر دو روش آبرفشرده و فشرده ترکیبی، برای درونیابی S_0 از روش IS6 استفاده شده است.

مطابق جدول‌های ۸ و ۹، روش آبرفشرده مرتبه ششم برای محاسبه بسامد امواج راسبی دولایه‌ای، به‌جز در شبکه‌های C و Z، در سایر شبکه‌ها نسبت به روش فشرده ترکیبی مرتبه ششم دارای دقت بیشتری است. در شبکه Z که دارای کمترین خطا در بین شبکه‌های به‌کاررفته است، این دو روش تقریباً دارای دقت یکسانی هستند. در شبکه C، روش آبرفشرده نسبت به روش فشرده ترکیبی نه‌تنها بهبود نیافته است، بلکه روش فشرده ترکیبی مرتبه ششم دارای عملکرد بهتری نیز هست. در این شبکه و در مد فشارورد، روش فشرده ترکیبی مرتبه ششم نسبت به روش آبرفشرده، حدود ۳۰ درصد بهبود دارد. این بهبود در شبکه C، در مد کثرفشار نیز به ازای $\lambda_{bt}/d = 2$ مشاهده می‌شود، ولی به ازای $\lambda_{bt}/d = 0.5$ دقت این دو روش در برآورد بسامد امواج راسبی دولایه تقریباً یکسان است.

۵-۱ رابطه پاشندگی پیوسته دولایه‌ای امواج راسبی برای به دست آوردن رابطه پاشندگی پیوسته دولایه‌ای امواج راسبی، مشابه مسئله امواج گرانی-لختی دولایه، باید جواب موجی شکل در نظر گرفت. علاوه بر آن، دامنه جریان تابعی از مختصه y (گیل، ۱۹۸۲؛ بلايو، ۲۰۰۰) می‌شود. به‌این ترتیب، رابطه پاشندگی پیوسته دولایه‌ای امواج راسبی به صورت رابطه (۱۳) در می‌آید:

$$\frac{\omega}{\beta} = \frac{\left[\frac{f_0^2 g (H_1 + H_2)}{+ f_0^2 \sqrt{g^2 (H_1 + H_2)^2 - 4gg'H_1H_2}} + 2gg'H_1H_2(k^2 + l^2) \right] k}{2 \left(f_0^4 + f_0^2 g (H_1 + H_2) (k^2 + l^2) + gg'H_1H_2(k^2 + l^2)^2 \right)}, \quad (13)$$

با استفاده از پارامترهای ε ، μ_{\pm} و همچنین شعاع تغییر شکل فشارورد (λ_{bt}) می‌توان رابطه (۱۳) را به صورت رابطه (۱۴) نوشت:

$$\frac{\omega}{\beta} = - \frac{\left[\frac{\mu_{\pm}}{+ \varepsilon^2 \lambda_{bt}^2 (k^2 + l^2)} \right] \lambda_{bt}^2 k}{1 + \lambda_{bt}^2 (k^2 + l^2) + \varepsilon^2 \lambda_{bt}^4 (k^2 + l^2)^2}. \quad (14)$$

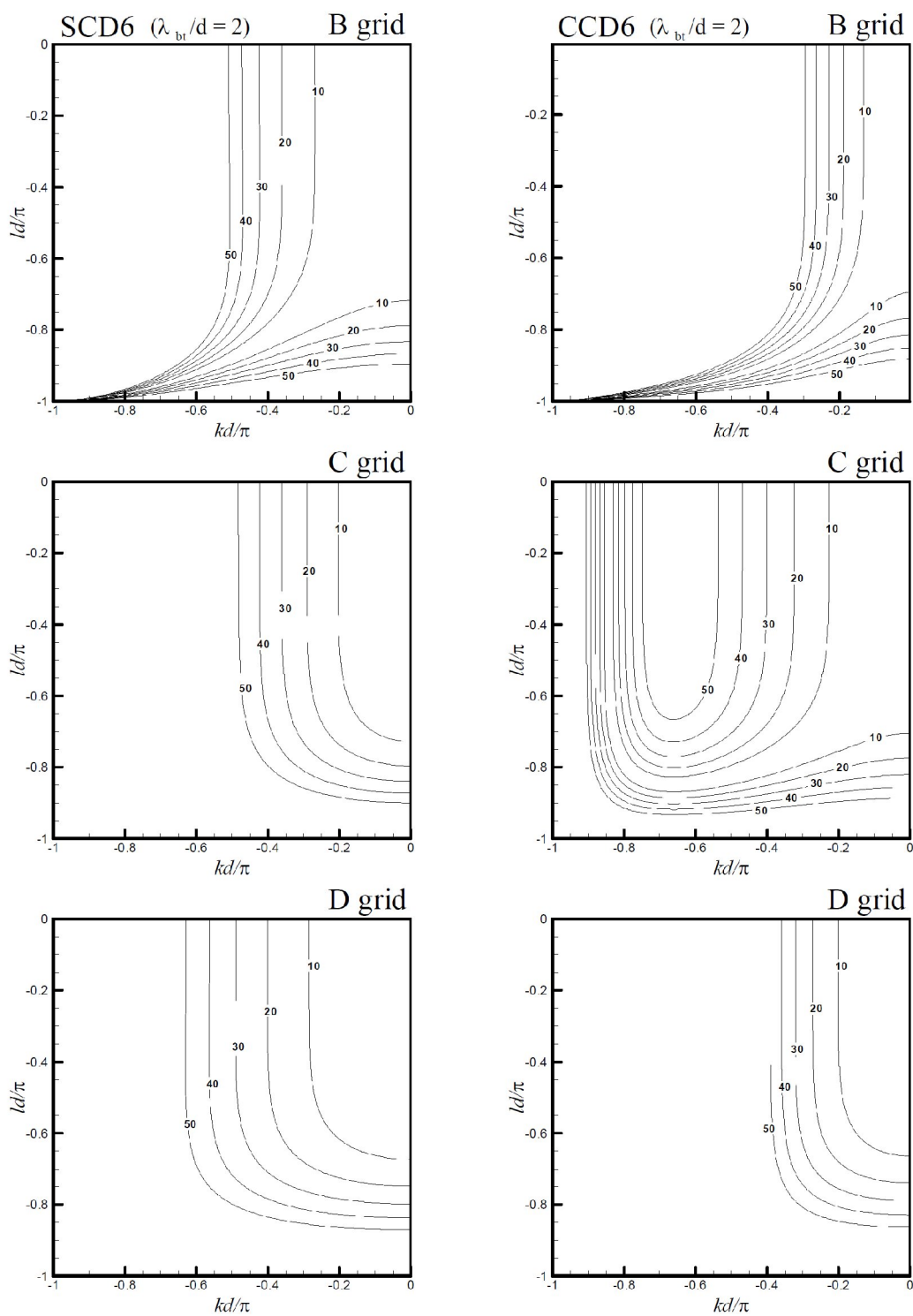
۵-۲ رابطه پاشندگی گسسته دولایه‌ای امواج راسبی جدول ۶ شکل عمومی رابطه پاشندگی گسسته دولایه‌ای امواج راسبی را برای شبکه‌های متفاوت نشان می‌دهد. با توجه به این‌که دامنه جریان تابعی از y است، علاوه بر تابع تبدیل T بایستی تابع تبدیل R را نیز محاسبه کرد. تابع تبدیل $R(k)$ برای هر طرحواره دلخواه S در راستای x به صورت $S((x-x_0)e^{ikx})_{x=x_0} = R(k)e^{ikx_0}$ تعریف می‌شود (بلايو، ۲۰۰۰). در جدول ۷ توابع تبدیل R_1 ، $R_{\frac{1}{2}}$ ، R_0 مربوط به طرحواره‌های S_1 ، $S_{\frac{1}{2}}$ ، S_0 آورده

خطا است؛ این در حالی است که در روش آبرفشرده، شبکه D در بین شبکه‌های آراکاو از بالاترین دقت برخوردار است. بنابراین در شبکه D، با توجه به خطای زیاد روش فشرده ترکیبی و دقت زیاد روش آبرفشرده، روش آبرفشرده نسبت به روش فشرده ترکیبی دارای درصد بهبود بیشتری است.

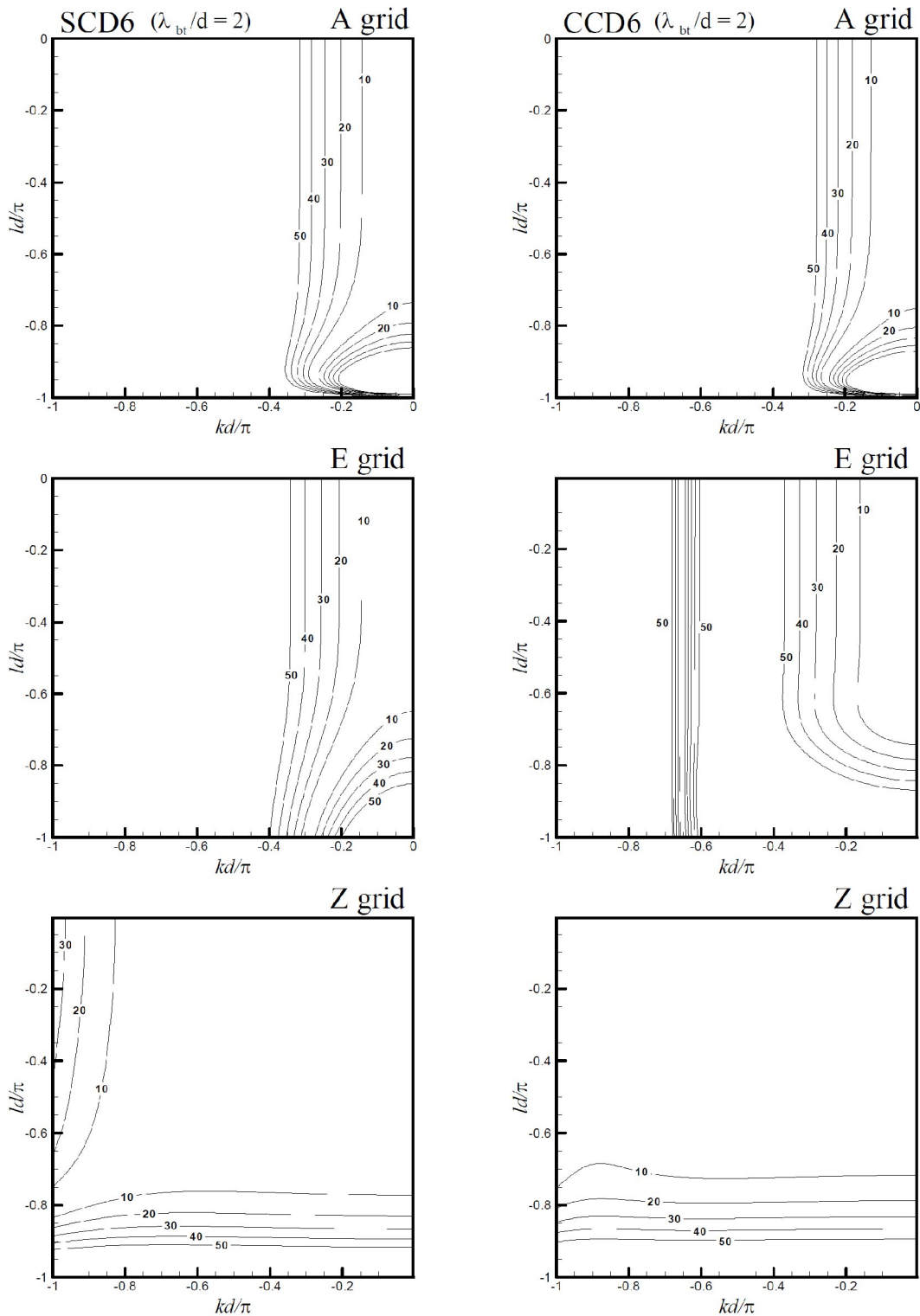
بیشترین درصد بهبود روش آبرفشرده نسبت به فشرده ترکیبی به ترتیب در شبکه‌های A، D، E و B مشاهده می‌شود. با توجه به اینکه بیشترین خطا مربوط به شبکه A است، این بهبود در مورد شبکه A چندان با ارزش نیست. البته خطای موجود در شبکه A در مد کژفشار نسبت به مد فشارورد به‌نحو چشم‌گیری کاهش یافته است. در روش فشرده ترکیبی، شبکه D پس از شبکه A، دارای بیشترین

جدول ۶. رابطه پاشندگی گسسته دولایه‌ای امواج راسبی در شبکه‌های متفاوت.

Grid	Rossby Waves Dispersion Relation
A	$\frac{\omega}{\beta} = i \frac{(\mu_{\pm} - \varepsilon^2 \lambda_{bt}^2 (T_1^2(k) + T_1^2(l))) \lambda_{bt}^2 T_1(k) R_1(l)}{1 - \lambda_{bt}^2 (T_1^2(k) + T_1^2(l)) + \varepsilon^2 \lambda_{bt}^4 (T_1^2(k) + T_1^2(l))^2}$
B	$\frac{\omega}{\beta} = i \frac{(\mu_{\pm} - \varepsilon^2 \lambda_{bt}^2 (T_o^2(l) T_{\frac{1}{2}}^2(k) + T_o^2(k) T_{\frac{1}{2}}^2(l))) \lambda_{bt}^2 T_o(k) T_{\frac{1}{2}}(k) (R_{\frac{1}{2}}(l) T_o(l) - R_o(l) T_{\frac{1}{2}}(l))}{1 - \lambda_{bt}^2 (T_o^2(l) T_{\frac{1}{2}}^2(k) + T_o^2(k) T_{\frac{1}{2}}^2(l)) + \varepsilon^2 \lambda_{bt}^4 (T_o^2(l) T_{\frac{1}{2}}^2(k) + T_o^2(k) T_{\frac{1}{2}}^2(l))^2}$
C	$\frac{\omega}{\beta} = i \frac{(\mu_{\pm} T_o^2(k) T_o^2(l) - \varepsilon^2 \lambda_{bt}^2 (T_{\frac{1}{2}}^2(k) + T_{\frac{1}{2}}^2(l))) \lambda_{bt}^2 R_{\frac{1}{2}}(l) T_o(l) T_o(k) T_{\frac{1}{2}}(k)}{T_o^4(k) T_o^4(l) - \lambda_{bt}^2 T_o^2(k) T_o^2(l) (T_{\frac{1}{2}}^2(k) + T_{\frac{1}{2}}^2(l)) + \varepsilon^2 \lambda_{bt}^4 (T_{\frac{1}{2}}^2(k) + T_{\frac{1}{2}}^2(l))^2}$
D	$\frac{\omega}{\beta} = i \frac{(\mu_{\pm} T_o^2(k) T_o^2(l) - \varepsilon^2 \lambda_{bt}^2 (T_o^2(l) T_1^2(k) + T_1^2(l) T_o^2(k))) \lambda_{bt}^2 T_o(k) T_o(l) T_1(k) (R_1(l) T_o(l) - R_o(l) T_1(l))}{T_o^4(k) T_o^4(l) - \lambda_{bt}^2 T_o^2(k) T_o^2(l) (T_o^2(l) T_1^2(k) + T_1^2(l) T_o^2(k)) + \varepsilon^2 \lambda_{bt}^4 (T_o^2(l) T_1^2(k) + T_1^2(l) T_o^2(k))^2}$
E	$\frac{\omega}{\beta} = i \frac{(\mu_{\pm} - \varepsilon^2 \lambda_{bt}^2 (T_{\frac{1}{2}}^2(k) + T_{\frac{1}{2}}^2(l))) \lambda_{bt}^2 T_{\frac{1}{2}}(k) R_{\frac{1}{2}}(l)}{1 - \lambda_{bt}^2 (T_{\frac{1}{2}}^2(k) + T_{\frac{1}{2}}^2(l)) + \varepsilon^2 \lambda_{bt}^4 (T_{\frac{1}{2}}^2(k) + T_{\frac{1}{2}}^2(l))^2}$
Z	$\frac{\omega}{\beta} = i \frac{(\mu_{\pm} - \varepsilon^2 \lambda_{bt}^2 (T_2(k) + T_2(l))) \lambda_{bt}^2 T_1(k)}{1 - \lambda_{bt}^2 (T_2(k) + T_2(l)) + \varepsilon^2 \lambda_{bt}^4 (T_2(k) + T_2(l))^2}$



شکل ۴. پربندهای خطای نسبی ۱۰، ۲۰، ۳۰، ۴۰ و ۵۰ درصد بسامد امواج راسمی دولایه‌ای برای روش‌های SCD6 و CCD6 در شبکه‌های B، C و D به ازای $\lambda_{bt}/d = 2$ در مد فشارورد.



شکل ۵. پربندهای خطای نسبی ۱۰، ۲۰، ۳۰، ۴۰ و ۵۰ درصد بسامد امواج راسبی دولایه‌ای برای روش‌های SCD6 و CCD6 در شبکه‌های A، E و Z به ازای $\lambda_{bt}/d = 2$ در مد فشارورد.

به ریشه برخی از خطاها و همچنین نحوه رفتار دو روش مورد بررسی، در گسسته‌سازی روابط پاشندگی امواج گرانی و راسبی اشاره کرد.

مناسب بودن روش CCD6 برای امواج گرانی-لختی و روش SCD6 برای امواج راسبی به دلیل متفاوت بودن روابط پاشندگی برای این دو دسته موج است. برای امواج گرانی-لختی، جمله‌ی $(k^2 + l^2) \lambda_{bt}^2 + 1$ با استفاده از روش CCD6 بهتر از روش SCD6 تقریب زده می‌شود، درحالی‌که جمله مشابه در رابطه پاشندگی امواج راسبی به صورت $(k^2 + l^2) \lambda_{bt}^2 + 1$ در مخرج کسر ظاهر می‌شود. از آنجا که ε مقداری ناچیز است و روش CCD6 مخرج این کسر را بهتر تقریب می‌زند، در نتیجه با کوچک‌تر شدن خطای مخرج کسر، خطای محاسبه ω/β افزایش می‌یابد. از عوامل مهم دیگر که نیاز به بررسی بیشتری دارد، تأثیر توابع تبدیل T و R است.

شبکه‌های E و B پس از شبکه C به ترتیب دارای بیشترین دقت هستند و روش آبرفشرده نسبت به روش فشرده ترکیبی در شبکه E حدود ۵۰ درصد و در شبکه B حدود ۲۰ درصد بهبود دارد. لذا، در شبکه‌های B و E نیز روش فشرده ترکیبی نسبت به روش آبرفشرده دارای عملکرد ضعیف‌تری است. باید توجه داشت که در تحقیق بلايو (۲۰۰۰) در مورد رابطه پاشندگی گسسته امواج گرانی-لختی و امواج راسبی در یک محیط تک‌لایه، برای محاسبه مشتق اول در نقاط میانی از روش فشرده مرتبه ششم (C6S) استفاده شده است؛ در نتیجه فقط مقایسه بین شبکه‌های B و C در شرایط یکسان صورت گرفته است و مقایسه بین سایر شبکه‌ها منطقی نیست. همان‌طور که پیش‌تر اشاره شد، در پژوهش حاضر، مقایسه بین روش‌های SCD6 و CCD6 برای شبکه‌های متفاوت، با شرایط یکسان صورت گرفته است. پیش از جمع‌بندی نتایج به‌دست آمده در این بخش، مناسب است به اختصار

جدول ۷. توابع تبدیل R طرحواره‌های به کاررفته در درونیابی، محاسبه مشتق اول و مشتق دوم.

S_0	$R_0(k) = id \frac{15 \sin kd / 2 + 3 \sin 3kd / 2}{20 + 12 \cos kd}$	E6S
$S_{\frac{1}{2}}$ S_1	$\begin{cases} R_{\frac{1}{2}}(k) = \frac{3(2008 - 101 \cos kd - 107 \cos^2 kd) \cos kd / 2}{2921 + 2379 \cos kd + 114 \cos^2 kd - 14 \cos^3 kd} \\ R_1(k) = \frac{-24 + 60 \cos kd + 9 \cos^2 kd}{23 + 20 \cos kd + 2 \cos^2 kd} \end{cases}$	CCD6
$S_{\frac{1}{2}}$ S_1	$\begin{cases} R_{\frac{1}{2}}(k) = \frac{720 \cos kd / 2 + 240 \cos 3kd / 2}{723 + 236 \cos kd + \cos 2kd} \\ R_1(k) = \frac{100 \cos kd + 20 \cos 2kd}{66 + 52 \cos kd + 2 \cos 2kd} \end{cases}$	SCD6

جدول ۸. خطای کلی محاسبه بسامد امواج راسبی دولایه‌ای با استفاده از روش‌های SCD6 و CCD6 برای شبکه‌های متفاوت به ازای $\lambda_{bt}/d = 2$ و $\lambda_{bt}/d = 0.5$ در مد فشارورد به همراه درصد بهبود روش SCD6 نسبت به روش CCD6.

شبکه	خطای کلی روش SCD6		خطای کلی روش CCD6		درصد بهبود SCD6 نسبت به CCD6	
	$\lambda_{bt}/d = 0.5$	$\lambda_{bt}/d = 2$	$\lambda_{bt}/d = 0.5$	$\lambda_{bt}/d = 2$	$\lambda_{bt}/d = 0.5$	$\lambda_{bt}/d = 2$
	A	436.505	1282.795	1151.315	3647.990	62.09
B	175.695	264.323	232.833	305.605	24.54	13.51
C	67.186	68.589	47.011	45.672	-	-
D	59.004	59.543	343.734	327.143	82.83	81.80
E	83.574	88.538	179.485	234.027	53.44	62.17
Z	25.980	25.841	27.109	27.453	4.16	5.88

روابط پاشندگی گسسته دولایه‌ای این امواج و استفاده از آنها برای مقایسه دو روش فوق در شبکه‌های متفاوت با شرایط یکسان است. به‌طور کلی، برای هر دو مسئله امواج گرانی-لختی و امواج راسبی، در هر دو روش آبرفشرده و فشرده ترکیبی، شبکه Z دارای کمترین خطا است. برای مسئله امواج گرانی-لختی در همه شبکه‌ها، خصوصاً در شبکه Z، روش فشرده ترکیبی مرتبه ششم نسبت به روش آبرفشرده هم مرتبه، از بهبود برخوردار است. برای مسئله امواج راسبی، نتیجه به‌عکس است، به گونه‌ای که به‌جز در شبکه‌های C و Z در سایر شبکه‌ها روش آبرفشرده نسبت به روش فشرده ترکیبی دارای بهبود قابل ملاحظه‌ای هستند. با اینکه شبکه C کاربرد زیادی در مدل‌سازی فرایندهای جوی و اقیانوسی دارد و برای مسئله امواج گرانی-لختی در مدل آب کم‌عمق تک‌لایه عملکرد مناسبی دارد، برخلاف انتظار در مدل دولایه برای شعاع تغییر شکل

براساس تحقیق بلايو (۲۰۰۰)، با افزایش مرتبه دقت، تابع تبدیل T موجب افزایش و تابع تبدیل R موجب کاهش دقت می‌شود. البته باید توجه داشت چون ترکیب این توابع تبدیل در صورت و مخرج کسر وجود داشته است و در افزایش یا کاهش دقت دخالت دارد، به‌طور قطع نمی‌توان هر یک از عوامل را به‌تنهایی عامل اصلی تلقی کرد.

۶ نتیجه‌گیری

در این پژوهش، با استفاده از شکل عمومی روابط پاشندگی گسسته امواج گرانی-لختی و امواج راسبی، دقت و میزان خطای تولید شده با روش‌های آبرفشرده مرتبه ششم و فشرده ترکیبی هم‌مرتبه مورد ارزیابی و مقایسه قرار گرفته است. از جمله مواردی که این پژوهش را نسبت به تحقیقات گذشته متمایز می‌کند، معرفی شکل عمومی

مدل معادلات آب کم عمق دولایه‌ای مورد بررسی، به نظر می‌رسد که روش فشرده ترکیبی نسبت به روش آبرفشرده دارای برتری است.

نتایج به دست آمده از این پژوهش، مربوط به مقایسه روش‌های آبرفشرده و فشرده ترکیبی مرتبه ششم با استفاده از یک مدل آب کم عمق دولایه‌ای خطی شده برای مسئله امواج گرانی-لختی و راسبی است. شکل پیچیده‌تر غیرخطی موضوع در دست از سوی نگارندگان در دست بررسی است و امید است در آینده نزدیک نتایج آن انتشار یابد. به طور کلی می‌توان انتظار داشت که در صورت استفاده از روش‌های فشرده هم خانواده با دو روش آبرفشرده و فشرده ترکیبی نتایج مشابه نتایج این پژوهش به دست آید. ولی برای مواردی که از دسته روش‌های دارای تفاوت ذاتی استفاده شود (مانند روش‌های فشرده یک سوئیچ)، نیاز به تحقیق جداگانه است.

فشارورد کوچک‌تر از فاصله شبکه‌ای، خطای بسیار زیادی تولید می‌کند که ممکن است دلیل آن عملکرد ضعیف این شبکه در طول موج‌های کوچک‌تر، به ویژه برای مد کزفشار، باشد.

نتایج حاکی از آن است که بهبودهای حاصل شده از روش آبرفشرده نسبت به روش فشرده ترکیبی برای امواج راسبی، مربوط به شبکه‌هایی (مانند A، B، D و E) است که کمتر در شبیه‌سازی‌های عددی جو و اقیانوس مورد استفاده قرار می‌گیرند. یکی از شبکه‌های دارای کاربرد بسیار زیاد (از دیدگاه عددی و دینامیکی) شبکه Z است که روش آبرفشرده برای امواج راسبی در این شبکه برتری چندانی نسبت به روش فشرده ترکیبی نشان نمی‌دهد. بنابراین از دیدگاه کلی و با توجه به عملکرد دو روش فشرده ترکیبی و آبرفشرده مرتبه ششم برای گسسته‌سازی مکانی روابط در شکل خطی امواج گرانی و راسبی در

جدول ۹. مشابه جدول ۸ ولی برای مد کزفشار.

شبکه	خطای کلی روش SCD6		خطای کلی روش CCD6		درصد بهبود نسبت به CCD6	
	$\lambda_{bt} / d = 0.5$	$\lambda_{bt} / d = 2$	$\lambda_{bt} / d = 0.5$	$\lambda_{bt} / d = 2$	$\lambda_{bt} / d = 0.5$	$\lambda_{bt} / d = 2$
A	280.659	487.844	683.634	1303.893	58.95	62.59
B	125.949	187.210	195.337	241.738	35.52	22.56
C	63.756	67.548	63.555	46.545	-	-
D	58.094	59.132	382.951	339.407	84.83	82.58
E	81.955	84.165	139.746	188.758	41.35	55.41
Z	26.856	25.920	26.517	27.192	-	4.68

- difference scheme: *Journal of Computational Physics*, **148**, 663-674.
- Chu, P. C., and Fan, C., 2000, A three-point sixth-order staggered combined compact difference scheme: *Mathematical and Computer Modelling*, **32**, 323-340.
- Esfahanian, V., Ghader, S., and Mohebalhojeh, A. R., 2005, On the use of super compact scheme for spatial differencing in numerical models of the atmosphere: *Q. J. Roy. Meteorol. Soc.*, **131**, 2109-2130.
- Ghader, S., and Esfahanian, V., 2006, Generalized combined compact differencing method: *WSEAS Transactions on Fluid Mechanics*, **1**, (5), 445-449.
- Ghader, S., Mohebalhojeh, A. R., and Esfahanian, V., 2009, On the spectral convergence of the supercompact finite-difference schemes for the f-plane shallow-water equations: *Monthly Weather Review*, **137**, 2393-2406.
- Gill, A. E., 1982, *Atmosphere-Ocean Dynamics*: Academic Press.
- Hirsh, R. S., 1975, higher order accurate difference solutions of fluid mechanics problems by a compact differencing technique: *Journal of Computational Physics*, **19**, 90-109.
- Lele, S. k., 1992, Compact finite difference scheme with spectral-like resolution: *Journal of Computational Physics*, **103**, 16-42.
- Mesinger, F., and Arakawa, A., 1976, Numerical methods used in atmospheric models: WMO-ICSU Joint Organizing Committee, GARP Series, 1, 17.
- Mohebalhojeh, A. R., and Dritschel, D. G., 2007, Assessing the numerical accuracy of complex spherical shallow-water flows: *Mon. Monthly Weather Review*, **135**, 3876-3894.
- Nihei, T., and Ishii, K., 2003, A fast solver of the shallow water equations on a sphere using a combined compact difference scheme: *Journal of Computational Physics*, **187**, 639-659.
- Randall, D. A., 1994, Geostrophic adjustment and the finite-difference shallow-water equations: *Monthly Weather Review*, **122**, 1371-1377.
- Salmon, R., 2002, Numerical solution of the two-layer shallow water equations with bottom topography: *Journal of Marine Research*, **60**, 605-638.
- Vallis, G. K., 2006, *Atmospheric and Oceanic Fluid Dynamics*: Cambridge University Press.
- تشکر و قدردانی
نویسندگان مقاله از دانشگاه تهران و دانشگاه آزاد اسلامی واحد علوم و تحقیقات، به دلیل حمایت از این پژوهش تشکر می‌کنند.
- منابع
اصفهانیان، و.، و قادر، س.، ۱۳۸۶، بررسی دقت روش‌های فشرده و آب‌فشرده در گسسته‌سازی مکانی معادلات آب کم‌عمق خطی شده: *مجله فیزیک زمین و فضا*، **۳۳**، (۱)، ۱۰۷-۱۱۸.
- قادر، س.، و اصفهانیان، و.، ۱۳۸۵، حل عددی شکل پایستار معادلات آب کم‌عمق با روش آب‌فشرده مرتبه ششم: *مجله فیزیک زمین و فضا*، **۳۲**، (۲)، ۳۱-۴۴.
- Arakawa, A., and Lamb, V. R., 1977, Computational design of the basic dynamical processes of the UCLA general circulation model: *Methods of Computational Physics*, **17**, 173-265.
- Blayo, E., 2000, Compact finite difference schemes for ocean models: 1.ocean waves: *Journal of Computational Physics*, **164**, 241-257.
- Castro, M. J., Garcia-Rodriguez, J. A., Gonzalez-Vida, J. M., Macias, J., and Pares, C., 2007, Improved FVM for two-layer shallow-water models: *Advances in Engineering Softwares*, **38**, 386-398.
- Chen, S. C., and Peng, S. H., 2006, Two-dimensional numerical model of two-layer shallow water equations for confluence simulation: *Advances in Water Resources*, **29**, 1608-1617.
- Cho, Y. S., Sohn, D. H., and Lee, S. O., 2007, Practical modified scheme of linear shallow-water equations for distant propagation of tsunamis: *Ocean Engineering*, **34**, 1769-1777.
- Chu, P. C., and Fan, C., 1998, A three-point combined compact difference scheme: *Journal of Computational Physics*, **140**, 370-399.
- Chu, P. C., and Fan, C., 1999, A three-point sixth-order non-uniform combined compact