

## روش تصویرسازی سریع مقاومت ویژه پس‌بینی برای داده‌های دو بعدی مقاومت ویژه الکتریکی

عطا اسحق زاده<sup>۱\*</sup>، و علیرضا حاجیان<sup>۲</sup>

<sup>۱</sup> کارشناس ارشد، موسسه ژئوفیزیک دانشگاه تهران، تهران، ایران  
<sup>۲</sup> استادیار، گروه فیزیک، واحد نجف آباد، دانشگاه آزاد اسلامی، نجف آباد، ایران

(تاریخ دریافت: ۱۳۹۵/۰۷/۱۴، تاریخ پذیرش: ۱۳۹۶/۱۰/۰۶)

### چکیده

در این مقاله به منظور به دست آوردن سریع یک تصویر مقاومت ویژه زیرسطحی تقریبی از منطقه تحت مطالعه و به عنوان یک مدل اولیه در روش وارون‌سازی جهت کاهش ابهامات، روش تصویرسازی مقاومت ویژه پس‌بینی به عنوان یک روش وارون‌سازی سریع داده‌های دو بعدی بررسی می‌شود. ابتدا وارون‌سازی خطی ماتریس مقادیر مقاومت ویژه ظاهری با حل حداقل مربعات با یک‌بار تکرار حاصل می‌شود. سپس، بر اساس نتایج به دست آمده، یک فیلتر همبستگی به ماتریس ژاکوبین، با هدف کاهش یکنواختی اعمال می‌شود و وارون حداقل مربعات میرای خطی تکرار می‌شود تا نتیجه نهایی به دست آید. این روش تصویربرداری سریع را می‌توان برای حصول سریع نتایج مقدماتی مورد استفاده قرار داد. روش مدل‌سازی وارون مطرح شده در این مقاله برای داده‌های مقاومت ویژه ظاهری دو مدل مصنوعی محاسبه شده با چهار آرایه ونر-شلومبرژه، ونر، دوقطبی-دوقطبی و قطبی-دوقطبی مورد بررسی قرار می‌گیرد و با نتایج حاصل از وارون‌سازی استاندارد کمترین مربعات نرم‌افزار RES2DINV مقایسه می‌شود. نتایج حاصل از تصویرسازی مقاومت ویژه پس‌بینی نشان می‌دهند که این روش برای داده‌های مقاومت ویژه ظاهری آرایه‌های ونر-شلومبرژه و ونر عملکرد بهتری ارائه می‌دهند. بر این اساس، داده‌های واقعی مقاومت ویژه ظاهری اندازه‌گیری شده با آرایه ونر-شلومبرژه جهت تصویرسازی یک لوله بتنی انتقال آب با روش ذکر شده مورد تحلیل قرار گرفت که عمق مرکز لوله در حدود ۱/۸ متر تخمین زده می‌شود.

**واژه‌های کلیدی:** حداقل مربعات، روش تصویرسازی مقاومت ویژه پس‌بینی، فیلتر همبستگی

## ۱ مقدمه

علاوه بر روش‌های وارون شناخته شده، روش‌های دیگری وجود دارند که بر حصول نمایش موقعیت تقریبی توده‌های زیرزمینی در زمان‌های کوتاه‌تری در مقایسه با روش‌های تکراری «کلاسیک» متمرکز هستند. این روش‌ها، تصاویر تقریبی الگوهای مقاومت ویژه را در زیر زمین ارائه می‌دهند؛ اما مقادیر مقاومت ویژه حاصل به-طور کلی با موارد واقعی تا حدودی متفاوت هستند و گستره تغییرات مقاومت ویژه عموماً بسیار پایین‌تر از گستره تغییرات مقاومت ویژه به‌دست‌آمده توسط مدل‌های وارونه است.

روش احتمالاتی، به نام توموگرافی احتمال، توسط پاتلا (۱۹۹۷) برای روش SP ایجاد شد و سپس به اندازه‌های مقاومت ویژه تعمیم یافت که در آن مدل تفسیری به‌دست‌آمده، بازسازی تصویر محل محتمل‌ترین بارهای الکتریکی القا شده توسط منبع اصلی در سرتاسر ناپیوستگی‌های مقاومت مدفون است (مائوریلو و پاتلا؛ ۱۹۹۹). باربر و همکاران (۱۹۸۳) روشی را برای پس‌بینی (Back-projection) اندازه‌ها در امتداد خطوط هم‌پتانسیل ایجاد کردند. این تقریب روند بازسازی را با فرض کردن رابطه‌ای خطی بین اندازه‌گیری‌های الکتریکی و توزیع مقاومتی، ساده‌سازی می‌کند. این امر منجر به ایجاد یک الگوریتم بازسازی تصویر تک‌مرحله‌ای سریع می‌شود. این تصویر توسط پس‌بینی اندازه‌گیری‌های مرزی به‌نجار شده به‌صورت مقاومت یکنواخت، تشکیل می‌شود. باربر و براون (۱۹۸۸) بازسازی را از طریق به‌نجارسازی هر دو طرف معادله پس‌بینی با استفاده از یک مجموعه داده مرجع اصلاح کردند. با این حال، نتیجه این استراتژی این است که بازسازی به‌جای تصاویر ثابت، تصاویر دیفرانسیلی (تفاضلی) تولید می‌کند، از این‌رو تنها تغییر نرمال شده در رسانایی می‌تواند تعیین شود. باربر (۱۹۹۰) یک فرمول جدید برای الگوریتم بازسازی پس‌بینی به

دست آورد که در آن داده‌های اندازه‌گیری ابتدا تبدیل و سپس پس‌بینی می‌شوند. مرحله فیلتراسیون روش «پس‌بینی فیلتر شده» توسط پیش‌ضرب داده‌های اندازه‌گیری شده به دست آمده و در پی آن عملیات پس‌بینی قرار می‌گیرد. کوترا (۱۹۸۹)، از یک ماتریس حساسیت خطی استفاده کرد تا یک استراتژی نرمال‌سازی داده‌های مشابه را اجرا کند. با این حال، کوترا (۱۹۹۴) به‌جای نرمال‌سازی این ماتریس با مجموعه داده مرجع یکنواخت، هر ستون از ماتریس (مربوط به هر سلول فردی) را با مجموع ضرایب حساسیت برای همه اندازه‌های مقاومت ویژه ظاهری نرمال کرد.

در این مقاله روش تصویرسازی مقاومت ویژه پس‌بینی به‌عنوان یک روش تصویرسازی تقریبی از مقاومت ویژه محیط زیرسطحی که عملکرد سریعی در این امر دارد، برای مقاومت‌های ظاهری اندازه‌گیری شده مربوط به مدل‌های مصنوعی با آرایه‌های ونر-شلومبرژه، ونر، دوقطبی-دوقطبی و قطبی-دوقطبی مورد بررسی قرار می‌گیرد. همچنین کارایی روش در حضور نوفه نیز سنجیده می‌شود.

## ۲ روش مقاومت ویژه پس‌بینی (Back projection resistivity technique)

روش مقاومت ویژه پس‌بینی (BPRT) را می‌توان برای مجموعه‌ای از اندازه‌های مقاومت ویژه ظاهری به‌کار برد تا به‌سرعت یک تصویر تقریبی از توزیع مقاومت حجمی بررسی شده به دست آید. این روش مبتنی بر این ملاحظه است که یک اختلال یا آشفتگی مقاومتی در عنصری نقطه‌ای (سلول) از یک منطقه محدود، تغییری در ولتاژ ایجاد می‌کند. در نتیجه یک اختلال مقاومت ویژه ظاهری در سطح یک منطقه، با توجه به ضریب حساسیت ایجاد می‌شود. همسو با قضیه حساسیت ژسلوویتز (۱۹۷۱)، مقدار ضریب به موقعیت سلولی بستگی دارد که با توجه به

$$S_{j,i} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \rho_{a1}}{\partial \rho_1} & \frac{\partial \rho_{a2}}{\partial \rho_1} & \frac{\partial \rho_{a3}}{\partial \rho_1} & \dots & \frac{\partial \rho_{aN}}{\partial \rho_1} \\ \frac{\partial \rho_{a1}}{\partial \rho_2} & \frac{\partial \rho_{a2}}{\partial \rho_2} & \frac{\partial \rho_{a3}}{\partial \rho_2} & \dots & \frac{\partial \rho_{aN}}{\partial \rho_2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial \rho_{a1}}{\partial \rho_M} & \frac{\partial \rho_{a2}}{\partial \rho_M} & \frac{\partial \rho_{a3}}{\partial \rho_M} & \dots & \frac{\partial \rho_{aN}}{\partial \rho_M} \end{bmatrix} \quad (2)$$

$i = 1, 2, \dots, M; j = 1, 2, \dots, N;$

با توجه به ناهنجاری مقاومت ویژه در یک سلول تنها بر حسب تفاوت لگاریتمی بین مقدار آشفستگی سلول و مقاومت پس‌زمینه، ثابت می‌کنیم که مقدار اختلال  $P_i(x, y, z)$  می‌تواند به صورت زیر بیان شود (مارتورانا و کاپیتزی، ۲۰۱۴):

$$P_i(x, y, z) = \ln(\rho_b + \partial \rho_i(x, y, z)) - \ln(\rho_b) \\ = \ln \left[ 1 + \frac{\partial \rho_i(x, y, z)}{\rho_b} \right] \approx \frac{\partial \rho_i(x, y, z)}{\rho_b}, \quad (3)$$

که  $\partial \rho_i(x, y) \ll \rho_b$ .

با در نظر گرفتن اصل برهم‌نهی، تغییر نسبی در مقاومت ویژه ظاهری توسط جمع اشتراک تمام سلول‌ها نشان داده می‌شود (کوئرا، ۱۹۸۹؛ شیما و ساکایاما، ۱۹۸۷):

$$\partial \rho_{aj} = \sum_{i=1}^M S_{i,j} \partial \rho_i. \quad (4)$$

به این ترتیب اختلال مقاومت ویژه ظاهری در رابطه با یک توده همگن می‌تواند به صورت زیر بیان شود (مارتورانا و کاپیتزی، ۲۰۱۴):

$$\frac{\partial \rho_{aj}}{\partial \rho_b} = \frac{\sum_{i=1}^M S_{i,j} \partial \rho_i}{\sum_{i=1}^M S_{i,j} \partial \rho_b}. \quad (5)$$

با استفاده از نمادسازی ماتریسی می‌توان نوشت:

دوقطبی‌های جریان و ولتاژ لحاظ شده است. این ملاحظه نشان می‌دهد که این امکان وجود دارد که تمام مقادیر مقاومت ویژه ظاهری اندازه‌گیری شده که توسط ضرایب حساسیت وزن‌دار شده‌اند را به هر سلول از حجم مورد بررسی مرتبط کرده و مقدار مقاومت ویژه هر سلول از مدل را با استفاده از مجموع وزنی اندازه‌گیری‌های مقاومت ویژه ظاهری برآورد کرد (باربر و سیگار، ۱۹۸۷).

این روش به ما اجازه می‌دهد مناطق مقاومت ویژه بالا و پایین را در زیر خاک شناسایی کنیم (نوئل و زو، ۱۹۹۱). نقطه‌ضعف اصلی این روش‌ها این است که مقادیر مقاومت ویژه محاسبه شده می‌تواند تا حد زیادی با مقاومت‌های ویژه زیرسطحی واقعی متفاوت باشد.

اجازه بدهید مجموعه‌ای از نقاط اندازه‌گیری  $N$  را در سطح زمین همگنی در نظر بگیریم که با مقاومت ویژه پس‌زمینه  $\rho_b$  مشخص می‌شود. تمام داده‌ها به وسیله مواضع چهار الکتروود به کار رفته به سطح ارجاع داده می‌شوند. حجم بررسی شده را می‌توان به  $M$  سلول کوچک تقسیم نمود. اگر سلول  $n$  دارای یک مقاومت غیرعادی باشد،  $\rho'_i = \rho_b + \partial \rho_i$  تمام اندازه‌های مقاومت ویژه ظاهری تحت تأثیر قرار می‌گیرند. به طوری که مقدار اندازه مقاومت نقطه  $\rho_{aj} = \rho_b + \partial \rho_{aj}$  تا زمانی که  $\partial \rho_i$  کوچک است، می‌توان فرض کرد که رابطه خطی است به طوری که  $\partial \rho_{aj} \propto \partial \rho_i$ .

به این ترتیب این تناسب می‌تواند توسط یک ضریب حساسیت تعریف شود که سلول  $n$  را به  $\rho_b$  از آن نقطه اندازه‌گیری مرتبط می‌کند:

$$S_{j,i} = \frac{\partial \rho_{aj}}{\partial \rho_i}. \quad (1)$$

بنابراین برای ضریب حساسیت، یک ماتریس به صورت زیر قابل محاسبه می‌باشد:

$$\begin{array}{cccc} \text{C1} & \text{P1} & \text{P2} & \text{C2} \\ \bullet \leftarrow a \rightarrow \bullet & \bullet \leftarrow a \rightarrow \bullet & \bullet \leftarrow a \rightarrow \bullet & \bullet \leftarrow a \rightarrow \bullet \\ & k = 2\pi a & & \end{array}$$

(الف)

$$\begin{array}{cccc} \text{C1} & \text{P1} & \text{P2} & \text{C2} \\ \bullet \leftarrow na \rightarrow \bullet & \bullet \leftarrow a \rightarrow \bullet & \bullet \leftarrow na \rightarrow \bullet & \bullet \leftarrow na \rightarrow \bullet \\ & k = \pi n(n+1)a & & \end{array}$$

(ب)

$$\begin{array}{cccc} \text{C2} & \text{C1} & \text{P1} & \text{P2} \\ \bullet \leftarrow a \rightarrow \bullet & \bullet \leftarrow na \rightarrow \bullet & \bullet \leftarrow a \rightarrow \bullet & \bullet \leftarrow a \rightarrow \bullet \\ & k = \pi n(n+1)(n+2)a & & \end{array}$$

(ج)

$$\begin{array}{ccc} \text{C1} & \text{P1} & \text{P2} \\ \bullet \leftarrow na \rightarrow \bullet & \bullet \leftarrow a \rightarrow \bullet & \bullet \leftarrow a \rightarrow \bullet \\ & k = 2\pi n(n+1)a & \end{array}$$

(د)

شکل ۱. آرایش الکترودها برای (الف) آرایه ونر، (ب) آرایه ونر-شلومبرژه، (ج) آرایه دوقطبی-دوقطبی و (د) آرایه قطبی-دوقطبی. P: الکترودها پتانسیل. C: الکترودها جریان. a: فاصله الکترودها. n: مقدار ثابت. k: فاکتور هندسی آرایه. (لوک، ۲۰۰۴).

#### ۴ روش پیشنهادی

روش انجام وارون سازی پیشنهادی در این مقاله شامل چهار مرحله است:

- (۱) ارزیابی ماتریس حساسیت B،
- (۲) وارون ماتریس B با استفاده از یک راه حل کمترین مربعات میرا (LSQR)،
- (۳) به روزرسانی محاسبه ماتریس ژاکوبین فیلتر شده B' به دست آمده توسط یک فیلتر همبستگی،
- (۴) وارون ماتریس حساسیت فیلتر شده.

#### ۴-۱ ارزیابی ماتریس حساسیت

در مورد نیم فضای همگن، B را به راحتی می توان با برآورد جملات  $S_{ij}$  از طریق جمع کردن تابع حساسیت، که از مشتق فریسه بر روی هر سلول به دست آمده است، محاسبه نمود. حساسیت آرایش های برداشت شده به نوع آرایه بستگی دارد. از طریق تابع حساسیت می توان به قدرت هر

$$\rho_a = B \cdot \rho_t, \quad (6)$$

که  $\rho_a$  بردار  $(\delta\rho_a / \rho_b)$  تفاوت های نسبی مقاومت ویژه ظاهری است،  $\rho_t$  بردار  $(\delta\rho / \rho_b)$  تغییرات مقاومت نسبی در سلول های مدل است. B ماتریس عبارات زیر است:

$$B_{i,j} = \frac{S_{i,j}}{\sum_{i=1}^M S_{i,j}}, \quad (7)$$

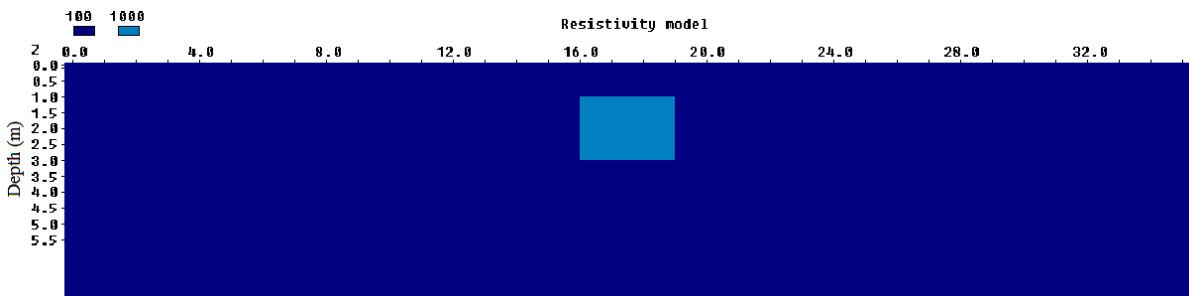
where  $\rightarrow i = 1, \dots, M; j = 1, \dots, N$ .

BPRT مبتنی است بر برآورد مقاومت هر سلول مدل

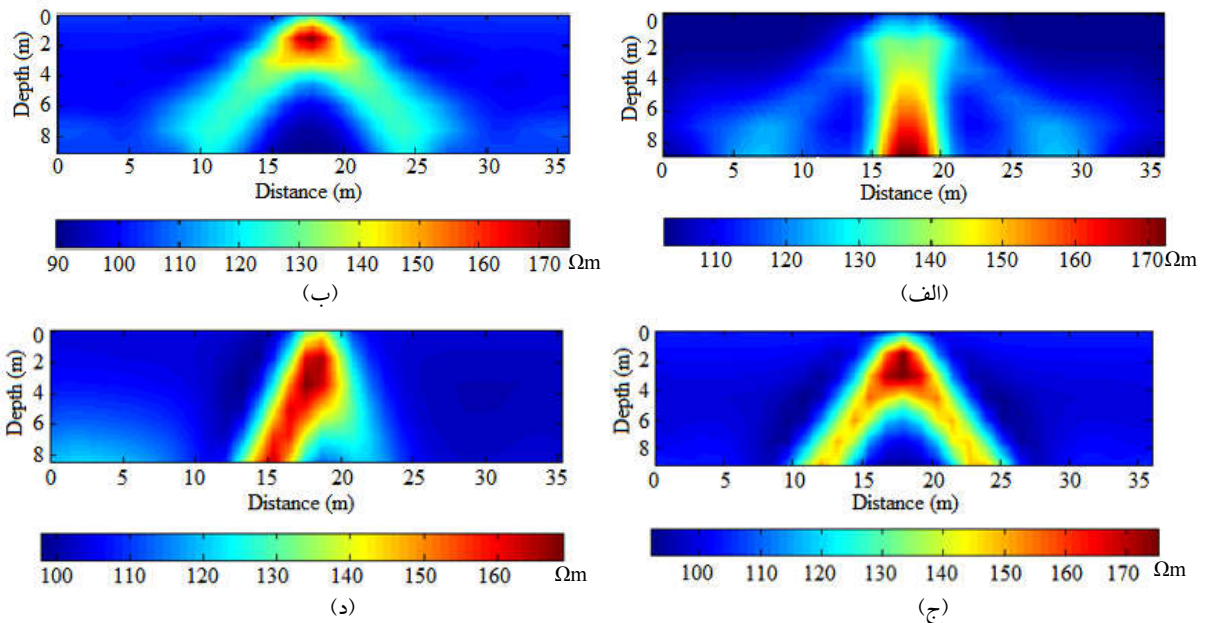
با استفاده از وارون تقریبی معادله (۶).

#### ۳ مدل مصنوعی مورد بررسی

همان طور که ذکر شد، در این مقاله چهار آرایه ونر-شلومبرژه، ونر، دوقطبی-دوقطبی، قطبی-دوقطبی مورد بررسی قرار خواهند گرفت. برای محاسبه مقاومت ویژه ظاهری مدل مصنوعی از ۳۶ الکترودها در راستای خط پروفیل استفاده می شود. متغیر n و نیز فاصله الکترودها a با توجه به شکل ۱ برای سه آرایه ونر-شلومبرژه، دوقطبی-دوقطبی و قطبی-دوقطبی، از ۱ تا ۱۰ در نظر گرفته شده است. همچنین فاصله الکترودهای جریان و پتانسیل a در آرایه ونر از ۱ متر تا ۱۰ متر افزایش پیدا می کند (شکل ۱). مدل مصنوعی، یک توده مستطیل شکل با ابعاد ۳×۲ متر و مقاومت ویژه  $1000 \Omega m$  در عمق یک متری و فاصله ۱۶ متری از گوشه سمت چپ پروفیل می باشد که در یک پس زمینه با مقاومت ویژه  $100 \Omega m$  قرار دارد (شکل ۲). شکل های ۳-الف تا ۳-د مقاومت ویژه ظاهری محاسبه شده برای مدل شکل ۲ را برای آرایه های ونر-شلومبرژه، ونر، دوقطبی-دوقطبی و قطبی-دوقطبی به ترتیب نمایش می دهند. قابل ذکر است که جهت محاسبه مقاومت های ویژه ظاهری از نرم افزار Res2dmod استفاده شده است.



شکل ۲. مدل مصنوعی با یک توده مستطیل شکل با ابعاد ۳×۲ متر و مقاومت ویژه ۱۰۰۰ Ωm در یک پس‌زمینه با مقاومت ویژه ۱۰۰ Ωm.

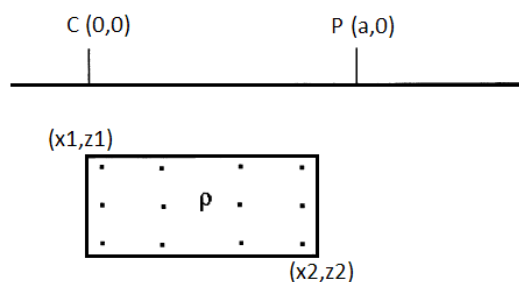


شکل ۳. مقاومت ویژه ظاهری محاسبه شده برای مدل شکل ۲ به ترتیب برای آرایه‌های (الف) ونر-شلومبرژه، (ب) ونر، (ج) دوقطبی - دوقطبی و (د) قطبی - دوقطبی.

محاسبه تابع حساسیت می‌توان میزان حساسیت‌پذیری هریک از آرایه‌ها به تغییرات افقی و قائم مقاومت ویژه زیرسطحی پی برد. برای یک نیم‌فضای همگن با مقاومت  $\rho$ ، معادله پواسون به صورت زیر داده شده است (لوک و بارکر، ۱۹۹۵):

$$\nabla^2 \phi = \rho I_S \delta(X_S), \quad (۸)$$

آرایش در بررسی تغییرات مقاومت ویژه در محدوده‌های خاص پی برد. هرچه مقدار تابع حساسیت در فضای زیرسطحی برای هر آرایش بیشتر باشد آنگاه آرایش مد نظر قدرت بیشتری در محاسبه تغییرات مقاومت ویژه در آن بخش دارد. تابع حساسیت از مشتق فریسه به دست می‌آید. انتگرال فریسه میزان حساسیت‌پذیری پتانسیل اندازه‌گیری شده در نقاط مختلف را نسبت به تغییرات مقاومت ویژه زیرسطحی محاسبه می‌کند. در واقع با



شکل ۴. پارامترهای بلوک چهارگوش که در محاسبه مشتق جزئی ۲ بعدی از بلوک مؤثر است. C و P به ترتیب الکترودها جریان و پتانسیل می‌باشند.

مشتق جزئی  $\frac{\delta\phi}{\delta\rho}$  برای یک بلوک چهارگوش با ابعاد محدود (شکل ۴) به صورت معادله زیر داده شده است (لوک و بارکر، ۱۹۹۵):

$$\frac{\delta\phi}{\delta\rho} = \frac{I_S}{4\pi^2} \int_{z_1}^{z_2} \int_{x_1}^{x_2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x(x-a) + y^2 + z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2} [(x-a)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}} dy dx dz. \quad (13)$$

که جمله درون انتگرال مشتق سه‌بعدی فریسه است. مشتق سه‌بعدی فریسه برای یک آرایه چهار الکترودی می‌تواند با افزودن سهم هر جفت الکترود پتانسیل-الکترود جریان به دست آید.

معادله (۱۳) شکل همان معادله‌ای را دارد که توسط روی و آپاراتو (۱۹۷۱) برای محاسبه تفاوت بالقوه ایجاد شده توسط یک عنصر با حجم کوچک متمرکز در  $(x, y, z)$  با یک آرایه قطبی-قطبی بر سطح زمین همگن به دست آمد. برای ساده‌سازی می‌توان نوشت (لوک و بارکر، ۱۹۹۵):

$$F_y = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x(x-a) + y^2 + z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2} [(x-a)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}} dy. \quad (14)$$

که  $\phi$  پتانسیل حاصل شده از یک چشمه جریان نقطه‌ای  $I_S$  مستقر در مختصات  $X_S$  برای ایجاد یک آشفتگی در معادله بالا، می‌توان نشان داد که تغییر در پتانسیل  $\delta\phi$ ، از تغییر در مقاومت ویژه زیرسطحی به اندازه‌ی  $\delta\rho$  نتیجه می‌شود (لوک و بارکر، ۱۹۹۵):

$$\delta\phi = \delta\rho \rho^{-2} \int_V \nabla\phi \nabla\phi' d\tau, \quad (9)$$

پارامتر  $\phi'$  پتانسیل نتیجه شده از یک چشمه جریان واحد ساختگی در موقعیت الکترود پتانسیل می‌باشد. برای یک نیم‌فضای همگن، پتانسیل حاصل شده از یک چشمه جریان مستقر شده در مبدأ  $(0,0,0)$  به صورت زیر تعریف می‌شود (لوک و بارکر، ۱۹۹۵):

$$\phi = \frac{\rho I_S}{2\pi(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}}, \quad (10)$$

$$\phi' = \frac{\rho I_S}{2\pi[(x-a)^2 + y^2 + z^2]^{1/2}}, \quad (11)$$

که الکترود پتانسیل در نقطه  $(a,0,0)$  واقع شده است. در واقع اگر آرایه قطبی-قطبی با یک الکترود جریان  $C_1(0,0,0)$  و یک الکترود پتانسیل  $P_1(a,0,0)$  در نظر گرفته شود، تغییر کوچکی در مقاومت  $\delta\rho$  درون یک حجم عنصری  $\delta\tau$  با مختصات  $(x,y,z)$  منجر به ایجاد یک اختلاف پتانسیل  $\delta\phi'$  در  $P_1$  می‌شود. بنابراین با حل دیورژانس  $\phi$  و  $\phi'$  معادله (۹) را می‌توان به صورت زیر نوشت (لوک و بارکر، ۱۹۹۵):

$$\frac{\delta\phi}{\delta\rho} = \frac{I_S}{4\pi^2} \times \int_V \frac{x(x-a) + y^2 + z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2} [(x-a)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}} dx dy dz. \quad (12)$$

بنابراین معادله (۱۳) را می‌توان به صورت زیر دوباره نوشت (لوک و بارکر، ۱۹۹۵):

$$\begin{aligned} u &= (2x - x_1 - x_2) / (x_2 - x_1), \\ v &= (2z - z_1 - z_2) / (z_2 - z_1), \\ A &= 0.25(x_2 - x_1)(z_2 - z_1), \end{aligned}$$

پارامترهای  $n_x$  و  $n_z$  تعداد توابع ارزیابی شده در راستاهای  $x$  و  $z$  می‌باشند. همچنین  $w_k$  و  $w_l$  وزن‌هایی هستند در مقادیر تابع ضرب می‌شوند تا مقدار انتگرال حاصل شود. مقادیر وزن‌ها و طول  $(u, v)$  به وسیله چرچهاوس (۱۹۸۱) داده شده است. باید به این نکته توجه داشت که با هر بار تغییر موقعیت الکترودها، مقدار حساسیت برای هر سلول باید محاسبه شود و در آخر مقادیر محاسبه شده برای هر سلول با هم جمع می‌شود.

بین الکترودها در مناطق سطحی نزدیک، تابع حساسیت می‌تواند منفی باشد (شیما، ۱۹۹۲). به این ترتیب وقتی که اندازه سلول از یک‌دوم فضای الکتروود واحد کمتر باشد، جملات  $S_i$  می‌توانند ضرایب مثبت و منفی با مقادیر بسیار بزرگ نزدیک به الکتروود داشته باشند. در نتیجه، BPRT نزدیک به الکترودها ناپایدار می‌شود. برای غلبه‌ی جزئی بر این مسئله، نرمال‌سازی جملات ماتریس  $B$  با تقسیم هر جمله  $S_{i,j}$  بر مجموع مقادیر مطلق تمام ضرایب مرتبط به اندازه  $\rho_i$ ، ایجاد می‌شود (کوستینو و همکاران، ۱۹۹۸).

$$B_{i,j} = \frac{S_{i,j}}{\sum_{i=1}^M |S_{i,j}|}. \quad (20)$$

به این ترتیب تأثیرات نوسان تابع حساسیت در نزدیکی الکترودها بدون وجود افت معنی‌دار در دقت محاسبات، به شدت تضعیف می‌شود.

#### ۴-۲ وارون ماتریس حساسیت

وارون ماتریس حساسیت  $B$  در معادله‌های (۵) و (۶) اساس BPRT هنگام تخمین  $\rho_i$  است. با این حال، حل تحلیلی

$$\frac{\partial \phi}{\partial \rho} = \frac{I_S}{4\pi^2} \int_{z_1}^{z_2} \int_{x_1}^{x_2} F_y dx dz, \quad (15)$$

برای مقادیر از  $x$  که بزرگ‌تر از  $0.5a$  می‌باشد،  $F_y$  به صورت زیر داده می‌شود (لوک و بارکر، ۱۹۹۵):

$$F_y = \frac{2}{\alpha\beta^2} \left[ \frac{\alpha^2 E(k) - \beta^2 K(k)}{(\alpha^2 - \beta^2)} - \frac{xa[(\alpha^2 + \beta^2)E(k) - 2\beta^2 K(k)]}{(\alpha^2 - \beta^2)^2} \right], \quad (16)$$

که  $\alpha^2 = x^2 + z^2$ ،  $\beta^2 = (x-a)^2 + z^2$  و  $k = (\alpha^2 + \beta^2)^{0.5/a}$  به طوری که  $\alpha > \beta > 0$ .  $E(k)$  و  $K(k)$  انتگرال‌های بیضوی کامل نوع اول و دوم به ترتیب می‌باشند (پرس، ۱۹۸۸). برای مقادیر از  $x$  که کوچک‌تر از  $0.5a$  می‌باشد،  $F_y$  به صورت زیر داده می‌شود (لوک و بارکر، ۱۹۹۵):

$$F_y = \frac{2}{\alpha\beta^2} \left[ \frac{\alpha^2 E(k) - \beta^2 K(k)}{(\alpha^2 - \beta^2)} - \frac{a(x-a)[(\alpha^2 + \beta^2)E(k) - 2\beta^2 K(k)]}{(\alpha^2 - \beta^2)^2} \right], \quad (17)$$

که  $\alpha^2 = (x-a)^2 + z^2$ ،  $\beta^2 = x^2 + z^2$  هنگامی که  $x$  برابر با  $0.5a$  باشد،  $F_y$  به صورت زیر قابل محاسبه است (لوک و بارکر، ۱۹۹۵):

$$F_y = \pi \left[ \frac{1}{2\alpha^3} - \frac{3\alpha^2}{16\alpha^5} \right], \quad (18)$$

بنابراین برای محاسبه مشتق جزئی می‌توان نوشت (لوک و بارکر، ۱۹۹۵):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial \rho} &= \frac{I_S}{4\pi^2} \int_{z_1}^{z_2} \int_{x_1}^{x_2} F_y(x, y) dx dz \\ &= \frac{AI_S}{4\pi^2} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} F_y(u, v) du dv \\ &\approx \frac{AI_S}{4\pi^2} \sum_{l=1}^{n_z} \sum_{k=1}^{n_x} w_k w_l F_y(u, v), \end{aligned} \quad (19)$$

واضح است که تصاویر وارون هموار است. به علاوه، تباین‌های مقاومتی عموماً نسبت به مقدار واقعی بسیار پایین‌تر می‌باشند. برای هر چهار آرایه، نتایج تصویرسازی با ترانهاده ماتریس حساسیت، عمق توده مقاومتی را بیشتر از مقدار واقعی نشان می‌دهند. با توجه به اینکه ماتریس  $B$  عموماً بدرفتار (ill-conditioned) بوده و مربعی نمی‌باشد، یک راه‌حل دقیق‌تر برای وارون‌سازی، راه‌حل کمترین مربعات میرا است (منکه، ۱۹۸۹؛ دهقانی و همکاران، ۱۹۹۹):

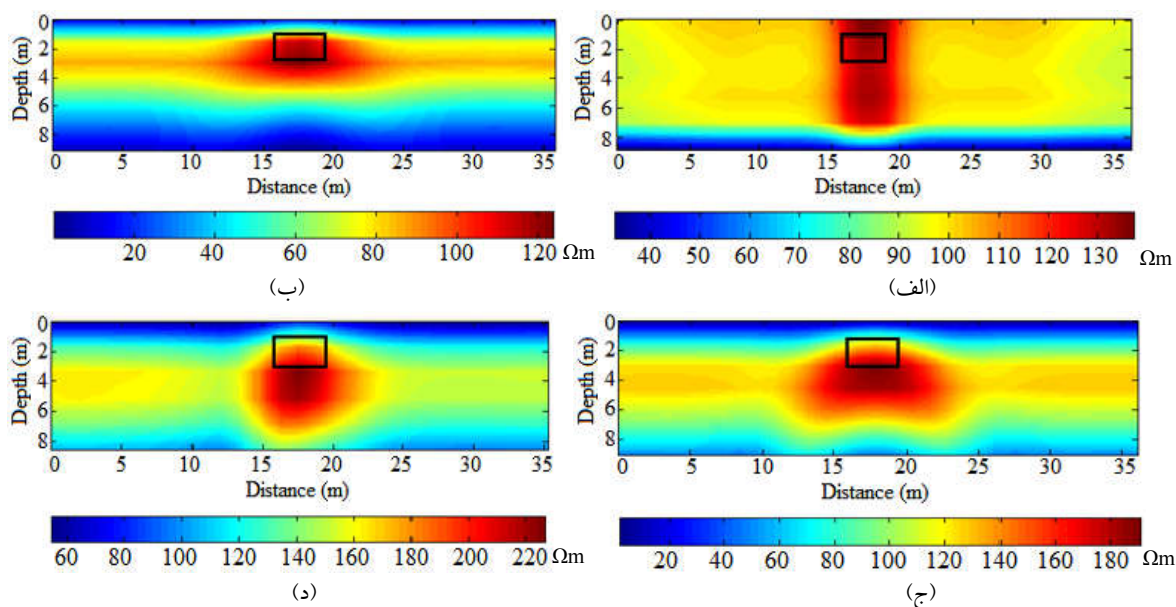
$$\rho_n = \rho_0 + [B^T B + \lambda F_{\max} I]^{-1} B^T (\rho_a - \rho_0), \quad (22)$$

که  $\rho_0$  بردار مقاومت پس‌زمینه همگن،  $\lambda$  ضریب میرایی،  $F_{\max}$  بیشترین مقدار از مقادیر قطر اصلی ماتریس  $[B^T B]$ ، و  $I$  یک ماتریس قطری واحد هم‌اندازه با ماتریس  $[B^T B]$  است. به این ترتیب ماتریس مربع  $[B^T B]$  برای به دست آوردن یک راه‌حل تقریبی تنظیم می‌شود.

معادله (۶) جزئی نبوده و فرآیند غالباً ناپایدار است. راه‌حل‌های تقریبی مطرح شده‌اند که ماتریس وارون  $B^{-1}$  را با ماتریس انتقال  $B^T$  جایگزین می‌کنند (کوستینو و همکاران، ۱۹۹۸؛ کوتر، ۱۹۹۴؛ شیما، ۱۹۹۲)؛ زیرا ماتریس  $B$  در اکثر مواقع یک ماتریس مربع نیست تا بتوان معکوس آن را محاسبه نمود. به عبارت دیگر زمانی می‌توان از  $B^{-1}$  استفاده نمود که تعداد نقاط محاسبه‌ای با تعداد سلول‌ها برابر باشد، یعنی تعداد  $M$  با  $N$  در معادله (۷) با هم برابر باشد؛ بنابراین حل معادله (۶) به صورت زیر است:

$$\rho_t = [B^T B] B^T \cdot \rho_a. \quad (21)$$

نتیجه تصویرسازی وارون به دست آمده با استفاده از  $B^T$  بر اساس معادله‌های (۶) و (۲۱) برای آرایه‌های ونر-شلومبرژه، ونر (بتا)، دوقطبی-دوقطبی و قطبی-دوقطبی در شکل ۵-الف تا ۵-د نشان داده شده است.

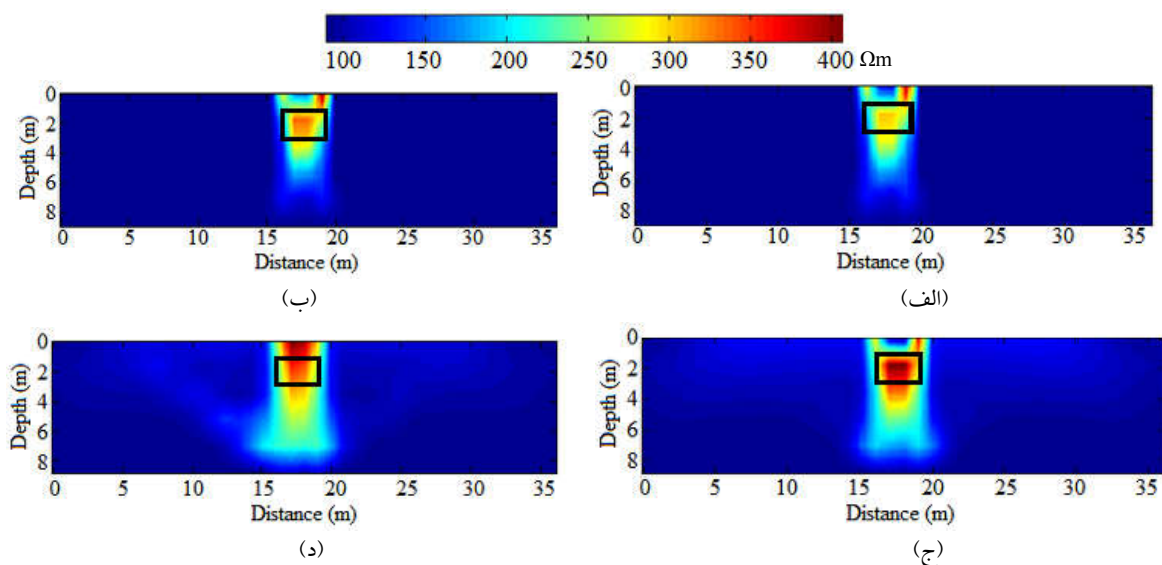


شکل ۵. مدل‌های پس‌بینی (تصویرسازی وارون) به دست آمده با استفاده از  $B^T$  بر اساس معادله (۶) برای آرایه‌های (الف) ونر-شلومبرژه، (ب) ونر، (ج) دوقطبی-دوقطبی و (د) قطبی-دوقطبی. موقعیت توده مقاومتی مدفون با مستطیل سیاه‌رنگ روی شکل‌ها مشخص شده است.

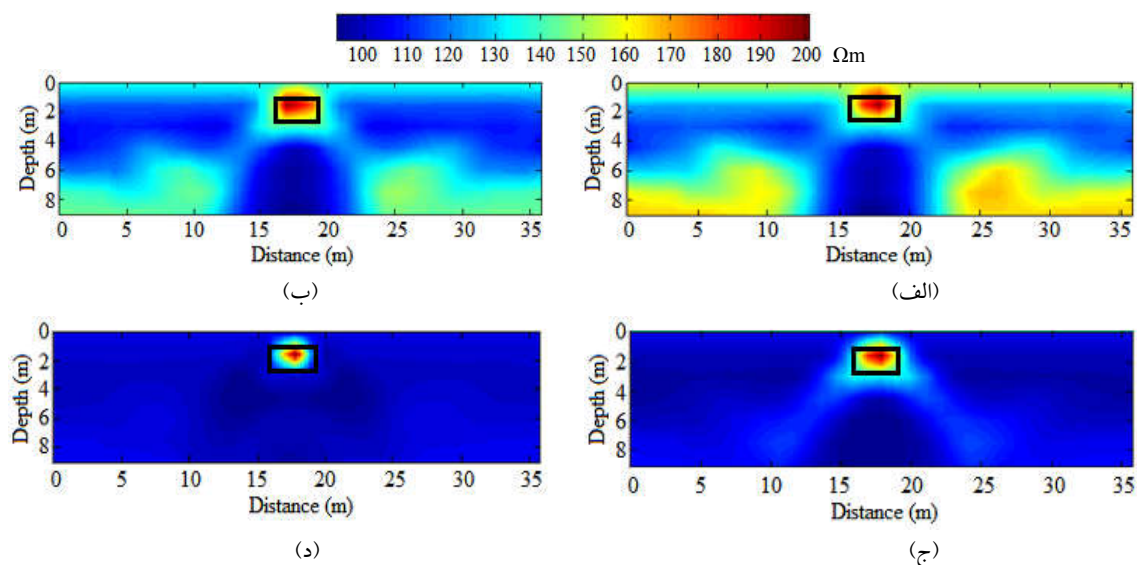


بنابراین، اگر میرایی بیش از حد بالا رود، ( $\lambda \leq 0.1$ ) تصویر بیش از حد صاف و نامشخص می‌شود. وارون‌های نتیجه شده برای آرایه ونر- شلومبرژه نشان از یک سازگاری مطلوب برای وارون‌های دو بعدی با انتخاب  $\lambda \approx 0.1$  دارد. شکل ۷ نشان می‌دهد که برای  $\lambda \leq 0.2$ ، تصاویر پس‌بینی عموماً دارای نوفه بوده و به‌علاوه، بی‌هنجاری‌های مثبت و منفی آشکار شده نشانه‌ی بی‌ثباتی روند موجودند. با کاهش  $\lambda$  نوفه کاهش می‌یابد، درحالی‌که شیب مقاومت ویژه تا حدی کاهش می‌یابد؛ بنابراین اگر میرایی بیش از حد کوچک باشد تصویر بیش از حد صاف و نامشخص می‌شود. وارون‌های نتیجه شده برای آرایه ونر نشان از یک سازگاری مطلوب برای وارون‌های دو بعدی با انتخاب  $\lambda \approx 0.2$  دارد. با توجه به شکل‌های ۸ و ۹ آشکار است که عملکرد ضریب میرایی مشابه آرایه ونر- شلومبرژه می‌باشد. وارون‌های نتیجه شده برای آرایه دوقطبی- دوقطبی و قطبی- دو قطبی به ترتیب نشان از یک سازگاری مطلوب برای وارون‌ها دو بعدی با انتخاب  $\lambda \approx 1$  و  $\lambda \approx 0.5$  دارد.

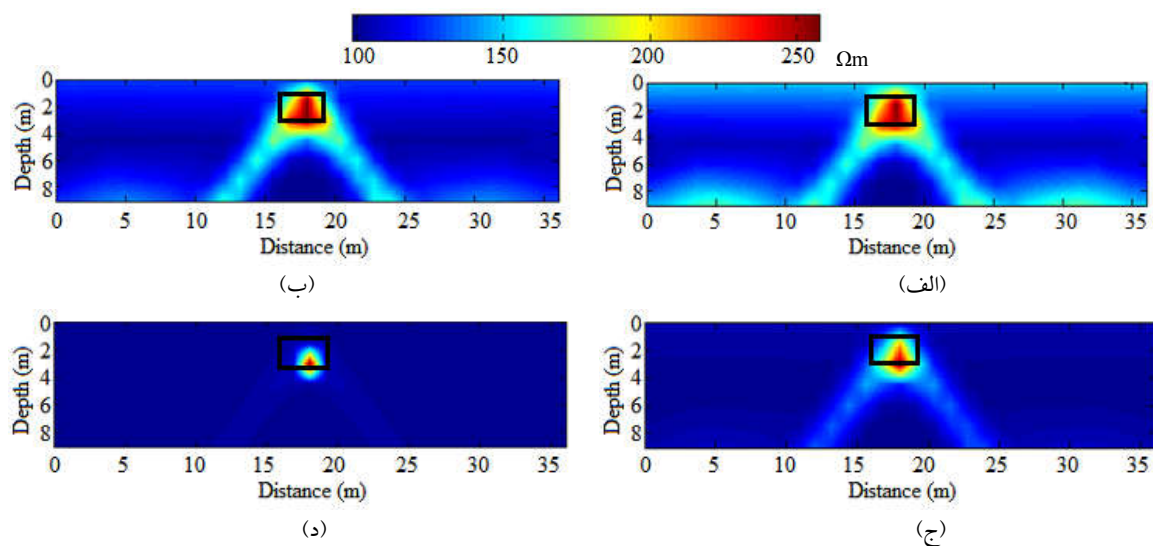
برای هر مقدار غیر صفر  $\lambda$  یک وارون قابل محاسبه است، اگرچه شرایط عددی و ثبات وارون به مقدار ضریب میرایی  $\lambda$  بستگی دارد؛ بدین معنی که برای آرایه‌های مختلف، مقادیر متفاوت عددی  $\lambda$  می‌تواند تصاویری هموار و یا نوفه‌دار حاصل نمایند. تصاویر هموار و بدون نوفه نشان از ثبات وارون می‌باشد. نقشه‌های الف تا د شکل‌های ۶ الی ۹ نتایج حاصل از وارون حداقل مربعات میرا شده یک مرحله‌ای (یک‌بار تکرار) داده‌های ساختگی مدل شکل ۲ به‌ازای ضرایب میرایی ۱۰، ۱، ۰/۱ و ۰/۰۱ برای آرایه ونر- شلومبرژه، به‌ازای ضرایب میرایی ۱۰۰، ۵۰، ۲۰ و ۱۰ برای آرایه ونر، به‌ازای ضرایب میرایی ۱۰۰، ۵۰، ۱۰ و ۱ برای آرایه دوقطبی- دوقطبی و به‌ازای ضرایب میرایی ۵۰، ۲۰، ۵ و ۰/۵ برای آرایه قطبی- دو قطبی را به ترتیب نشان می‌دهند. شکل ۶ نشان می‌دهد که برای  $\lambda \geq 0.1$ ، تصاویر پس‌بینی عموماً دارای نوفه بوده و به‌علاوه، بی‌هنجاری‌های مثبت و منفی آشکار شده نشانه بی‌ثباتی روند موجودند. با افزایش  $\lambda$  پارازیت کاهش می‌یابد، درحالی‌که شیب مقاومت ویژه کاهش می‌یابد؛



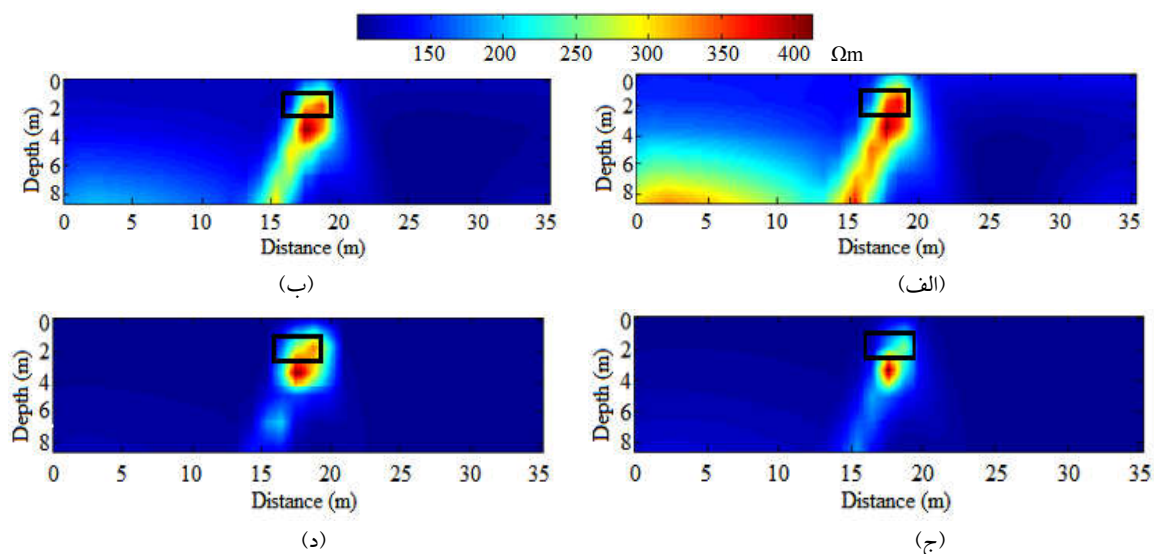
شکل ۶. نتایج حاصل از وارون حداقل مربعات میرا شده یک مرحله‌ای (یک‌بار تکرار) داده‌های ساختگی مدل شکل ۲ برای آرایه ونر- شلومبرژه به‌ازای ضرایب میرایی (الف)  $\lambda=10$ ، (ب)  $\lambda=1$ ، (ج)  $\lambda=0.1$ ، و (د)  $\lambda=0.01$ . موقعیت توده مقاومتی مدفون با مستطیل سیاه‌رنگ روی شکل‌ها مشخص شده است.



شکل ۷. نتایج حاصل از وارون حداقل مربعات میرا شده یک مرحله‌ای (یکبار تکرار) داده‌های ساختگی مدل شکل ۲ برای آرایه‌ی ونر به ازای ضرایب میرایی (الف)  $\lambda=100$ ، (ب)  $\lambda=50$ ، (ج)  $\lambda=20$ ، (د)  $\lambda=10$ . موقعیت توده مقاومتی مدفون با مستطیل سیاه‌رنگ روی شکل‌ها مشخص شده است.



شکل ۸. نتایج حاصل از وارون حداقل مربعات میرا شده یک مرحله‌ای (یکبار تکرار) داده‌های ساختگی مدل شکل ۲ برای آرایه‌ی دوقطبی - دوقطبی به ازای ضرایب میرایی (الف)  $\lambda=100$ ، (ب)  $\lambda=50$ ، (ج)  $\lambda=10$ ، (د)  $\lambda=1$ . موقعیت توده مقاومتی مدفون با مستطیل سیاه‌رنگ روی شکل‌ها مشخص شده است.



شکل ۹. نتایج حاصل از وارون حداقل مربعات میرا شده یک مرحله‌ای (یک‌بار تکرار) داده‌های ساختگی مدل شکل ۲ برای آرایه‌ی قطبی - دوقطبی به‌زای ضرایب میرایی (الف)  $\lambda=50$ ، (ب)  $\lambda=20$ ، (ج)  $\lambda=5$ ، (د)  $\lambda=0.5$ . موقعیت توده مقاومتی مدفون با مستطیل سیاه‌رنگ روی شکل‌ها مشخص شده است.

$$N(\rho_e) = 2 \left( \frac{\ln \rho_e - \ln \rho_{e,\min}}{\ln \rho_{e,\max} - \ln \rho_{e,\min}} \right) - 1, \quad (24)$$

که  $\rho_e$  معرف داده‌ها می‌باشد (می‌تواند  $\rho_a$  یا  $\rho$  باشد) و  $\rho_{e,\min}$  و  $\rho_{e,\max}$  به ترتیب حداقل و حداکثر مقادیر هستند. شکل‌های الف تا د-۱۰ الگوی تابع نرمال‌سازی  $N(\rho_e)$  را به ترتیب برای آرایه‌های ونر- شلومبرژه، ونر، دوقطبی - دوقطبی و قطبی - دوقطبی مدل مصنوعی شکل ۲ نشان می‌دهد که برای مجموعه از داده‌های اندازه‌گیری شده و مقادیر مقاومت ویژه حاصل شده از مرحله اول (تکرار اول) وارون اعمال شده است. به این ترتیب  $N(\rho_e)$  در گستره‌ی ۱- (برای حداقل مقاومت) تا ۱ (برای حداکثر) قرار می‌گیرد. در شکل‌های اخیر ستاره‌های سیاه‌رنگ مقادیر مقاومت ویژه ظاهری اولیه مدل  $N(\rho_a)$  و  $\rho_a$  در معادله (۲۱) و ستاره‌های قرمز رنگ مقادیر مقاومت ویژه ظاهری محاسبه شده  $N(\rho_a)$  در اولین تکرار از وارون‌سازی می‌باشد (در معادله (۲۱) با اولین تکرار در وارون، مقادیر  $\rho_e$  که مقاومت ویژه سلول‌های مدل جدید می‌باشد حاصل می‌شود که با توجه به مدل اخیر و انجام

۳-۴ تجدید محاسبه ماتریس حساسیت با استفاده از یک فیلتر همبستگی (افزایش گرادیان) گام بعدی روش تصویربرداری پیشنهادی عبارت است از تجدید محاسبه ماتریس حساسیت  $B$  که با یک ماتریس  $B'$  جایگزین می‌شود به طوری که هر جمله با اعمال یک فیلتر همبستگی محاسبه می‌شود (مارتورانا و کاپیتزی، ۲۰۱۴):

$$B'_{i,j} = B_{i,j} \cdot \Phi[\rho_{aj}, \rho_j]. \quad (23)$$

هدف از فیلتر این است که وقتی مقدار مقاومت ویژه مرحله اول وارون‌سازی سلول نام و مقدار مقاومت ویژه ظاهری داده زام یک همبستگی پایین را نشان می‌دهد، جمله  $B_{i,j}$  مرتبط با سلول نام و نیز داده مقاومت ویژه ظاهری زام کاهش داده شوند. به منظور برآورد درست مقدار همبستگی بین مجموعه داده‌هایی از انواع مختلف، هر دو مجموعه داده تجربی (مقاومت‌های ظاهری و مقاومت‌های ویژه مرحله اول (تکرار اول)) با استفاده از تابع نرمال‌سازی زیر، از قبل نرمال‌سازی می‌شوند:

این، هرچه مقدار  $\chi$  بالاتر باشد، درجه میرایی بالاتر است. مثلاً اگر اختلاف تابع نرمال سازی  $|N(\rho) - N(\rho_a)|$  برابر  $0.5$  و پارامتر برابر  $\chi = 5$  باشد، با توجه به شکل ۱۱ مقدار تابع فیلترینگ  $\Phi(\rho_a, \rho)$   $0.3$  می باشد. هر چه مقدار اختلاف تابع نرمال ساز افزایش یابد، مقدار تابع فیلترینگ با توجه به منحنی  $\chi = 5$  نیز کاهش می یابد. مقدار تابع فیلترینگ برای اختلاف بین تمامی مقادیر مقاومت ویژه ظاهری محاسبه شده (ستاره های قرمز رنگ در شکل های بالا) و مقادیر اولیه اندازه گیری شده (ستاره های سیاه رنگ در شکل های بالا) محاسبه می شود. در نتیجه باعث می شود تا دقت نتیجه وارون سازی افزایش یابد و منطقه دارای افزایش یا کاهش مقاومت ویژه در زیر زمین با دقت بالاتر و کیفیت بهتری بازسازی شود.

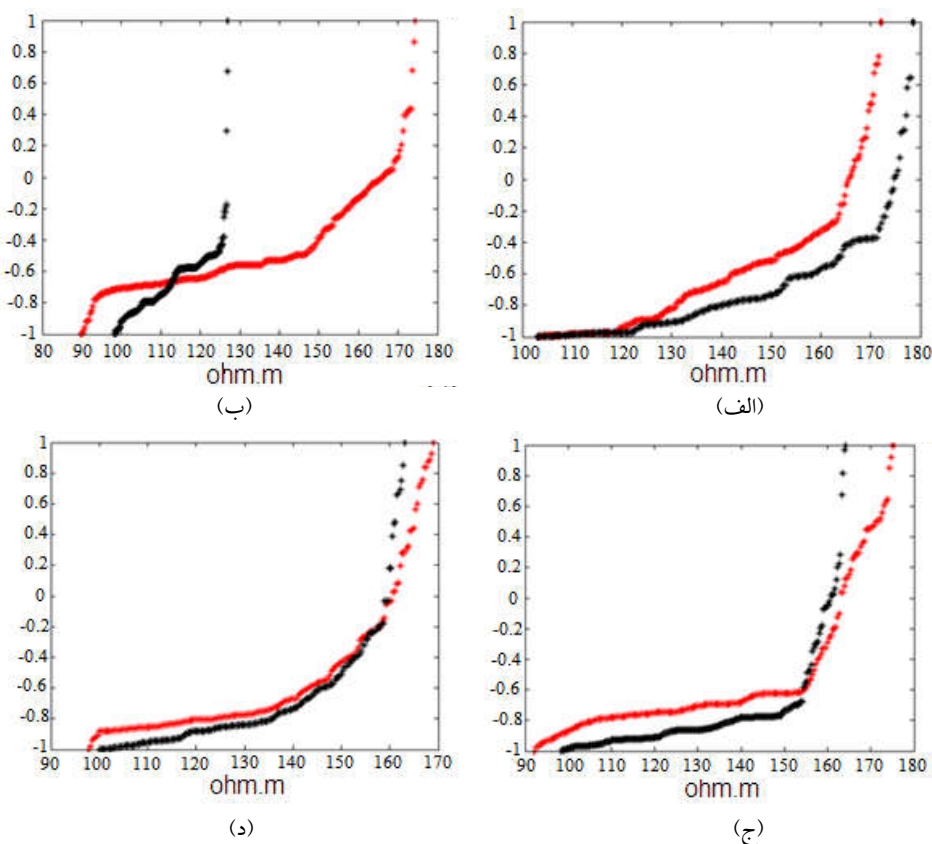
مدل سازی پیشرو، مقاومت ویژه ظاهری این مدل در اولین تکرار محاسبه می شود.

بنابراین تابع فیلترینگ  $\Phi(\rho_a, \rho)$  به صورت زیر تعریف می شود:

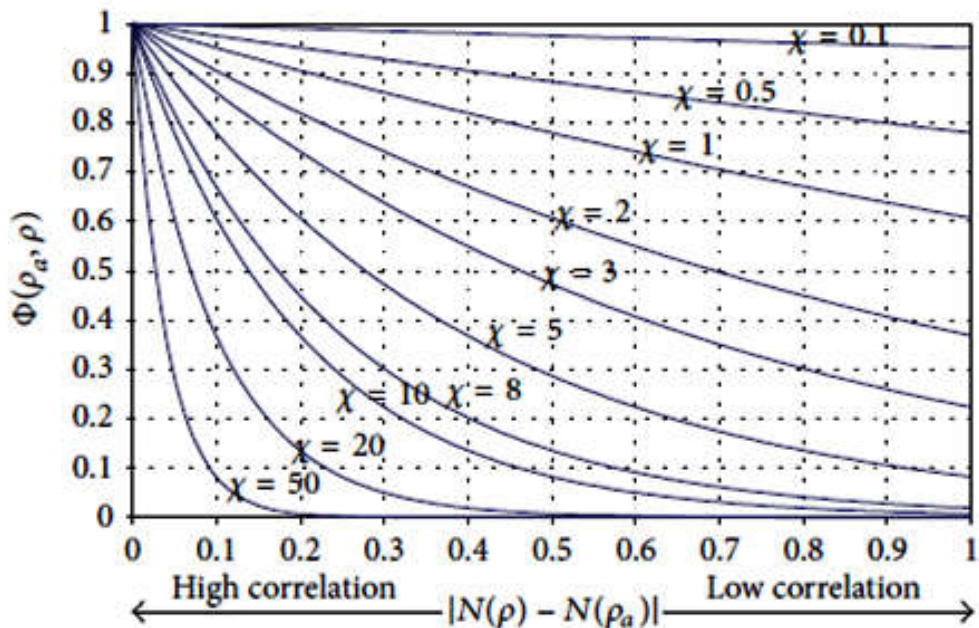
$$\Phi(\rho_a, \rho) = e^{-\chi(1/2)|N(\rho) - N(\rho_a)|} \quad (25)$$

که  $\chi$  پارامتر تصحیح است که درجه میرایی کاهش جملات  $B_{ij}$  را کنترل می کند. به این ترتیب  $\Phi(\rho_a, \rho)$  از  $e^{-x}$  (در صورتی که همبستگی بین  $\rho$  و  $\rho_a$  کمترین باشد) تا ۱ (در صورتی که همبستگی بالاترین باشد) متفاوت است.

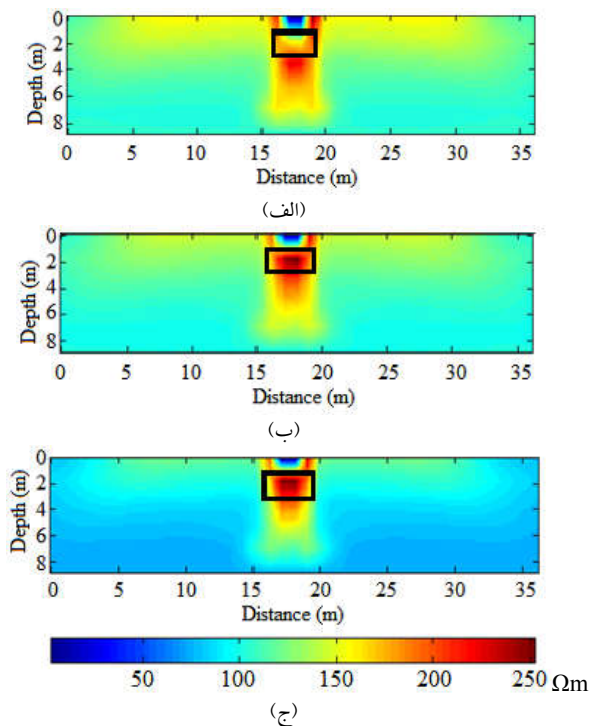
شکل ۱۱ الگوی تابع فیلترینگ را برای مقادیر مختلف پارامتر  $\chi$  نشان می دهد. هرچه همبستگی پایین تر باشد، مقدار  $\Phi(\rho_a, \rho)$  پایین تر (میرایی بالاتر) است. علاوه بر



شکل ۱۰. الگوی تابع نرمال سازی  $N(\rho)$  مجموعه داده های اندازه گیری شده (ستاره های مشکی) و مقادیر مقاومت حاصل شده از مرحله اول (تکرار اول) وارون (ستاره های قرمز) برای (الف) آرایه ی ونر-شلومبرژه، (ب) آرایه ی ونر، (ج) آرایه ی دوقطبی - دوقطبی، (د) آرایه ی قطبی - دوقطبی.



شکل ۱۱. الگوی تابع فیلترینگ برای مقادیر مختلف پارامتر  $\lambda$  (مارتورانا و کاپیتزی، ۲۰۱۴).



شکل ۱۲. نتایج تصویرسازی با روش کمترین مربعات میرا برای مقادیر مقاومت ویژه ظاهری مدل شکل ۲ حاصل شده از آرایه ونر-شلومبرژه با مقادیر پارامتر  $\lambda$  (الف) ۰/۵ و (ب) ۵ و (ج) ۵۰. موقعیت توده مقاومتی مدفون با مستطیل سیاه‌رنگ روی شکل‌ها مشخص شده است.

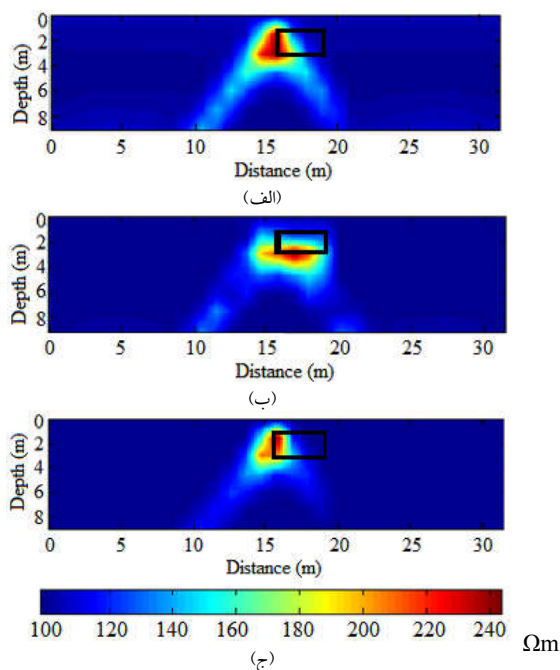
#### ۴-۴ وارون ماتریس فیلتر شده $B'$

در نهایت هر ضریب حساسیت با استفاده از معادله (۲۳) و با استفاده از وارون حداقل مربعات میرا شده دوباره محاسبه می‌شود، بنابراین با قرار دادن ماتریس فیلتر شده  $B'$  به جای  $B$  معادله زیر حاصل می‌شود:

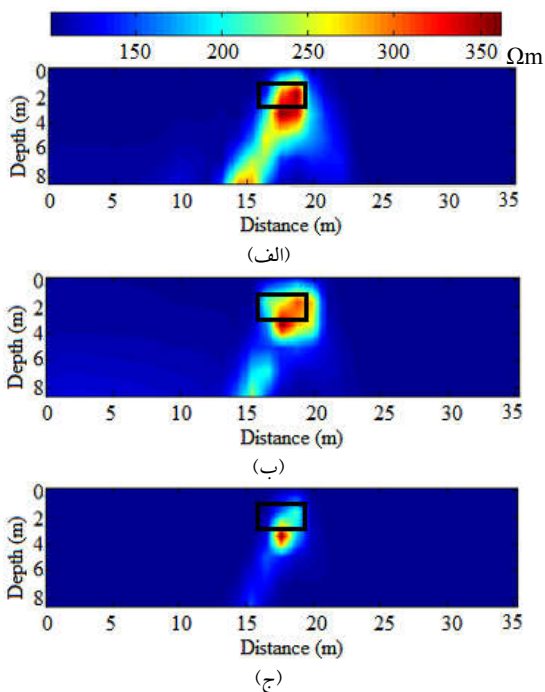
$$\rho_n = \rho_0 + [B'^T B + \lambda F_{\max} I]^{-1} B'^T (\rho_a - \rho_0). \quad (26)$$

در شکل‌های ۱۲ الی ۱۵ تأثیر پارامتر اصلاح  $\lambda$  بر تصویرسازی وارون مقادیر مقاومت ویژه ظاهری مدل شکل ۲ به ترتیب برای آرایه‌های ونر-شلومبرژه، ونر، دوقطبی - دوقطبی و قطبی - دوقطبی نشان داده شده است.

وضوح تصویر جدید توموگرافی به مقدار پارامتر تصحیح  $\lambda$  بستگی دارد. با توجه به چهار شکل اخیر می‌توان گفت بهترین تصویر که موقعیت توده زیرسطحی را با خطای کمتری نسبت به موقعیت واقعی توده آشکار

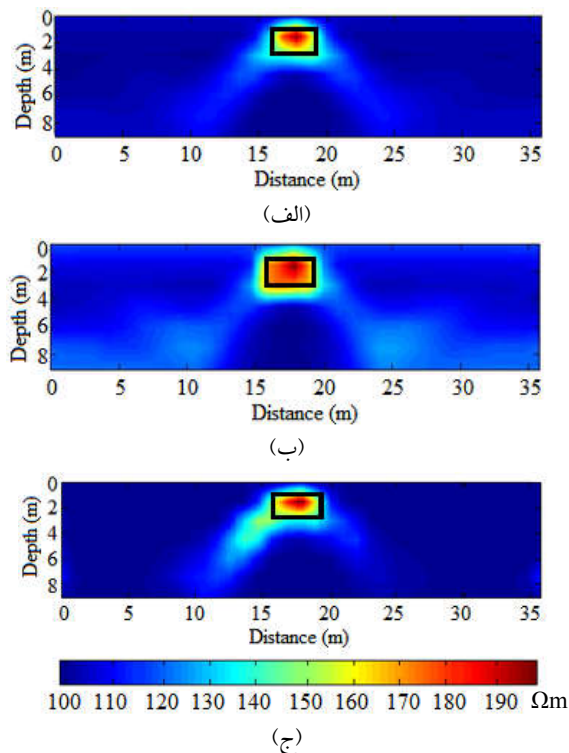


شکل ۱۴. نتایج تصویرسازی با روش کمترین مربعات میرا برای مقادیر مقاومت ویژه ظاهری مدل شکل ۲ حاصل شده از آرایه دوقطبی - دوقطبی با مقادیر پارامتر  $\chi$  (الف) ۰/۵، (ب) ۵ و (ج) ۵۰. موقعیت توده مقاومتی مدفون با مستطیل سیاه‌رنگ روی شکل‌ها مشخص شده است.



شکل ۱۵. نتایج تصویرسازی با روش کمترین مربعات میرا برای مقادیر مقاومت ویژه ظاهری مدل شکل ۲ حاصل شده از روش قطبی - دوقطبی با مقادیر پارامتر  $\chi$  (الف) ۰/۵، (ب) ۵ و (ج) ۵۰. موقعیت توده مقاومتی مدفون با مستطیل سیاه‌رنگ روی شکل‌ها مشخص شده است.

کرده است، مربوط به پارامتر تصحیح با مقدار ۵ برای هر چهار آرایه می‌باشد.



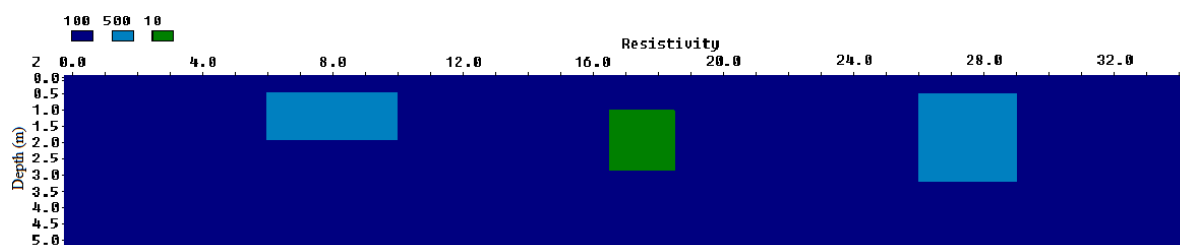
شکل ۱۳. نتایج تصویرسازی با روش کمترین مربعات میرا برای مقادیر مقاومت ویژه ظاهری مدل شکل ۲ حاصل شده از روش ویر با مقادیر پارامتر  $\chi$  (الف) ۰/۵، (ب) ۵ و (ج) ۵۰. موقعیت توده مقاومتی مدفون با مستطیل سیاه‌رنگ روی شکل‌ها مشخص شده است.

### ۵ بررسی تأثیر نوفه

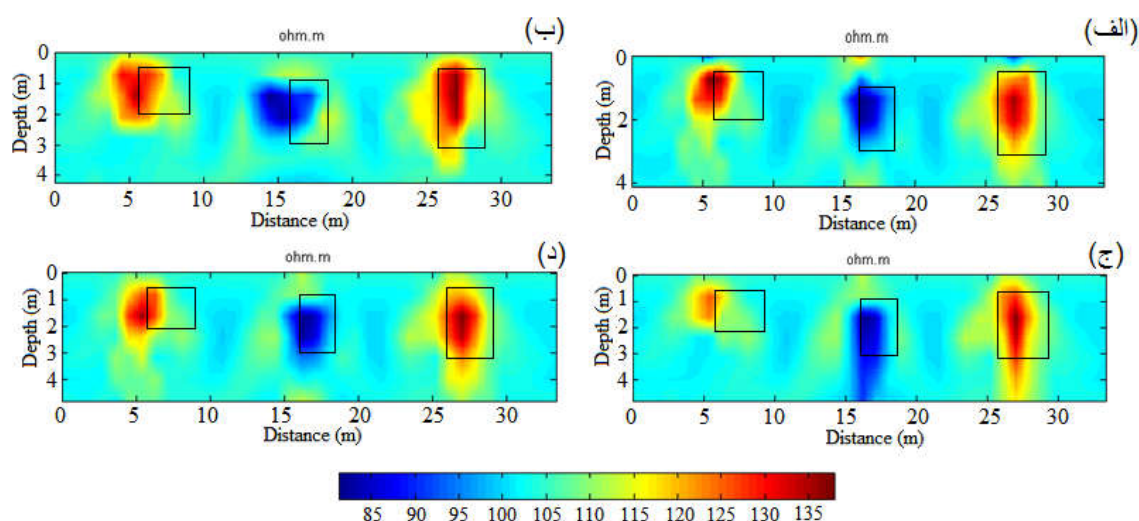
جهت بررسی بیشتر کارایی روش ارائه شده، تصویرسازی وارون برای داده‌های مقاومت ویژه ظاهری محاسبه شده با چهار آرایه برای مدل گسسته دو بعدی شکل ۱۶ صورت پذیرفت. در این مدل سه بی‌هنجاری با حجم‌های مختلف، واقع در عمق‌های متفاوت در نظر گرفته شده است. این حجم‌های مستطیل شکل به ترتیب از چپ به راست دارای ابعاد  $۴ \times ۱/۵$ ،  $۲ \times ۲$  و  $۳ \times ۳$  متر و مقاومت ویژه  $۵۰۰ \Omega m$ ،  $۱۰ \Omega m$  و  $۵۰۰ \Omega m$  در یک پس‌زمینه با مقاومت ویژه  $۱۰۰ \Omega m$  قرار دارند (شکل ۱۶)؛ بنابراین جسم وسطی رسانا و دو جسم دیگر بی‌هنجاری مقاومتی می‌باشند. مقدار فاکتور  $n$  و فاصله بین الکترودی برای

مرسوم وارون‌سازی استاندارد کمترین مربعات، از نرم‌افزار RES2DINV استفاده گردید. با استفاده از این نرم‌افزار، مدل‌سازی وارون بر روی داده‌های مقاومت ویژه ظاهری محاسبه شده با چهار آرایه ونر-شلومبرژه، ونر، دوقطبی-دوقطبی و قطبی-دوقطبی را نشان می‌دهد. در برآورد این تصاویر از مقادیر  $\lambda$  و  $\mu$  بهینه که در بخش قبلی تخمین زده شده‌اند، استفاده شده است. موقعیت توده‌های مدفون روی نقشه-های مدل‌سازی شده از تغییرات مقاومت ویژه زیرسطحی با مستطیل‌های سیاه‌رنگ مشخص شده است.

محاسبه مقاومت ویژه ظاهری، مشابه مدل شکل ۲ در نظر گرفته شده است. شکل ۱۷ نتایج تصویرسازی وارون برای چهار آرایه ونر-شلومبرژه، ونر، دوقطبی-دوقطبی و قطبی-دوقطبی را نشان می‌دهد. در برآورد این تصاویر از مقادیر  $\lambda$  و  $\mu$  بهینه که در بخش قبلی تخمین زده شده‌اند، استفاده شده است. موقعیت توده‌های مدفون روی نقشه-های مدل‌سازی شده از تغییرات مقاومت ویژه زیرسطحی با مستطیل‌های سیاه‌رنگ مشخص شده است.



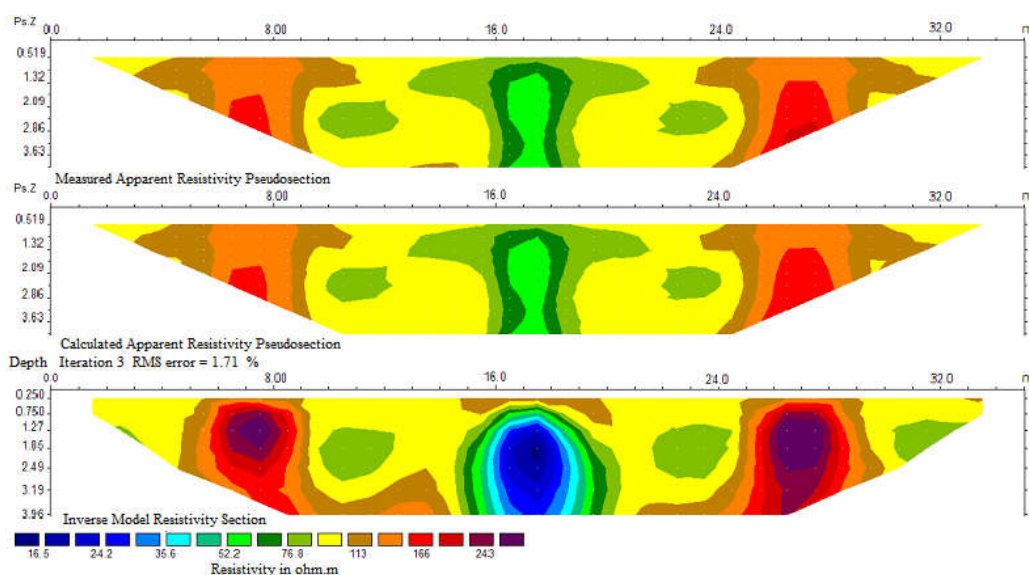
شکل ۱۶. مدل مصنوعی دارای سه جسم مستطیل شکل به ترتیب از چپ به راست با ابعاد  $4 \times 1/5$ ،  $2 \times 2$  و  $3 \times 3$  متر و مقاومت ویژه  $500 \Omega m$ ،  $10 \Omega m$  و  $100 \Omega m$  در یک پس‌زمینه با مقاومت ویژه  $100 \Omega m$ .



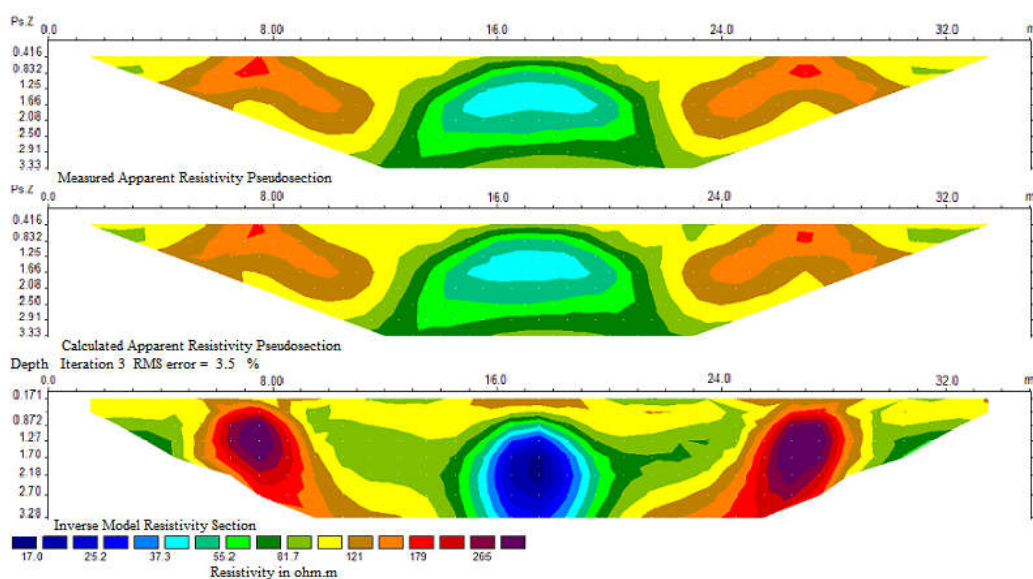
شکل ۱۷. تصویرسازی وارون کمترین مربعات میرا برای چهار آرایه (الف) ونر-شلومبرژه، (ب) ونر، (ج) دوقطبی-دوقطبی و (د) قطبی-دوقطبی مربوط به مدل مصنوعی شکل ۱۶. موقعیت توده‌های الکتریکی مدفون با مستطیل‌های سیاه‌رنگ روی شکل‌ها مشخص شده است.

همچنین نتایج وارون‌سازی با نرم‌افزار RES2DINV برای داده‌های نوفه دار در شکل‌های ۲۳ الی ۲۶ نشان داده شده است.

مورد نظر برای مدل شکل ۱۶، توسط نرم‌افزار Res2dmod مقدار ۱۰ درصد نوفه تصادفی اضافه شد. نتایج وارون‌سازی تصویر با روش کمترین مربعات میرا برای داده‌های نوفه‌دار در شکل ۲۲ آورده شده است.

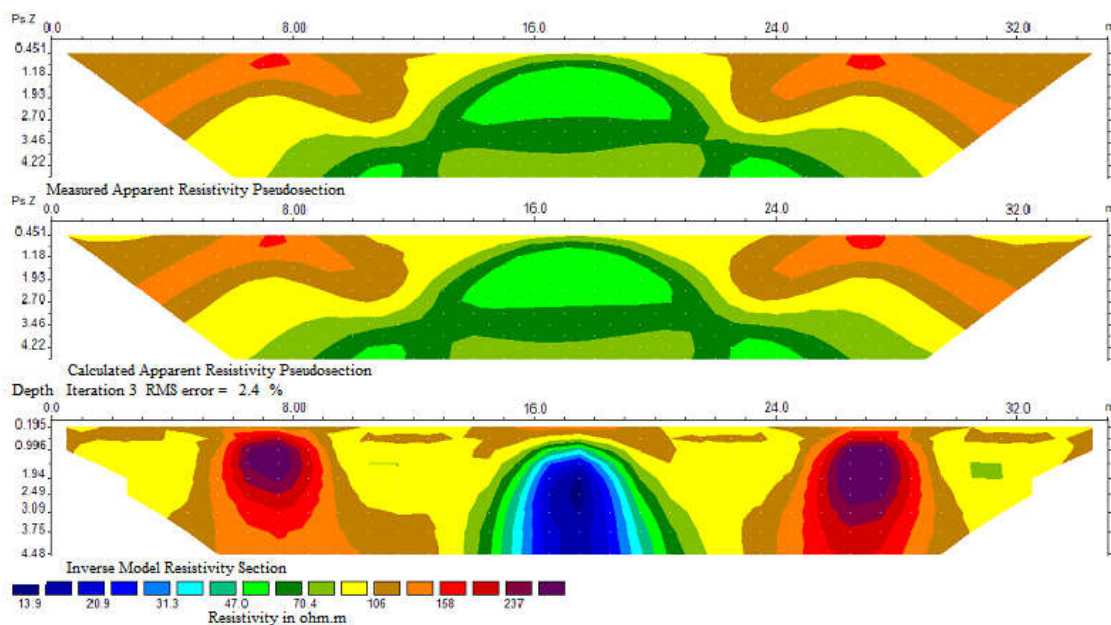


شکل ۱۸. مدل مقاومت ویژه زیرسطحی حاصل از وارون‌سازی استاندارد کمترین مربعات (مقطع پایینی) داده مقاومت ویژه ظاهری اندازه‌گیری شده برای مدل شکل ۱۶ با آرایه ونر-شلومبرژه (شبه مقطع بالایی) با استفاده از نرم‌افزار RES2DINV. شبه مقطع میانی مقدار مقاومت ویژه ظاهری محاسبه شده از وارون‌سازی می‌باشد.

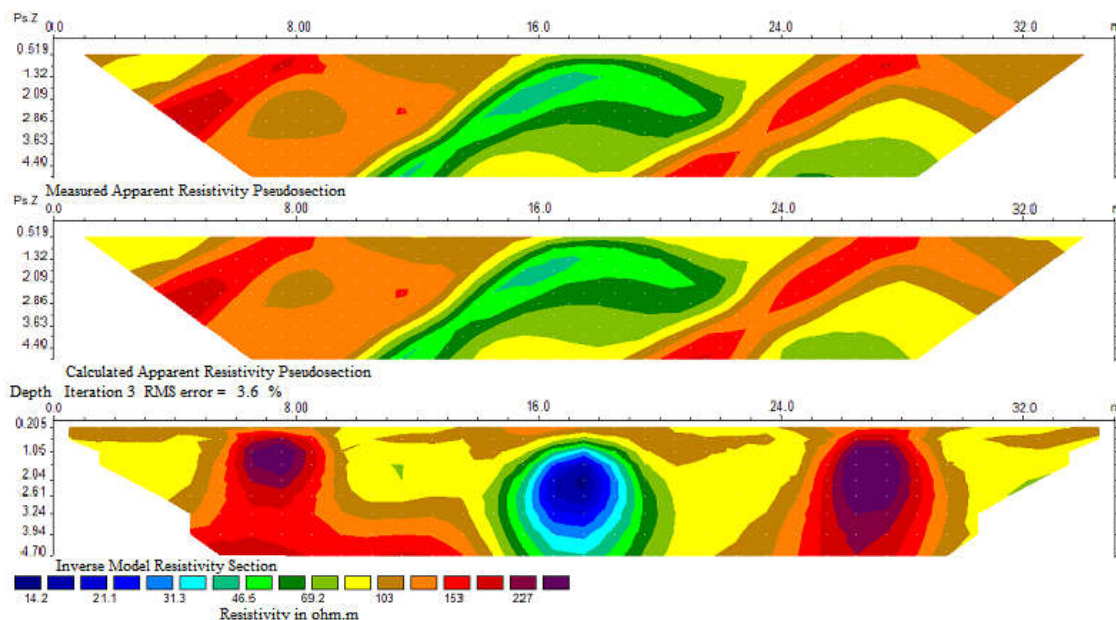


شکل ۱۹. مدل مقاومت ویژه زیرسطحی حاصل از وارون‌سازی استاندارد کمترین مربعات (مقطع پایینی) داده مقاومت ویژه ظاهری اندازه‌گیری شده برای مدل شکل ۱۶ با آرایه ونر-شلومبرژه (شبه مقطع بالایی) با استفاده از نرم‌افزار RES2DINV. شبه مقطع میانی مقدار مقاومت ویژه ظاهری محاسبه شده از وارون‌سازی می‌باشد.

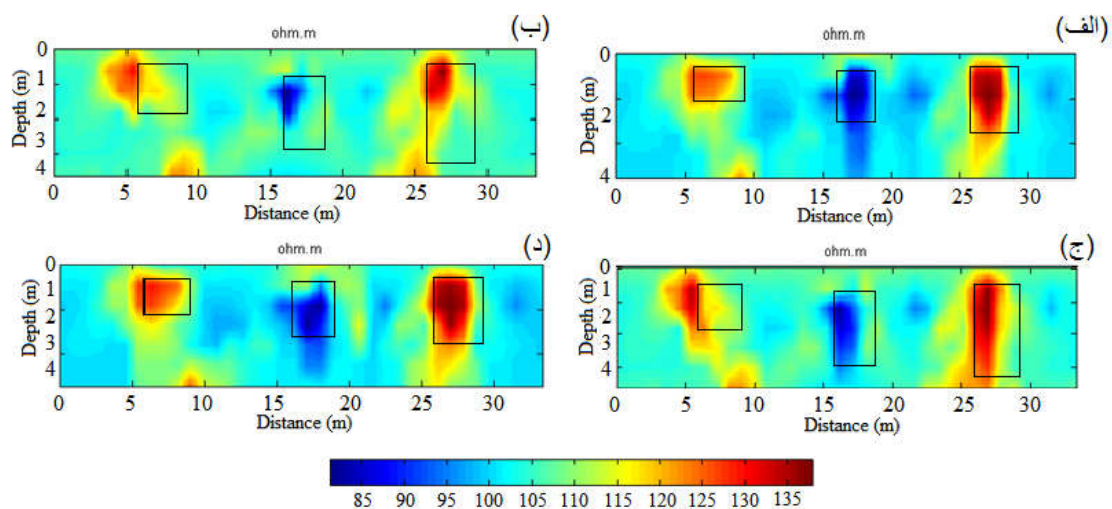




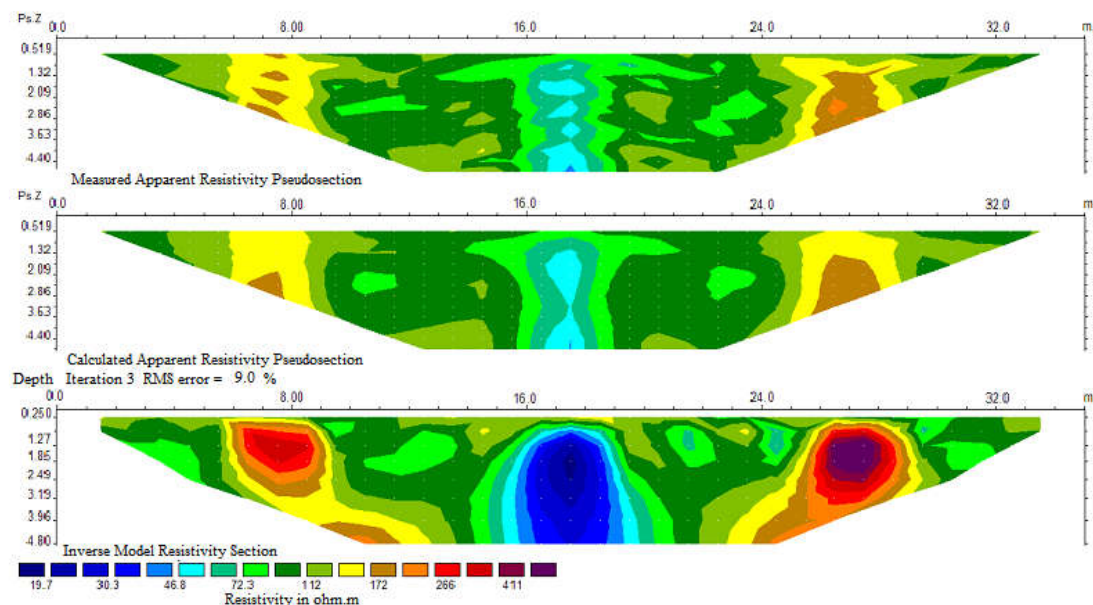
شکل ۲۰. مدل مقاومت ویژه زیرسطحی حاصل از وارون‌سازی استاندارد کمترین مربعات (مقطع پایینی) داده مقاومت ویژه ظاهری اندازه‌گیری شده برای مدل شکل ۱۶ با آرایه دوقطبی - دوقطبی (شبه مقطع بالایی) با استفاده از نرم‌افزار RES2DINV. شبه مقطع میانی مقدار مقاومت ویژه ظاهری محاسبه شده از وارون‌سازی می‌باشد.



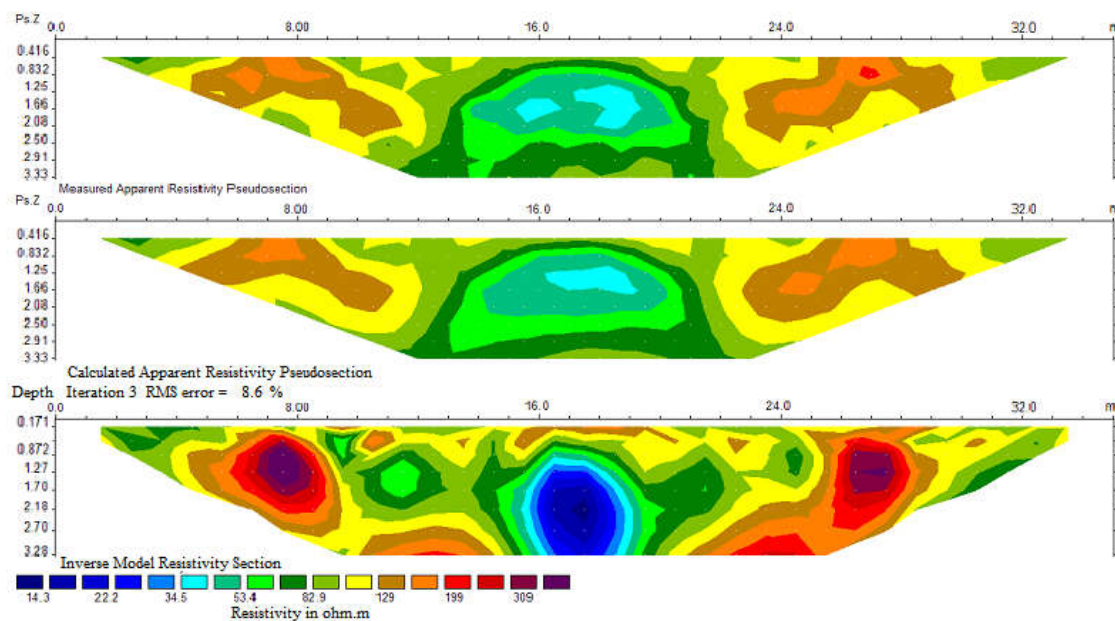
شکل ۲۱. مدل مقاومت ویژه زیرسطحی حاصل از وارون‌سازی استاندارد کمترین مربعات (مقطع پایینی) داده مقاومت ویژه ظاهری اندازه‌گیری شده برای مدل شکل ۱۶ با آرایه قطبی - دوقطبی (شبه مقطع بالایی) با استفاده از نرم‌افزار RES2DINV. شبه مقطع میانی مقدار مقاومت ویژه ظاهری محاسبه شده از وارون‌سازی می‌باشد.



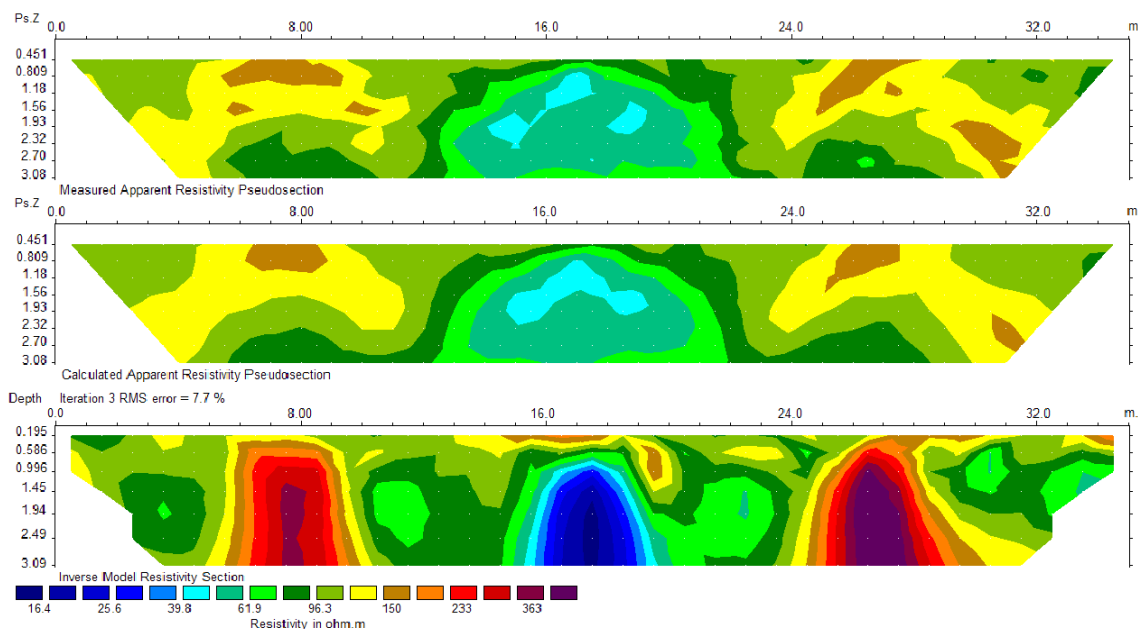
شکل ۲۲. تصویرسازی وارون کمترین مربعات میرا برای چهار آرایه (الف) ونر- شلومبرژه، (ب) ونر، (ج) دوقطبی - دوقطبی و (د) قطبی - دوقطبی مربوط به مدل مصنوعی شکل ۱۵ که به داده‌های مقاومت ویژه ظاهری ۱۰٪ نوفه تصادفی اضافه شده است.



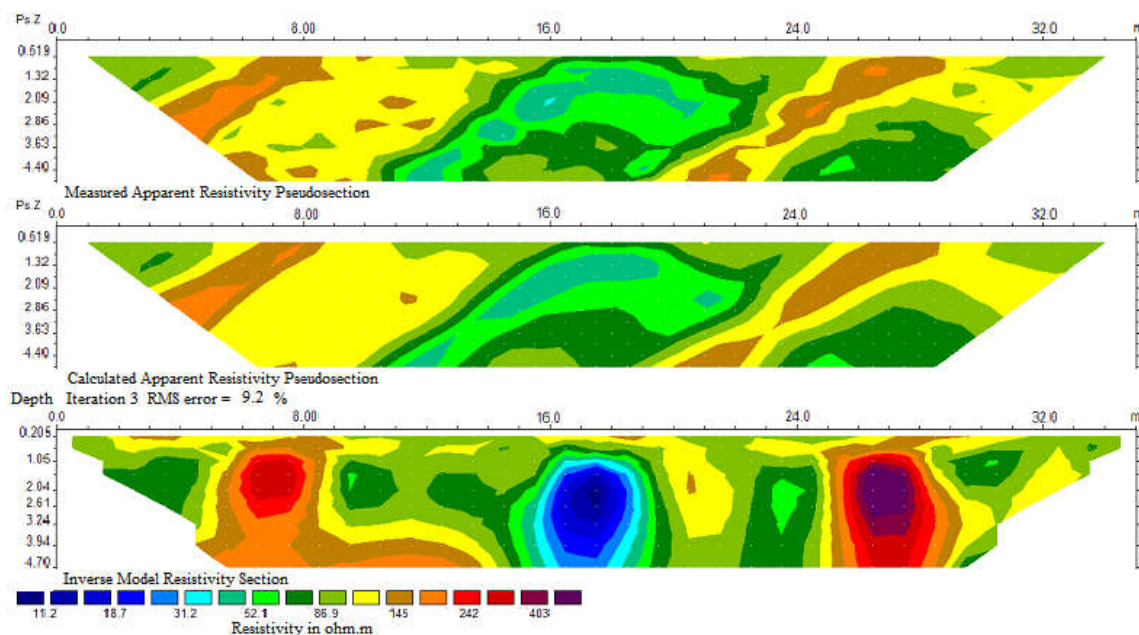
شکل ۲۳. مدل مقاومت ویژه زیرسطحی حاصل از وارون‌سازی استاندارد کمترین مربعات (مقطع پایینی) داده مقاومت ویژه ظاهری اندازه‌گیری شده برای مدل شکل ۱۶ با آرایه ونر- شلومبرژه (شبه مقطع بالایی) با ۱۰٪ نوفه تصادفی اضافه شده به وسیله نرم‌افزار RES2DINV. شبه مقطع میانی مقدار مقاومت ویژه ظاهری محاسبه شده از وارون‌سازی می‌باشد.



**شکل ۲۴.** مدل مقاومت ویژه زیرسطحی حاصل از وارون‌سازی استاندارد کمترین مربعات (مقطع پایینی) داده مقاومت ویژه ظاهری اندازه‌گیری شده برای مدل شکل ۱۶ با آرایه ونر (شبه مقطع بالایی) با ۱۰٪ نوفه تصادفی اضافه شده به وسیله نرم‌افزار RES2DINV. شبه مقطع میانی مقدار مقاومت ویژه ظاهری محاسبه شده از وارون‌سازی می‌باشد.



**شکل ۲۵.** مدل مقاومت ویژه زیرسطحی حاصل از وارون‌سازی استاندارد کمترین مربعات (مقطع پایینی) داده مقاومت ویژه ظاهری اندازه‌گیری شده برای مدل شکل ۱۶ با آرایه دوقطبی-دوقطبی (شبه مقطع بالایی) با ۱۰٪ نوفه تصادفی اضافه شده به وسیله نرم‌افزار RES2DINV. شبه مقطع میانی مقدار مقاومت ویژه ظاهری محاسبه شده از وارون‌سازی می‌باشد.

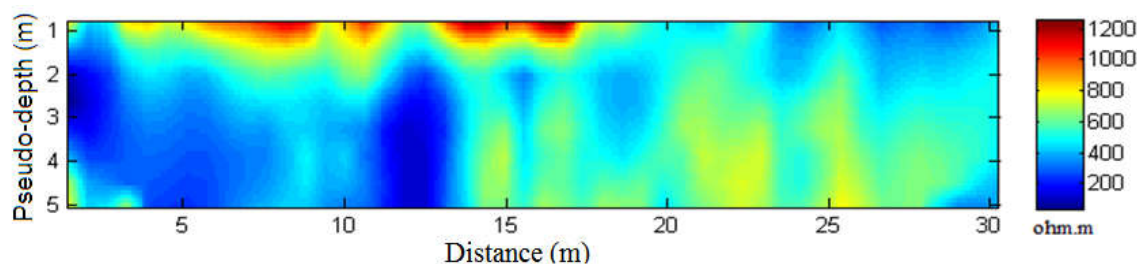


شکل ۲۶. مدل مقاومت ویژه زیرسطحی حاصل از وارون‌سازی استاندارد کمترین مربعات (مقطع پایینی) داده مقاومت ویژه ظاهری اندازه‌گیری شده برای مدل شکل ۱۶ با آرایه قطبی - دوقطبی (شبه مقطع بالایی) با ۱۰٪ نوفه تصادفی اضافه شده به وسیله نرم‌افزار RES2DINV. شبه مقطع میانی مقدار مقاومت ویژه ظاهری محاسبه شده از وارون‌سازی می‌باشد.

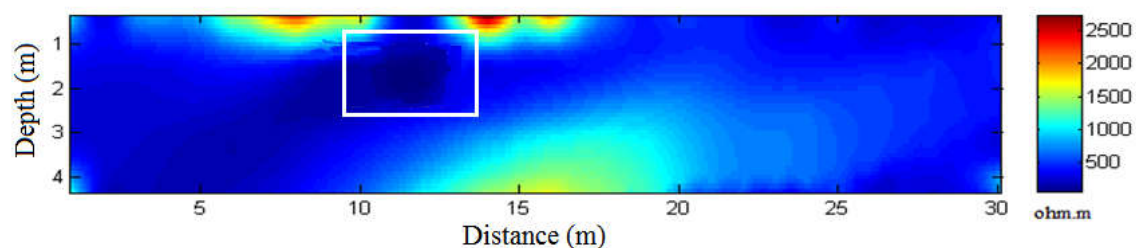
## ۶ تحلیل داده واقعی

شکل ۲۷ شبه مقطع مقاومت ویژه ظاهری اندازه‌گیری شده با آرایه ونر- شلومبرژه جهت آشکار کردن موقعیت یک لوله بتنی در زیر زمین را نشان می‌دهد. فاصله بین الکترودهای پتانسیل ۱ متر و مقدار افزایش فاکتور  $n$  بین الکترودهای جریان از ۱ تا ۸ می‌باشد. در مجموع مقدار مقاومت ویژه ظاهری مربوط به ۱۷۳ نقطه زیرزمینی در طول پروفیل اندازه‌گیری شده است. با افزایش عمق بررسی، منطقه‌ای با مقاومت ویژه ظاهری پایین بین فواصل ۱۰ تا ۱۵ متری پروفیل ظاهر می‌شود که مربوط به لوله بتنی انتقال آب با قطر نیم متر می‌باشد که در عمق ۲ متر و فاصله ۱۲ متری از ابتدای پروفیل برداشت داده واقع شده است (شکل ۲۷).

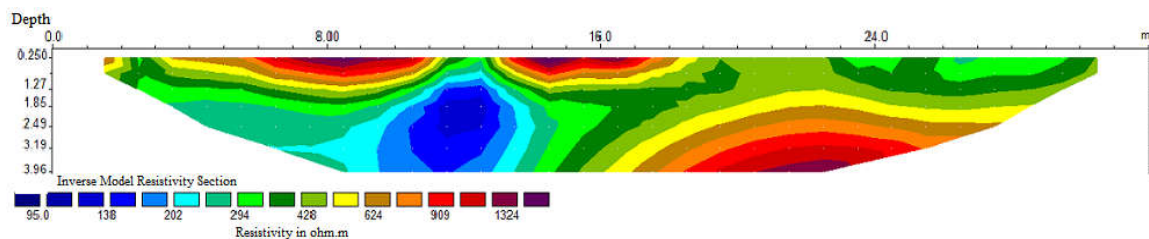
مقطع مقاومت ویژه حاصل از مدل‌سازی وارون مقاومت‌های ویژه ظاهری اندازه‌گیری شده با روش BPRT در شکل ۲۸ نشان داده شده است. مقدار پارامترهای میرایی و تصحیح به ترتیب ۰/۱ و ۵ در نظر گرفته شده است. بخشی با مقاومت ویژه پایین که در روی شکل ۲۸ با مستطیل سفیدرنگ مشخص شده است، موقعیت و عمق لوله بتنی مدفون را نشان می‌دهد. عمق میانگین به دست آمده در حدود ۱/۸ متر می‌باشد. جهت مقایسه، وارون‌سازی با روش کمترین مربعات استاندارد به وسیله نرم‌افزار RES2DINV صورت پذیرفت (شکل ۲۹).



شکل ۲۷. شبه مقطع مقاومت ویژه ظاهری اندازه‌گیری شده با آرایه ونر- شلومبرژه جهت آشکار کردن موقعیت یک لوله فلزی در زیر زمین. فاصله بین الکترودهای پتانسیل ۱ متر و مقدار افزایش فاکتور  $n$  بین الکترودهای جریان از ۱ تا ۸ می‌باشد.



شکل ۲۸. مدل مقاومت ویژه حاصل از تصویرسازی وارون مقاومت‌های ویژه ظاهری شکل ۲۷ با روش BPRT.



شکل ۲۹. مدل مقاومت ویژه زیرسطحی حاصل از وارون‌سازی استاندارد کمترین مربعات مقاومت‌های ویژه ظاهری نشان داده شده در شکل ۲۷ به وسیله نرم‌افزار RES2DINV.

## ۷ بحث و نتیجه‌گیری

وارون‌سازی کمترین مربعات را داشته باشد. از آنجایی که تصاویر مقاومتی نتیجه یک‌بار تکرار حل کمترین مربعات میرا می‌باشند، بنابراین وجود خطا انکارناپذیر است. در روش BPRT سعی شده است تا با استفاده از فیلتر همبستگی و وارد کردن قیدهای میرایی و تصحیح در روش حداقل مربعات میرا، خطای تصویرسازی به حداقل ممکن کاهش پیدا کند. جهت بهبود تصویر مدل‌سازی شده نخست سعی شد تا پارامتر میرایی  $n$  بهینه تخمین زده

نکته قابل توجه در روش مقاومت ویژه پس‌بینی این است که مدل‌های مقاومت ویژه تصویرسازی شده با این روش، حاصل حل معادلات مربوطه در اولین تکرار می‌باشد زیرا هدف این شبکه از تصویرسازی، ارائه روشی سریع در تهیه مدل مقاومتی اولیه زیرسطحی جهت تعیین موقعیت و عمق تقریبی توده‌ها و اهداف مقاومتی یا رسانای مدفون در طی عملیات صحرایی می‌باشد به طوری که نتایج

مقاومت ویژه پس‌بینی (شکل ۲۸) و حداقل مربعات استاندارد نرم‌افزار RES2DINV (شکل ۲۹)، قرابت و نزدیکی زیادی را نشان می‌دهند. عمق مرکز لوله که با مقادیر مقاومت ویژه کم روی مدل‌های وارون آشکار شده است، حدود ۰/۲ متر با عمق واقعی اختلاف دارد.

با توجه به نتایج حاصل از مدل‌سازی‌های وارون، می‌توان نتیجه گرفت که روش مقاومت ویژه پس‌بینی، یک روش مفید، قدرتمند و سریع در تصویرسازی محیط زیرسطحی تحت مطالعه می‌باشد و می‌توان با استفاده از این روش یک مدل مقاومتی تقریبی محاسبه و موقعیت و عمق توده‌ها و بی‌هنجاری‌های مقاومتی را حدس زد.

#### منابع

- Barber, C. C., Brown, B. H., and Freeston, I. L., 1983, Imaging spatial distributions of resistivity using applied potential tomography: *Electronics Letters*, **19**(22), 933-935.
- Barber, D. C. and Brown, B. H., 1988, Errors in reconstruction of resistivity images using a linear reconstruction technique: *Clinical Physics and Physiological Measurement*, **9**, Supplement A, 101-104.
- Barber, D. C. and Seagar, A. D., 1987, Fast reconstruction of resistance images: *Clinical Physics and Physiological Measurement*, **8**(supplement A), 47-54.
- Barber, D. C., 1990, Image reconstruction in applied potential tomography—electrical impedance tomography, Internal Report: Department of Medical Physics and Clinical Engineering, University of Sheffield.
- Churchhouse, R. F., 1981, Handbook of applicable mathematics. Vol. III: Numerical methods: John Wiley and Sons, Inc.
- Cosentino, P., Luzio, D., and Martorana, R., 1998, Tomographic resistivity 3D mapping: filter coefficients and depth correction: Proceedings of the 4<sup>th</sup> Meeting of Environmental and Engineering Geophysical Society, 279-282, European Section, Barcelona, Spain.
- Dehghani, H., Barber, D. C., and Basarab-Horwath, I., 1999, Incorporating a priori anatomical information into image reconstruction in electrical impedance

شود. نتایج حاصل از وارون حداقل مربعات میرا شده یک مرحله‌ای برای مقادیر مقاومت ویژه ظاهری اندازه‌گیری شده با چهار آرایه برای مدل شکل ۲ (شکل‌های ۶، ۷، ۸ و ۹) نشان می‌دهند که پارامتر میرایی متناظر با بهترین تصویر که موقعیت توده مدفون را بهتر آشکار می‌کند به ترتیب برای آرایه‌های ونر-شلومبرژه، ونر، دوقطبی-دوقطبی و قطبی-دوقطبی برابر است با ۰/۱، ۲۰، ۱ و ۰/۵. در ادامه فرآیند تصویرسازی، مناسب‌ترین ضریب تصحیح % برای چهار آرایه مورد مطالعه بر اساس تصویرسازی وارون تعیین شد. با توجه به شکل‌های ۱۲، ۱۳، ۱۴ و ۱۵، مقدار ضریب تصحیح بهینه، ۵ به دست آمد. نتایج تصویرسازی برای مدل شکل ۲ نشان می‌دهند که بهترین عملکرد روش مقاومت ویژه پس‌بینی برای مقادیر مقاومت ویژه ظاهری محاسبه شده با آرایه‌های ونر-شلومبرژه و ونر می‌باشد. هرچند که نتایج تصویرسازی برای آرایه‌های دوقطبی-دوقطبی و قطبی-دوقطبی نیز قابل قبول می‌باشند (شکل‌های ۱۴ و ۱۵). بهترین عملکرد روش ارائه شده برای مدل مصنوعی شکل ۱۶، تصویرسازی مقادیر مقاومت ویژه ظاهری محاسبه شده با آرایه ونر-شلومبرژه، با و بدون نوفه تصادفی، می‌باشد (شکل‌های الف-۱۷ و ۲۲). البته خطای آشکارسازی توده‌های مدفون مدل شکل ۱۶ با روش BPRT برای آرایه‌های ونر، دوقطبی-دوقطبی و قطبی-دوقطبی (شکل‌های ب، ج و د-۱۷ و ۲۲) نیز قابل اغماض می‌باشد و با توجه به تصویرسازی سریع و یک مرحله‌ای، نتایج قابل قبولی حاصل شده است، به طوری که مقایسه نتایج حاصل از تصویرسازی سریع مقاومت ویژه پس‌بینی برای مدل‌های مصنوعی با نتایج حاصل از روش وارون‌سازی حداقل مربعات نرم‌افزار RES2DINV این مهم را اثبات می‌کند.

نتایج وارون‌سازی مقادیر مقاومت ویژه ظاهری اندازه‌گیری شده (شکل ۲۷) جهت تعیین موقعیت و عمق یک لوله بتنی مدفون با هر دو روش تصویرسازی سریع

- Mauriello, P., and Patella, D., 1999, Resistivity anomaly imaging by probability tomography: *Geophysical Prospecting*, **47**(3), 411–429.
- Menke, W., 1989, *Geophysical Data Analysis: Discrete Inverse Theory*: Academic Press, New York, NY.
- Noel, M., and Xu, B., 1991, Archaeological investigation by electrical resistivity tomography, a preliminary study: *Geophysical Journal International*, **107**(1), 95–102.
- Patella, D., 1997, Introduction to ground surface self-potential tomography: *Geophysical Prospecting*, **45**(4), 653–681.
- Press, W. H., Flannery, B. P., Teukolsky, S. A. and Vetterling, W. T., 1988, *Numerical Recipes in C*: Cambridge Univ. Press.
- Roy, A., and Apparao, A., 1971, Depth of investigation in direct current methods: *Geophysics*, **36**, 943–959.
- Shima, H., and Sakayama, T., 1987, Resistivity tomography: an approach to 2-D resistivity inverse problems: *Proceedings of the 57<sup>th</sup> Annual International Meeting Society of Exploration Geophysicists*, Expanded Abstracts, 204–207.
- Shima, H., 1992, 2-D and 3-D resistivity image reconstruction using crosshole data: *Geophysics*, **57**(10), 1270–1281.
- tomography: *Physiological Measurement*, **20**(1), 87–102.
- Geselowitz, D. B., 1971, An application of electrocardiographic lead theory to impedance plethysmography: *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, **18**(1), 38–41.
- Kotre, C. J., 1989, A sensitivity coefficient method for the reconstruction of electrical impedance tomograms: *Clinical Physics and Physiological Measurement*, **10**(3), 275–281.
- Kotre, C. J., 1994, EIT image reconstruction using sensitivity weighted filtered back-projection: *Physiological Measurement*, **15**(Supplement 2), A125–A136.
- Loke, M. H., 2004, Tutorial: 2-D and 3-D Electrical Imaging Surveys. <http://www.geoelectrical.com>
- Loke, M. H., and Barker, R. D., 1995, Least-squares deconvolution of apparent resistivity pseudosections: *Geophysics*, **60**(6), 1682–1690.
- Martorana, R., and Capizzi, P., 2014, A Fast Imaging Technique Applied to 2D Electrical Resistivity Data: *International Journal of Geophysics*, Volume 2014, Article ID 846024, 9 pages. <http://dx.doi.org/10.1155/2014/846024>.

## Back projection resistivity fast imaging technique for 2D electrical resistivity data

Ata Eshaghzadeh<sup>1\*</sup>, and Alireza Hajian<sup>2</sup>

<sup>1</sup>*M. Sc., Institute of Geophysics, University of Tehran, Tehran, Iran*

<sup>2</sup>*Assistant professor, Department of Physics, Najafabad Branch, Islamic Azad University, Najafabad, Iran*

(Received: 05 October 2016, Accepted: 27 December 2017)

### Summary

Electrical resistivity techniques are well-established and applicable to a wide range of geophysical problems. 2D resistivity measurements can give information about both the lateral and vertical variations of the subsurface resistivity and can be used in a qualitative fashion for the identification of the structure and depth of masses. The resistivity inverse problem involves constructing an estimate of a subsurface resistivity distribution, which is consistent with the experimental data. This is a fully non-linear problem and its treatment involves iterative full matrix inversion algorithms, which can give good quality results.

The back-projection resistivity technique (BPRT) can be applied to a set of apparent resistivity measures to quickly obtain an approximate image of the resistivity distribution of the investigated volume. This technique is based on the consideration that a resistivity perturbation in a point element (voxel) of a bounded region produces a change in voltage thus an apparent resistivity anomaly at the surface of the region, according to a sensitivity coefficient. The value of the coefficient is dependent on the position of the voxel considered in respect of both the current and the voltage dipoles, in agreement with the sensitivity theorem of Geselowitz. This consideration suggests that it is possible to correlate all the measured resistivity values, weighted by the appropriate sensitivity coefficients to each voxel of the investigated volume and to estimate the resistivity value of each cell of the model using a weighted summation of the apparent resistivity measurements.

The BPRT considering a two-step approach. Initially, a damped least squares solution is obtained after a full matrix inversion of the linearized geoelectrical problem. Furthermore, on the basis of the results, a subsequent filtering algorithm is applied to the Jacobian matrix, aiming at reducing smoothness, and the linearized damped least square inversion is repeated to get the final result. This fast imaging technique aims at increasing the resistivity contrasts, and practically, since it does not require a parameter set optimization, it can be used to easily obtain fast and preliminary results.

The procedure proposed in this work consists of four steps:

- (1) Evaluation of sensitivity matrix  $\mathbf{B}$ ,
- (2) Inversion of matrix  $\mathbf{B}$  using a damped LSQR solution,
- (3) Recalculation of a filtered Jacobian matrix  $\mathbf{B}'$  obtained by means of a correlation filter,
- (4) Inversion of the filtered sensitivity matrix.

The proposed technique is tested on resistivity synthetic data from the Schlumberger, Wenner, Dipole-dipole and Pole-pole arrays, the objective of which is to find the optimal parameter set. The synthetic tests carried out with 2D data suggested that a good compromise for 2D inversions is to choose  $\lambda$  for the Schlumberger, Wenner, Dipole-dipole and Pole-pole arrays, 0.1, 20, 1 and 0.5, respectively. Furthermore, all the synthetic tests carried out with 2D data suggested that a good compromise for 2D inversions is to choose  $\chi \approx 5$ . The approximate images using the BPRT inverse modeling for all synthetic data, with and without random noise, is compared with the least square inversion by RES2DINV software. Finally, a field case is discussed, and the comparison between the back-projection and inversion is shown.

**Keywords:** Back-projection resistivity technique (BPRT), correlation filter, least square

\*Corresponding author:

eshagh@alumni.ut.ac.ir