مجله ژئوفیزیک ایران، جلد ۱۱، شماره ۳، ۱۳۹۶، صفحه ۵۷ - ۷۴

کاربست روش مک‌کورمک فشرده مرتبه چهارم با پیمایش زمانی رونگه-کوتا چهار مرحله‌ای برای مسئله تنظیم راسبی غیرخطی ناپایا

رضا جوان‌نژاد[۱]، و سرمد قادر[۲*]

[۱] دکترای تخصصی هواشناسی، واحد علوم و تحقیقات، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران
[۲] دانشیار، گروه فیزیک فضا، موسسه ژئوفیزیک دانشگاه تهران، تهران ایران

(تاریخ دریافت: ۱۳۹۶/۰۲/۳۱، تاریخ پذیرش: ۱۳۹۶/۰۵/۲۵)

چکیده

در پژوهش حاضر، به بررسی خطای بریدگی و آهنگ همگرایی روش مک‌کورمک فشرده مرتبه چهارم با پیمایش زمانی رونگه-کوتا چهار مرحله‌ای پرداخته می‌شود. برای انجام این تحلیل از معادله فرارفت خطی یک‌بعدی استفاده شده است که دارای حل تحلیلی است. خطای بریدگی برای روش‌های مک‌کورمک مرتبه دوم، مک‌کورمک فشرده مرتبه چهارم با پیمایش زمانی مرتبه دوم و مک‌کورمک فشرده مرتبه چهارم با پیمایش زمانی رونگه-کوتا چهار مرحله‌ای استخراج و بیان شده است. برای به‌دست آوردن خطای بریدگی از معادله فرارفت خطی یک‌بعدی با ضریب ثابت استفاده شده است. همچنین برای بررسی دقت آهنگ همگرایی برای روش‌های متفاوتی از جمله لکس‌وندرف، لیپ‌فراگ، بیم‌وارمینگ و همچنین روش‌های مک‌کورمک کلاسیک با گسسته‌سازی‌های مکانی مرتبه‌دوم و فشرده مرتبه‌چهارم و گسسته‌سازی زمانی رونگه-کوتا چهار مرحله‌ای به‌دست آمده است. نتایج نشان می‌دهد آهنگ همگرایی به‌دست‌آمده برای مسئله خطی متناسب با آهنگ همگرایی نظری می‌باشد. در ادامه نتایج حل عددی برای مسئله تنظیم راسبی غیرخطی ناپایا و برای حالت‌های یک‌بعدی و دو بعدی با استفاده از روش مک‌کورمک فشرده مرتبه چهارم با پیمایش زمانی رونگه-کوتا چهار مرحله‌ای مورد بررسی قرار گرفته است. مقایسه نتایج به‌دست‌آمده از روش مذکور برای دو مسئله یک و دو بعدی با نتایج حاصل از کارهای سایر محققان گویای عملکرد مناسب این روش است به‌ویژه هنگامی‌که میدان حل با ناپیوستگی همراه باشد.

واژه‌های کلیدی: روش مک‌کورمک فشرده، دقت عددی، خطای بریدگی، تنظیم راسبی غیرخطی

* نگارنده رابط: sghader@ut.ac.ir

۱ مقدمه

روش‌های فشرده از جمله روش‌های تفاضل متناهی هستند که ابزاری مناسب برای شبیه‌سازی دقیق مسائل دینامیک شاره‌ها محسوب می‌شوند. در این روش‌ها، خود تابع و مشتقات آن به‌صورت توابعی مجهول در نظر گرفته می‌شوند. ایده روش‌های فشرده به کارهای انجام‌شده توسط نیومروف (۱۹۲۴) و فاکس و گودوین (۱۹۴۹) در نیمه اول قرن بیستم میلادی برمی‌گردد. با این وجود، معرفی این روش‌ها تحت عنوان روش فشرده و کاربرد آن در شبیه‌سازی‌ها پس از تحقیقات کریس و اولیگر (۱۹۷۲) و هیرش (۱۹۷۵) رواج یافت و در طی چند سال بسیاری از محققان از جمله لل (۱۹۹۲)، انواع مختلفی از روش‌های فشرده با خواص تفکیک متفاوت را معرفی کردند. روش‌-های مذکور علاوه بر سایر شاخه‌های مکانیک شاره‌ها در حوزه دینامیک شاره‌های ژئوفیزیکی نیز مورد توجه قرار گرفته‌اند.

با توجه به عملکرد امیدوار کننده روش‌های فشرده، در سال‌های اخیر گرایش به به‌کارگیری این روش‌ها در شبیه‌سازی‌های جوّی و اقیانوسی با توجه به پیچیدگی ذاتی این شارش‌ها افزایش یافته است (به‌طور مثال نیوون و ریفاگن، ۱۹۷۹؛ اصفهانیان و همکاران، ۲۰۰۵؛ محب الحجه و دریچل، ۲۰۰۷؛ قادر و همکاران، ۲۰۰۹ و ۲۰۱۲؛ قادر و نوردشترم، ۲۰۱۵؛ جوان‌نژاد و همکاران، ۲۰۱۶؛ میرزایی و همکاران، ۱۳۹۶).

یکی از مسائل بنیادی هواشناسی تنظیم زمینگرد است که درک ما را از فیزیک شاره‌های چرخان توسعه می‌دهد. تحقیقات زیادی در خصوص مسئله تنظیم زمینگرد صورت پذیرفته است (به‌طور مثال کان، ۱۹۴۵؛ گیل، ۱۹۷۶؛ باس و تامپسون، ۱۹۹۴؛ کو و پولوانی، ۱۹۹۷؛ هلفریش و همکاران، ۱۹۹۹؛ ویک و همکاران، ۲۰۰۴؛ ریواس، ۲۰۰۵؛ هلفریش، ۲۰۰۶). اغلب پدیده‌های بزرگ مقیاس جوّی و اقیانوسی بعد از یک ناپایداری اولیه در میدان تکانه یا ناپیوستگی اولیه در میدان جرم (معمولاً به‌صورت اختلاف ارتفاع یا چگالی) تمایل دارند که در نهایت به‌صورت زمینگرد یا راسبی‌پایا تنظیم شوند. اصولاً فرایند تنظیم زمینگرد با تبدیل انرژی پتانسیل به انرژی جنبشی و تولید موج همراه است، که در این بین کسری از انرژی پتانسیل اولیه به انرژی جنبشی نهایی تبدیل می‌شود. به‌بیان‌دیگر تنظیم راسبی یکی از ویژگی‌های برجسته پدیده‌های بزرگ‌مقیاس جوّی و اقیانوسی به شمار می‌رود (گیل، ۱۹۸۲). با توجه به اینکه تنظیم راسبی به دو مرحله گذرا و پایا تقسیم می‌شود، برای اینکه بتوان درک بهتری از پدیده تنظیم راسبی به‌دست آورد بایستی بخش گذرای آن هم مورد بررسی قرار گیرد. از طرفی معادلات حاکم در مرحله پایا ماهیت خطی و مستقل از زمان داشته و تحقیقات اولیه بیشتر مربوط به این مرحله بوده است. ولی برای درک بهتر این پدیده بایستی ماهیت غیرخطی و وابسته به زمان معادلات حاکم در مرحله گذرا با توجه به عدم وجود حل تحلیلی معادلات در این مرحله، مورد بررسی قرار گیرد. بر همین اساس از روش‌های عددی برای حل معادلات حاکم استفاده می‌شود. برای حل عددی معادلات حاکم در مرحله گذرا، ابتدا شکل اولیه ناپیوستگی میدان جرم و یا تکانه تعیین می‌شود. در ادامه با استفاده از یک روش عددی اقدام به حل عددی این پدیده می‌شود.

حل عددی مسئله تنظیم راسبی غیرخطی ناپایا در حالت یک و دو بعدی با استفاده از روش فشرده مک‌-کورمک مرتبه چهارم با پیمایش زمانی مرتبه‌دوم توسط قادر و همکاران (۱۳۸۹) انجام شده است. همچنین میرزائی و همکاران (۱۳۹۶) به حل عددی معادلات آب کم‌عمق در حالت دوبعدی و غیرخطی با روش مک‌کورمک فشردهٔ مرتبهٔ چهارم پرداختند. در واقع باید اشاره نمود که

کار حاضر در ادامه تحقیقات قادر و همکاران (۱۳۸۹)، جوان‌نژاد و همکاران (۲۰۱۶) و همچنین میرزایی و همکاران (۱۳۹۶) می‌باشد؛ با این تفاوت که در کار حاضر تمرکز بر بررسی دقت روش‌های مک‌کورمک می‌باشد (از جمله محاسبه خطای بریدگی و همچنین بررسی آهنگ همگرایی). به‌علاوه در کار حاضر روش مک‌کورمک فشرده همراه با پیمایش زمانی رونگه-کوتا به مسئله‌های تنظیم راسبی یک‌بعدی و دو بعدی که در شرایط اولیه همراه با ناپیوستگی هستند، اعمال می‌شود.

در روش‌شناسی ابتدا فرمول‌بندی روش مک‌کورمک فشرده مرتبه چهارم با پیشروی زمانی رونگه-کوتا چهار مرحله‌ای (MCRK4) به‌طور خلاصه بیان می‌شود. سپس برای سنجش توانایی و دقت خطای بریدگی روش مک-کورمک مرتبه‌دوم (MC2) و مک‌کورمک فشرده مرتبه چهارم با پیمایش زمانی مرتبه‌دوم (MC4) با روش MCRK4 مقایسه می‌شود. در ادامه آهنگ همگرایی روش مذکور با استفاده از معادله فرارفت خطی یک‌بعدی که دارای حل تحلیلی است به همراه روش‌های متفاوتی از جمله لکس‌وندرف، لیپ‌فراگ، بیم‌وارمینگ و همچنین MC2 و MC4 به‌دست می‌آید. در انتها نیز نتایج حل عددی معادلات تنظیم راسبی غیرخطی ناپایا برای دو حالت یک و دو بعدی آورده می‌شود.

۲ روش MCRK4

نحوه به‌دست آوردن و جزئیات فرمول‌بندی روش‌های M2 و MC4 توسط هیکسون و تورکل (۲۰۰۰) و همچنین فلاحت (۱۳۸۷) و روش MCRK4 را هیکسون و تورکل (۲۰۰۰)، جوان‌نژاد (۱۳۹۵) و همچنین میرزایی و همکاران (۱۳۹۶) به‌صورت مشروح بیان کرده‌اند. در اینجا فقط فرمول‌بندی روش MCRK4 به‌صورت خلاصه بیان می‌شود.

۲-۱ فرمول‌بندی روش

شکل عمومی خانواده روش‌های فشرده برای برآورد مشتق مرتبه اول یک تابع دلخواه را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$[B]\{D\} = \frac{1}{\Delta x}[C]\{f\}, \qquad (۱)$$

که Δx فاصله شبکه‌ای، D عملگر مشتق مکانی تابع f، $[C]$ ماتریس ضرایب برای تابع f و $[B]$ ماتریس ضرایب عملگر مشتق D است. اکنون برای رسیدن به روابط روش فشرده مک‌کورمک، عملگر ضمنی D را باید به دو عملگر پیش‌رو و پس‌رو به‌صورت زیر تجزیه کرد:

$$\{D\} = \frac{\{D^F\} + \{D^B\}}{2}, \qquad (۲)$$

که از بالانویس F برای نمایش عملگر پیش‌رو و از بالانویس B برای نمایش عملگر پس‌رو استفاده شده است. برای رسیدن به روشی با دقت مکانی مرتبه چهارم شکل گسسته مشتق اول مکانی یک سوی پس‌رو و پیش-رو، برای تابع دلخواه φ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} aD^{B}_{i-1} + (1-a)D^{B}_{i} &= \left(\frac{1}{\Delta x}\right)(\phi_i - \phi_{i-1}), \\ aD^{F}_{i+1} + (1-a)D^{F}_{i} &= \left(\frac{1}{\Delta x}\right)(\phi_{i+1} - \phi_i). \end{aligned} \qquad (۳)$$

که ضریب $a = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}}$، اندیس i مربوط به نقاط شبکه و D^B و D^F به‌ترتیب عملگرهای پیش‌رو و پس‌رو مکانی Δt است. این روش تحت عنوان طرح‌واره ۴/۲ (هیکسون و تورکل، ۲۰۰۰) نام‌گذاری می‌شود. جمع این دو عملگر عبارتی با دقت مرتبه چهارم است.

مقدار مورد نظر عملگرها در مرزها با استفاده از روش صریح پنج نقطه‌ای یک‌سویه همانند روش هیکسون و

تورکل (۲۰۰۰) انجام می‌شود. در این روش مقادیر عملگرها در مرز با دقتی از مرتبه‌ای برابر با عملگرهای پیش‌رو و پس‌رو تقریب زده می‌شود. شرایط مرزی برای مرزهای سمت چپ و راست مربوط به عملگرهای پیش‌رو و پس‌رو طبق روابط (۴) تا (۷) است (هیکسون و تورکل، ۲۰۰۰).

$$D_1^F=(-\frac{25}{12}+\frac{17}{12\sqrt{3}})\phi_1+(4-\frac{25}{6\sqrt{3}})\phi_2-(3-\frac{3\sqrt{3}}{2})\phi_3+(\frac{4}{3}+\frac{13}{6\sqrt{3}})\phi_4-(\frac{1}{4}-\frac{5}{12\sqrt{3}})\phi_5\,, \quad (۴)$$

$$D_m^F=(\frac{25}{12}+\frac{17}{12\sqrt{3}})\phi_m-(4+\frac{25}{6\sqrt{3}})\phi_{m-1}+(3+\frac{3\sqrt{3}}{2})\phi_{m-2}-(\frac{4}{3}+\frac{13}{6\sqrt{3}})\phi_{m-3}+(\frac{1}{4}+\frac{5}{12\sqrt{3}})\phi_{m-4}\,, \quad (۵)$$

$$D_m^B=(\frac{25}{12}-\frac{17}{12\sqrt{3}})\phi_m-(4-\frac{25}{6\sqrt{3}})\phi_{m-1}+(3-\frac{3\sqrt{3}}{2})\phi_{m-2}-(\frac{4}{3}-\frac{13}{6\sqrt{3}})\phi_{m-3}+(\frac{1}{4}-\frac{5}{12\sqrt{3}})\phi_{m-4}\,, \quad (۶)$$

$$D_m^B=(\frac{25}{12}-\frac{17}{12\sqrt{3}})\phi_m-(4-\frac{25}{6\sqrt{3}})\phi_{m-1}+(3-\frac{3\sqrt{3}}{2})\phi_{m-2}-(\frac{4}{3}-\frac{13}{6\sqrt{3}})\phi_{m-3}+(\frac{1}{4}-\frac{5}{12\sqrt{3}})\phi_{m-4}\,, \quad (۷)$$

که زیرنویس 1، مربوط به نقطه ابتدایی شبکه (مرز سمت چپ) و زیرنویس m، مربوط به نقطه انتهایی شبکه (مرز سمت راست) است.

۲-۲ پیمایش زمانی

برای پیمایش زمانی از روش رونگه-کوتا چهار مرحله‌ای استفاده می‌شود. صورت کلی شکل پایستار معادلات حاکم را می‌توان به‌صورت زیر در نظر گرفت:

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t}+\mathbf{G}(\mathbf{V})=0\,, \quad (۸)$$

که $\mathbf{V}$ متغیر پیش‌یابی و $\mathbf{G}$ تابعی از $\mathbf{V}$ است و با توجه به تعداد بُعدهای مسئله رابطه (۸) می‌تواند از یک تا سه بعد داشته باشد. این تابع همچنین شامل مشتق اول در راستای محورهای مختصات مختلف است. شکل گسسته زمانی رابطه (۸) با استفاده از روش MCRK4 در روابط زیر آمده است (هیکسون و تورکل، ۲۰۰۰):

$$\begin{aligned}
\mathbf{h}^{(1)}&=-\Delta t D^F[\mathbf{G}(\mathbf{V}^n)]\\
\mathbf{h}^{(2)}&=-\Delta t D^B[\mathbf{G}(\mathbf{V}^n+\alpha_2\mathbf{h}^{(1)})]\\
\mathbf{h}^{(3)}&=-\Delta t D^F[\mathbf{G}(\mathbf{V}^n+\alpha_3\mathbf{h}^{(2)})]\ ,\\
\mathbf{h}^{(4)}&=-\Delta t D^B[\mathbf{G}(\mathbf{V}^n+\alpha_4\mathbf{h}^{(3)})]\\
\mathbf{V}^{n+1}&=\mathbf{V}^n+\beta_1\mathbf{h}^{(1)}+\beta_2\mathbf{h}^{(2)}+\beta_3\mathbf{h}^{(3)}+\beta_4\mathbf{h}^{(4)}
\end{aligned} \quad (۹)$$

که مقدار $\mathbf{h}^{(1)}$ تا $\mathbf{h}^{(4)}$ متغیرهای کمکی هستند. همچنین ضرایب در روابط (۹) به‌ترتیب $\alpha_2=\frac{1}{2}$، $\alpha_3=\frac{1}{2}$، $\alpha_4=1$، $\beta_1=\frac{1}{6}$، $\beta_2=\frac{1}{3}$، $\beta_3=\frac{1}{3}$، $\beta_4=\frac{1}{6}$ هستند. همان‌طور که در رابطه (۹) مشاهده می‌شود، روش MCRK4 روشی چهار مرحله‌ای است. عملگرهای پس‌رو و پیش‌رو مورد استفاده در این روش عملگرهای رابطه (۳) می‌باشند.

همان‌گونه که در رابطه (۹) مربوط به مراحل پیش‌بینی‌کننده روش مک‌کورمک مشاهده می‌شود، برای برآورد مشتق به‌ترتیب از عملگرهای پیش‌رو، پس‌رو، پیش‌رو و پس‌رو استفاده شده است. چنین ترکیب جایگشتی از عملگرها با نماد $FBFB$ نام‌گذاری می‌شود. در عمل بهتر است هنگام حل عددی و به‌خصوص در زمان حل عددی با شکل‌های متقارن (به‌طور مثال حباب گرم در جو خنثی) علاوه بر استفاده از ترکیب ذکر شده از ترکیب‌های دیگر همانند $BFBF$، $FFFF$ و $BBBB$ برای گام‌های زمانی متوالی استفاده شود (به‌طور مثال قادر و همکاران، ۱۳۸۹ و ۱۳۹۰؛ جوان‌نژاد و همکاران، ۲۰۱۶) این نکته در هنگام حل عددی معادلات حاکم برای حل

عددی مسئله تنظیم راسبی غیرخطی دو بعدی در تحقیق حاضر نیز رعایت شده است.

۳ بررسی دقت

در این بخش قبل از ارائه نتایج حل عددی به بررسی دقت روش MCRK4 در مقایسه با روش MC2 و MC4 پرداخته می‌شود. برای این منظور خطای بریدگی روش‌های MC2، MC4 و MCRK4 برای معادله فرارفت خطی یک‌بعدی که دارای حل تحلیلی می‌باشد، به‌دست آمده است. همچنین آهنگ همگرایی برای روش‌های متفاوتی از جمله لکس‌وندرف، لیپ‌فراگ، بیم‌وارمینگ و همچنین روش‌های MC2، MC4 و MCRK4 به‌دست آمده است.

۳-۱ خطای بریدگی

در این بخش خطای بریدگی روش‌های MC2، MC4 و MCRK4 برای معادله فرارفت خطی یک‌بعدی به‌دست آمده است. مقایسه این خطا می‌تواند یک معیار نظری ریاضی برای بررسی مرتبه دقت هر یک از روش‌ها باشد. برای به‌دست آوردن خطای بریدگی، ابتدا معادله فرارفت خطی یک‌بعدی با ضریب ثابت به‌صورت زیر در نظر گرفته می‌شود (هیکسون و تورکل، ۲۰۰۰):

$$\begin{aligned} &U_t + \left\{F\left(U\right)\right\}_x = 0\ . \\ &F\left(U\right) = cU \end{aligned} \qquad (۱۰)$$

۳-۱-۱ روش MC2

شکل گسسته زمانی رابطه (۱۰) با استفاده از روش MC2 به‌صورت زیر است:

مرحله پیش‌بینی‌کننده:

$$U_i^* = U_i^n - \Delta t \delta^F\left(F(U_i^n)\right)\ . \qquad (۱۱)$$

مرحله مصحح:

$$U_i^{n+1} = \frac{1}{2}\left\{U_i^n + U_i^* - \Delta t \delta^B\left(F(U_i^*)\right)\right\}, \qquad (۱۲)$$

که U_i^* مقدار موقتی U_i^n در زمان $n+1$ است. با جایگذاری رابطه (۱۱) در (۱۲) رابطه (۱۳) به‌صورت زیر حاصل می‌شود:

$$U_i^{n+1} = \frac{1}{2}\left\{U_i^n + \left(U_i^n - \Delta t \delta^F\left(F(U_i^n)\right)\right) - \Delta t \delta^B\left(F(U_i^*)\right)\right\}\ . \qquad (۱۳)$$

که در ادامه رابطه زیر به‌دست می‌آید:

$$U^{n+1} = \frac{1}{2}\left\{\begin{aligned} &U_i^n + U_i^n - \left(\Delta t \delta^F\left(cU_i^n\right)\right) \\ &-\Delta t \delta^B\left(cU_i^n - c\Delta \delta^F\left(cU_i^n\right)\right) \end{aligned}\right\}\ . \qquad (۱۴)$$

حال با اعمال عملگرهای پیشرو و پس‌رو مکانی در رابطه (۱۴) رابطه زیر به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned} U_i^{n+1} = U_i^n &- \frac{c\Delta t}{2\Delta x}\left(U_{i+1}^n + U_{i-1}^n\right) \\ &+ \frac{c^2 \Delta t^2}{2\Delta x^2}\left(U_{i+1}^n - 2U_i^n + U_{i-1}^n\right)\ . \end{aligned} \qquad (۱۵)$$

در نهایت با استفاده از بسط سری تیلور برای $U(t+\Delta t)$ و $U(x+\Delta x)$ و رابطه (۱۵) خطای بریدگی روش MC2 به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned} \Delta t U_t &+ \frac{\Delta t^2}{2} U_{tt} + \frac{\Delta t^3}{6} U_{ttt} \\ &+ \frac{\Delta t^4}{24} U_{tttt} + \ldots = -c\Delta t U_x + \frac{c^2 \Delta t^2}{2} U_{xx} \\ &+ \frac{c\Delta t\ \Delta x^2}{6} U_{xxx} + \frac{c^2 \Delta t^2 \Delta x^2}{24} U_{xxxx} + \ldots \quad . \end{aligned} \qquad (۱۶)$$

از طرفی با توجه به رابطه (۱۶) رابطه زیر به‌دست می‌آید:

$$U_t = -cU_x,\ \ U_{tt} = c^2 U_{xx},\ \ U_{ttt} = -cU_{xxx}\ . \qquad (۱۷)$$

حال با جایگذاری رابطه (۱۷) در رابطه (۱۶) خطای بریدگی روش MC2 به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$U_t + cU_x = -\frac{\Delta t^2}{6} U_{ttt} - \frac{c\Delta x^2}{6} U_{xxx} + \ldots \quad . \qquad (۱۸)$$

همان‌طور که در رابطه (۱۸) مشاهده می‌شود، دقت مکانی و زمانی روش MC2 از مرتبه دوم است.

۳-۱-۲ روش‌های MC4 و MCRK4

عملگرهای پیشرو و پس‌رو در روش مک‌کورمک فشرده مرتبه چهارم به‌صورت زیر است:

$$\begin{aligned} a\delta_{i-1}^{B} + (1-a)\delta_i^{B} &= \frac{1}{\Delta x}\left(F(U_i^n) - F(U_{i-1}^n)\right) \\ a\delta_{i+1}^{F} + (1-a)\delta_i^{F} &= \frac{1}{\Delta x}\left(F(U_{i+1}^n) - F(U_i^n)\right) \end{aligned}, \quad (۱۹)$$

که $a = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}}$ است. پس از انجام محاسبات ریاضی همانند روش MC2، خطای بریدگی روش MC4 به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$U_t + cU_x = -\frac{\Delta t^2}{6}U_{ttt} + \frac{c\Delta x^4}{180}U_{xxxx} + \dots \quad . \quad (۲۰)$$

برای به‌دست آوردن خطای بریدگی روش MCRK4 همانند روش MC4 عمل کرده با این تفاوت که در این روش به‌جای استفاده از دو گام و دو عملگر بایستی چهار گام و چهار عملگر در طی محاسبات استفاده شود. خطای بریدگی روش MCRK4 به‌صورت زیر است:

$$U_t + cU_x = \frac{c\Delta x^4}{180}U_{xxxx} + \frac{c^5\Delta t^4}{120}U_{ttttt}\dots, \quad (۲۱)$$

با توجه به رابطه (۲۰) دقت مکانی روش MC4 از مرتبه چهارم و دقت زمانی آن از مرتبه دوم است. همچنین با توجه به رابطه (۲۱) روش MCRK4 دارای دقت مکانی و زمانی از مرتبه چهارم است.

۳-۲ آهنگ همگرایی

اکنون با استفاده از حل عددی معادله فرارفت خطی یک-بعدی دقت روش‌های MC2، MC4 و MCRK4 در مقایسه با سایر روش‌ها همانند لکس‌وندرف و لیپ‌فراگ و بیم‌وارمینگ با دقت مرتبه دوم و مرتبه چهارم سنجیده می-شود. برای بررسی دقت روش‌های عددی نیاز به حل دقیق معادلات مورد استفاده برای حل عددی است. بر همین اساس در این بخش با استفاده از معادله فرارفت خطی یک‌بعدی که حل دقیق آن موجود است به بررسی دقت و آهنگ همگرایی این روش‌ها می‌پردازیم. معادله فرارفت با ضریب ثابت به‌صورت زیر بیان می‌شود (هیکسون و تورکل،۲۰۰۰):

$$U_t + U_x = 0 . \quad (۲۲)$$

که شرط اولیه رابطه بالا به‌صورت زیر است:

$$U(x,t) = \frac{1}{2}\exp\left(-\ln(2)\left(\frac{x}{3}\right)^2\right). \quad (۲۳)$$

شبکه انتخابی برای حل عددی یکنواخت و محدوده تغییرات x به‌صورت $-20 \le x \le 450$ است. در مرز سمت چپ $(i=1)$، از شرط مشتق مرتبه اول تابع برابر با صفر و در مرز سمت راست از روابط مرزی که در قسمت معرفی روش مک‌کورمک آمده، استفاده می‌شود. اکنون با استفاده از نرم l_2 و همچنین محاسبه آهنگ همگرایی (Convergence rate) برای این روش‌ها به بررسی دقت پرداخته می‌شود. نرم l_2 به‌صورت زیر تعریف می‌شود (به‌طور مثال استراکا و همکاران،۱۹۹۳؛ سالاری و ناپ، ۲۰۰۰؛ روی و همکاران، ۲۰۰۲ و ۲۰۰۴):

$$l_2 = \left\{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left[Q(i) - Q_{ref}(i)\right]\right\}^{\frac{1}{2}}, \quad (۲۴)$$

که N تعداد نقاط و Q مقدار به‌دست‌آمده برای تابع با استفاده از روش عددی و Q_{ref} مقدار دقیق تابع است. همچنین مقدار همگرایی از رابطه زیر به‌دست می‌آید (به‌طور مثال، سالاری و ناپ، ۲۰۰۰؛ روی و همکاران ۲۰۰۲ و ۲۰۰۴؛ ویلیامسون و همکاران ۱۹۹۲):

$$q = \frac{\log_{10}\left(\dfrac{l_2(Q)_{grid1}}{l_2(Q)_{grid2}}\right)}{\log_{10}\left(\dfrac{\Delta x_1}{\Delta x_2}\right)}, \tag{۲۵}$$

که $l_2(Q)_{grid1}$ و $l_2(Q)_{grid2}$ به‌ترتیب مقدار نُرم l_2 حاصل از حل عددی و برای فاصله شبکه‌ای Δx_1 و Δx_2 است. شکل ۱ نرم مکانی حاصل از روش‌های لکس-وندرف (لکس و ندوف،۱۹۶۰؛ دورَن، ۲۰۱۰) و لیپ-فراگ و بیم‌وارمینگ (بیم و وارمینگ،۱۹۷۶؛ سبیسی و همکاران، ۲۰۰۵) برای مرتبه دوم، فشرده مرتبه چهارم و همچنین روش‌های MC2، MC4 و MCRK4 را نشان می‌دهد.

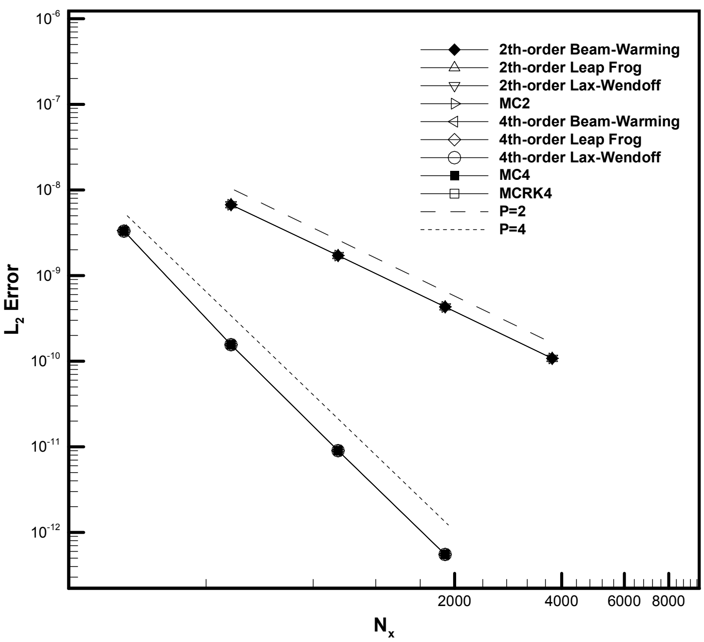
در جدول‌های ۱ و ۲ آهنگ همگرایی هر یک از روش‌ها برای فاصله شبکه‌ای $\Delta x = 1$، $\Delta x = 0.5$ و $\Delta x = 0.25$ ارائه شده است. گام زمانی مود استفاده برای روش‌های عددی مختلف یکسان و برابر $\Delta t = 0.5\times10^{-7}$ انتخاب شده است. نتایج حاصل از این دو جدول مطابقت خوبی با نتایج نظری هر یک از روش‌ها دارد. همچنین مشاهده می‌شود دو روش MC4 و MCRK4 دارای مرتبه دقت مکانی یکسانی هستند.

جدول ۱. آهنگ همگرایی، q برای مرتبه دوم مرکزی.

Δx	لکس‌وندروف	لیپ‌فراگ	بیم‌وارمینگ	MC2
1.0	1.887	1.887	1.887	1.887
0.5	1.929	1.929	1.929	1.929
0.25	1.950	1.950	1.950	1.950

جدول ۲. آهنگ همگرایی، q برای فشرده مرتبه چهارم.

Δx	لکس-وندروف	لیپ-فراگ	بیم-وارمینگ	MC4	MCRK4
1.0	4.408	4.408	4.436	4.436	4.436
0.5	4.259	4.259	4.273	4.273	4.273
0.25	4.182	4.182	4.191	4.191	4.191



شکل ۱. نُرم مکانی برای مرتبه دوم و فشرده مرتبه چهارم.

۴ مسئله تنظیم راسبی غیرخطی در یک بعد

معادلات انتخاب شده برای بررسی عددی این پدیده معادلات آب کم‌عمق در صفحه f است (کو و پولوانی، ۱۹۹۷):

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + g^* \frac{\partial h^*}{\partial x^*} - f^* v^* = 0 \\ &\frac{\partial v^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial v^*}{\partial x^*} + f^* u^* = 0 \\ &\frac{\partial h^*}{\partial t^*} + \frac{\partial \left(h^* u^* \right)}{\partial x^*} = 0 \end{aligned} \quad , \qquad (۲۶)$$

که بالانویس ستاره (*) نشان‌دهنده پارامترهای با بعد است. همچنین در این روابط u و v به‌ترتیب نشان‌دهنده مؤلفه‌های سرعت در دو راستای x و y، t بیان کننده زمان، h عمق شاره، f پارامتر کوریولیس و g نیز شتاب گرانی است. شرایط اولیه انتخاب شده برای مطالعه، یک ناپیوستگی در میدان ارتفاع شاره در حال سکون است که به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} &u^*(x^*, t^* = 0) = 0 \\ &v^*(x^*, t^* = 0) = 0 \\ &h^*(x^*, t^* = 0) = \begin{cases} H^* + \eta_0^* & x^* < 0 \\ H^* - \eta_0^* & x^* > 0 \end{cases} \end{aligned} \quad , \qquad (۲۷)$$

که H^* ارتفاع میانگین لایه در زمان $t^* = 0$ و η_0^* انحراف از میانگین می‌باشد. با توجه به شرایط اولیه که راستای محور x^* می‌باشد، معادلات حاکم در تمام زمان‌ها یعنی $t^* > 0$ مستقل از y^* در نظر گرفته می‌شود. اکنون دستگاه معادلات (۲۶) را با استفاده از روابط زیر بی‌بعد می‌کنیم:

$$\begin{aligned} &\eta^* = \eta_0^* \eta' \\ &u^* = \frac{\eta_0^*}{H^*} \sqrt{g^* H^*}\, u' \\ &v^* = \frac{\eta_0^*}{H^*} \sqrt{g^* H^*}\, v' \\ &x^* = L^* x' \\ &t^* = \left(\frac{L^*}{\sqrt{g^* H^*}} \right) t' \end{aligned} \quad , \qquad (۲۸)$$

که L^* مقیاس طول در راستای محور x^* می‌باشد. با جایگذاری کمیت‌های بی‌بعد ذکر شده رابطه (۲۸) در رابطه (۲۶) و بعد از حذف علامت پرایم از کمیت‌های بی‌بعد، دستگاه معادلات رابطه (۲۶) به شکل زیر بازنویسی می‌شود:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t} + \alpha u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial x} - \varepsilon v = 0 \\ &\frac{\partial v}{\partial t} + \alpha u \frac{\partial v}{\partial x} + \varepsilon u = 0 \\ &\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} + \alpha \frac{\partial \left(\eta u \right)}{\partial x} = 0 \end{aligned} \quad , \qquad (۲۹)$$

که پارامترهای بی‌بعد α و ε به‌صورت زیر هستند:

$$\begin{aligned} &\alpha = \frac{\eta_0}{H} \\ &\varepsilon = \frac{fL}{\sqrt{gH}} \end{aligned} \quad , \qquad (۳۰)$$

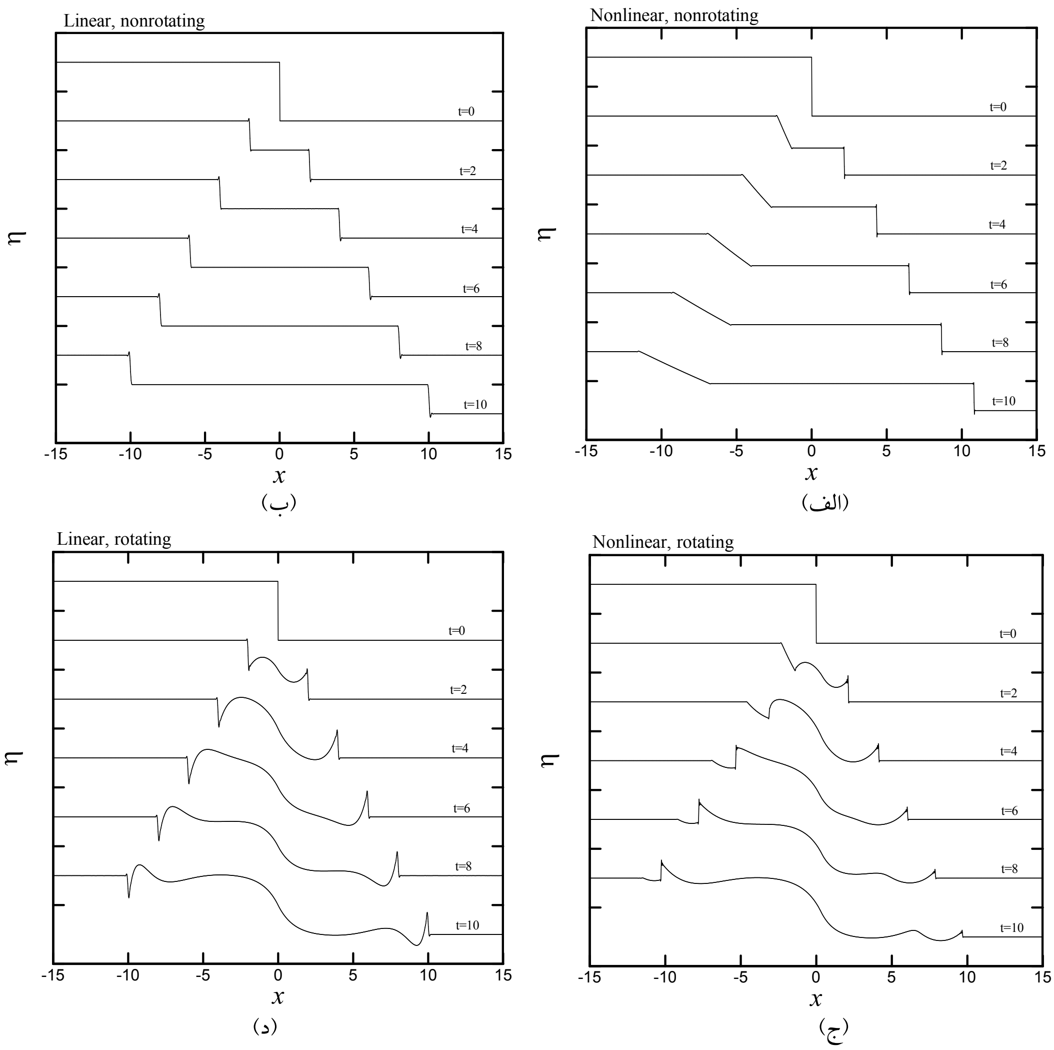
که پارامتر α ماهیت خطی و غیرخطی بودن و پارامتر ε ماهیت چرخشی و غیر چرخشی بودن مسئله را بیان می‌کنند. محدوده تغییرات α بین صفر و یک در نظر گرفته می‌شود، به‌طوری‌که اگر α به سمت صفر میل کند، مسئله ماهیت خود را به حالت کاملاً خطی تغییر می‌دهد و بالعکس. همچنین مقدار $\varepsilon = 0$ معادل با حالت غیر چرخشی و $\varepsilon = 1$ معادل با حالت چرخشی سیستم می‌باشد.

۴-۱ نتایج و بحث حل عددی مسئله تنظیم راسبی غیرخطی در یک بعد

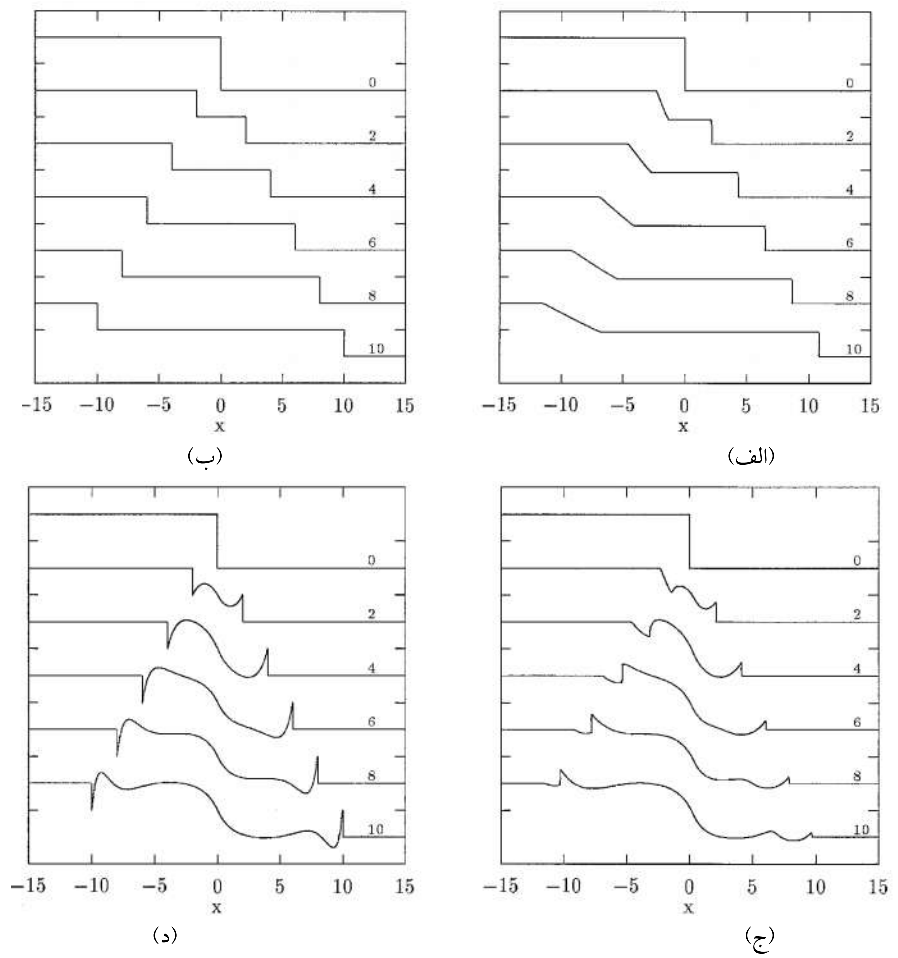
شبکه انتخاب شده برای حل عددی این مسئله یک شبکه یکنواخت با تفکیک $n = 1601$ و مکان بی‌بعد شده آن در بازه $-15 \le x \le 15$ قرار دارد. مسئله برای چهار حالت خطی و غیر چرخان، غیرخطی و غیر چرخان، خطی و

چرخان و در نهایت غیرخطی و چرخان مورد بررسی قرار می‌گیرد.

در حالتی که چرخشی وجود ندارد پارامتر $\varepsilon=0$ می‌باشد. اکنون با انتخاب مقدار α برابر با عددی بسیار نزدیک به صفر مسئله تبدیل به حالت خطی، غیر چرخان می‌شود. نتایج حل عددی با استفاده از روش مک‌کورمک فشرده مرتبه چهارم با پیمایش زمانی رونگه-کوتا چهار مرحله‌ای در شکل ۲-الف نشان داده شده است. در مرحله بعدی با در نظر گرفتن مقدار $\alpha=0.3$ مسئله به حالت غیرخطی و غیر چرخشی تبدیل می‌شود. نتایج مربوط به این حالت در شکل ۲-ب نشان داده شده است. نتایج مربوط به حالت خطی و چرخشی یعنی $\varepsilon=1$ و مقدار α نزدیک به صفر در شکل ۲-ج و حالت غیرخطی و چرخشی که در آن $\varepsilon=1$ و $\alpha=0.3$ می‌باشد در شکل ۲-د نشان داده شده است. همچنین نتایج کار کو و پولوانی (۱۹۹۷) در شکل ۳ نشان داده شده است. مقایسه کیفی نتایج به‌دست‌آمده با کار کو و پولوانی (۱۹۹۷) صحت نتایج به‌دست‌آمده با استفاده از روش MCRK4 را نشان می‌دهد.



شکل ۲. میدان ارتفاع مسئله تنظیم راسبی یک‌بعدی حاصل از روش MCRK4 برای: (الف) حالت خطی و غیر چرخان، (ب) حالت غیرخطی و غیر چرخان، (ج) حالت خطی و چرخان، و (د) حالت غیرخطی و چرخان.



شکل ۳. نتایج کار کو و پولوانی (۱۹۹۷) برای میدان ارتفاع مسئله تنظیم راسبی یک‌بعدی. (الف) حالت خطی و غیر چرخان، (ب) حالت غیرخطی و غیر چرخان، (ج) حالت خطی و چرخان، (د) حالت غیرخطی و چرخان.

۵ مسئله تنظیم راسبی غیرخطی دو بعدی در یک کانال چرخان

معادلات حاکم برای مسئله تنظیم راسبی دو بعدی به‌صورت زیر هستند (هلفریش و همکاران، ۱۹۹۹):

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u^*}{\partial t^*}+u^*\frac{\partial u^*}{\partial x^*}+v^*\frac{\partial u^*}{\partial y^*}-f^*v^*+g^*\frac{\partial h^*}{\partial x^*}=0\\
&\frac{\partial v^*}{\partial t^*}+u^*\frac{\partial v^*}{\partial x^*}+v^*\frac{\partial v^*}{\partial y^*}+f^*u^*+g^*\frac{\partial h^*}{\partial y^*}=0 \quad , \quad (۳۱)\\
&\frac{\partial h^*}{\partial t^*}+u^*\frac{\partial h^*}{\partial x^*}+v^*\frac{\partial h^*}{\partial y^*}+h^*\frac{\partial u^*}{\partial x^*}+h^*\frac{\partial v^*}{\partial y^*}=0
\end{aligned}$$

که معادلات آب کم‌عمق دو بعدی هستند. در این روابط برای پارامترهای با بعد از * استفاده شده است. این روابط برای بررسی عددی و تحلیل فیزیکی پدیده تنظیم راسبی در دو بعد بیان شده است و به‌ترتیب شامل معادله تکانه در راستای محور x^*، معادله تکانه در راستای محور y^* و معادله پیوستگی است.

مدلی که در این تحقیق استفاده شده است عبارت از یک شاره تراکم‌ناپذیر، همگن و ناوشکسان است که در یک کانال چرخان با سطح مقطع مستطیل شکل محدود می‌شود. سطح زیرین این کانال مسطح و سطح بالایی آن آزاد است. در این کانال چرخان تنها دیواره‌های راستای محور x^* (در مسئله تنظیم راسبی غیرخطی) سخت در نظر گرفته می‌شود و باعث می‌شود سرعت عمود بر آن u^*

همواره صفر در نظر گرفته شود. شرایط دیواره اولیه انتخاب شده برای مسئله تنظیم راسبی غیرخطی در کانال چرخان شرایط اولیه انتخاب شده به‌صورت یک ناپیوستگی در میدان ارتفاع شاره در حال سکون در نظر گرفته می‌شود. شرایط اولیه میدان ارتفاع به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} & u^*(x^*,y^*,t^*=0)=0 \\ & v^*(x^*,y^*,t^*=0)=0 \\ & h^*(x^*,y^*,t^*=0)\begin{cases} z^* & y^*<0 \\ \dfrac{z^*}{2} & y^*>0 \end{cases} \end{aligned} \quad . \qquad (۳۲)$$

برای اینکه درک بهتری از مسئله تنظیم راسبی غیرخطی در یک کانال چرخان حاصل شود، رابطه (۳۲) با استفاده از روابط زیر بی‌بعد می‌شود:

$$\begin{aligned} & x'=\frac{x^*}{\sqrt{g^*z^*}/f^*} \quad , \quad y'=\frac{y^*}{L^*} \\ & d'=\frac{h^*}{z^*} \quad , \quad u'=\frac{u^*}{\lambda\sqrt{g^*z^*}} \quad , \\ & v'=\frac{v^*}{\sqrt{g^*z^*}} \quad , \quad t'=\frac{t^*}{L^*/\sqrt{g^*z^*}} \end{aligned} \qquad (۳۳)$$

که پارامتر بی‌بعد λ برابر است با:

$$\lambda=\frac{\sqrt{g^*z^*}}{f^*L^*}, \qquad (۳۴)$$

λ از دیدگاه فیزیکی نسبت شعاع دگرشکلی (radius of deformation) راسبی به مقیاس طول L^* در راستای محور y^* است. با جایگذاری کمیت‌های بی‌بعد ذکر شده رابطه (۳۳) در رابطه (۳۲) و بعد از حذف علامت پرایم از کمیت‌های بی‌بعد، رابطه به شکل زیر بازنویسی می‌شود:

$$\begin{aligned} & \lambda^2\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}\right)-v=-\frac{\partial d}{\partial x} \\ & \frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+u=-\frac{\partial d}{\partial y} \\ & \frac{\partial d}{\partial t}+u\frac{\partial d}{\partial x}+v\frac{\partial d}{\partial y}+d\frac{\partial u}{\partial x}+d\frac{\partial v}{\partial y}=0 \end{aligned} \quad , \qquad (۳۵)$$

که d ضخامت لایه می‌باشد. رابطه (۳۲) و یا به‌عبارت‌دیگر شرایط اولیه حاکم بر مسئله در شکل بی‌بعد خود نیز به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{aligned} & u(x,y,t=0) \\ & v(x,y,t=0) \end{aligned} \qquad d(x,y,t=0)\begin{cases} 1 & y<0 \\ \dfrac{1}{2} & y>0 \end{cases} \quad . \qquad (۳۶)$$

در این مقاله مشابه با کار هلفریش و همکاران (۱۹۹۹)، برای حل عددی رابطه (۳۵) با شرایط اولیه رابطه (۳۶) مقدار $\lambda = 1$ در نظر گرفته شده است. برای حل عددی رابطه (۳۵) می‌بایست از شکل پایستار معادلات حاکم که به‌صورت زیر بیان می‌شوند، استفاده نمود:

$$\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial t}+\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial x}+\frac{\partial \mathrm{G}}{\partial z}=\mathrm{R} \quad , \qquad (۳۷)$$

که بردارهای مربوط به رابطه (۳۷) به شکل زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned} & \mathrm{U}=\begin{pmatrix} ud \\ vd \\ d \end{pmatrix} \quad , \quad \mathrm{E}=\begin{pmatrix} u^2d+\frac{1}{2}d^2 \\ uvd \\ ud \end{pmatrix} \\ & \mathrm{G}=\begin{pmatrix} uvd \\ v^2d+\frac{1}{2}d^2 \\ vd \end{pmatrix} \quad , \quad \mathrm{R}=\begin{pmatrix} vd \\ -ud \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \end{aligned} \qquad (۳۸)$$

همچنین رابطه (۳۷) را می‌توان به‌صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial t}+\mathrm{Q(U)}=0 \quad , \qquad (۳۹)$$

که $\mathbf{Q(U)}$ به‌صورت زیر است:

$$Q(U)=\frac{\partial E}{\partial x}+\frac{\partial G}{\partial z}-R \quad . \tag{۴۰}$$

شکل گسسته رابطه (۳۹) با استفاده از روش MCRK4، به‌صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned}
h^{(1)} &= -\Delta t\delta_x^F[E(U_{i,k}^n)]-\Delta t\delta_z^B[G(U_{i,k}^n)] \\
&\quad +\frac{\Delta t}{2}[R(U_{i,k}^n)] \\
h^{(2)} &= -\Delta t\delta_x^B[E(U_{i,k}^n+\alpha_2 h^{(1)})] \\
&\quad -\Delta t\delta_z^F[G(U_{i,k}^n+\alpha_2 h^{(1)})]+\frac{\Delta t}{2}[R(U_{i,k}^n+\alpha_2 h^{(1)})] \\
h^{(3)} &= -\Delta t\delta_x^F[E(U_{i,k}^n+\alpha_3 h^{(2)})] \\
&\quad -\Delta t\delta_z^B[G(U_{i,k}^n+\alpha_3 h^{(2)})]+\frac{\Delta t}{2}[R(U_{i,k}^n+\alpha_3 h^{(2)})] \quad . \\
h^{(4)} &= -\Delta t\delta_x^B[E(U_{i,k}^n+\alpha_4 h^{(3)})] \\
&\quad -\Delta t\delta_z^F[G(U_{i,k}^n+\alpha_4 h^{(3)})]+\frac{\Delta t}{2}[R(U_{i,k}^n+\alpha_4 h^{(3)})] \\
U_{i,j}^{n+1} &= U_{i,j}^n+\beta_1 h^{(1)}+\beta_2 h^{(2)}+\beta_3 h^{(3)}+\beta_4 h^{(4)}
\end{aligned} \tag{۴۱}$$

در زمان انتگرال‌گیری شکل اویلری معادلات حاکم بر شاره بر اثر اندرکنش غیرخطی، ناپایداری غیرخطی ناشی از خطای دگر نامیدن به‌وجود می‌آید. این ناپایداری غیرخطی را می‌توان با روش‌های مختلفی ازجمله افزودن جمله‌ای میرا کننده به معادله مهار کرد. از طرفی روش مک‌کورمک دارای یک میرایی ذاتی است و این میرایی بخشی از اندرکنش‌های غیرخطی را کنترل می‌کند. با وجود این به علت پیچیدگی میدان شاره در شارش‌های غیر هیدروستاتیک و تراکم‌پذیر ازجمله میرایی به‌صورت زیر استفاده شده است (به‌طور مثال استراکا و همکاران، ۱۹۹۳؛ هلفریش و همکاران، ۱۹۹۹؛ احمد و لیندرمن، ۲۰۰۷):

$$\begin{aligned} F_u &= \upsilon\nabla\cdot\left(d\nabla u\right) \\ F_v &= \upsilon\nabla\cdot\left(d\nabla v\right) \end{aligned} \quad , \tag{۴۲}$$

که υ ضریب میرایی است. این ضریب با آزمایش عددی به‌دست آمده و با توجه به تفکیک انتخاب شده در حل عددی تغییر می‌کند. هنگام حل عددی رابطه (۴۲) به سمت راست رابطه (۳۹) اضافه می‌شود. برای محاسبه عملگرهای ∇ و $\nabla\cdot$ در رابطه (۴۲) می‌توان از عملگرهای پیش‌رو و پس‌رو استفاده کرد.

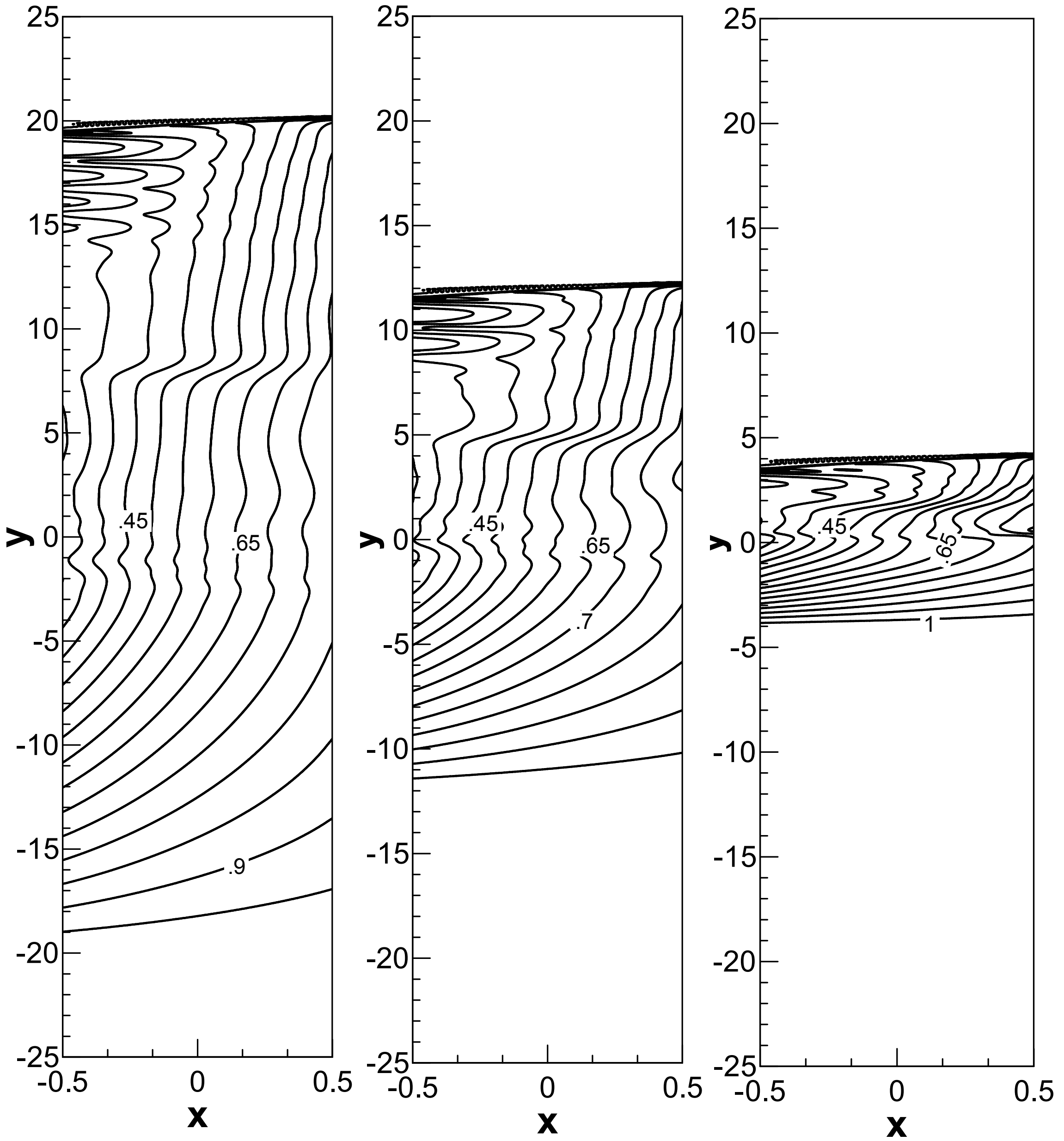
۵-۱ نتایج و بحث حل عددی مسئله تنظیم راسبی غیرخطی دو بعدی در یک کانال چرخان

در این بخش نتایج حاصل از حل عددی مسئله تنظیم راسبی غیرخطی در دو بعد آورده شده است. در این پژوهش یک ناحیه مستطیلی شکل با عرض بی‌بعد $w=1$ در راستای محور y و طول بی‌بعد $L=50$ در راستای محور x مورد نظر است. در این حالت که طول کانال برابر با $w=1$ است، از تفکیک (5001×101) در حل عددی استفاده شده است. گام زمانی انتخاب شده نیز برابر با $\Delta t=0.001$ است. برای کنترل ناپایداری غیرخطی ناشی از اندرکنش‌های غیرخطی پارامتر $\upsilon=0.005$ در نظر گرفته شده است.

در شکل ۴ تحول زمانی میدان ارتفاع شبیه‌سازی شده مربوط به مسئله تنظیم راسبی غیرخطی دو بعدی در یک کانال چرخان در سه زمان $4s$، $12s$ و $20s$ با طول $w=1$ و ضخامت $d_0=0.25$ حاصل از حل عددی و به کمک روش MCRK4 و همچنین در شکل ۵ نتایج هلفریش و همکاران (۱۹۹۹) نشان داده شده است. همان‌طور که در شکل ۵ مشاهده می‌شود از لحاظ کیفی مطابقت مناسبی بین نتایج عددی حاصل از روش MCRK4 و نتایج عددی هلفریش و همکاران (۱۹۹۹) وجود دارد.

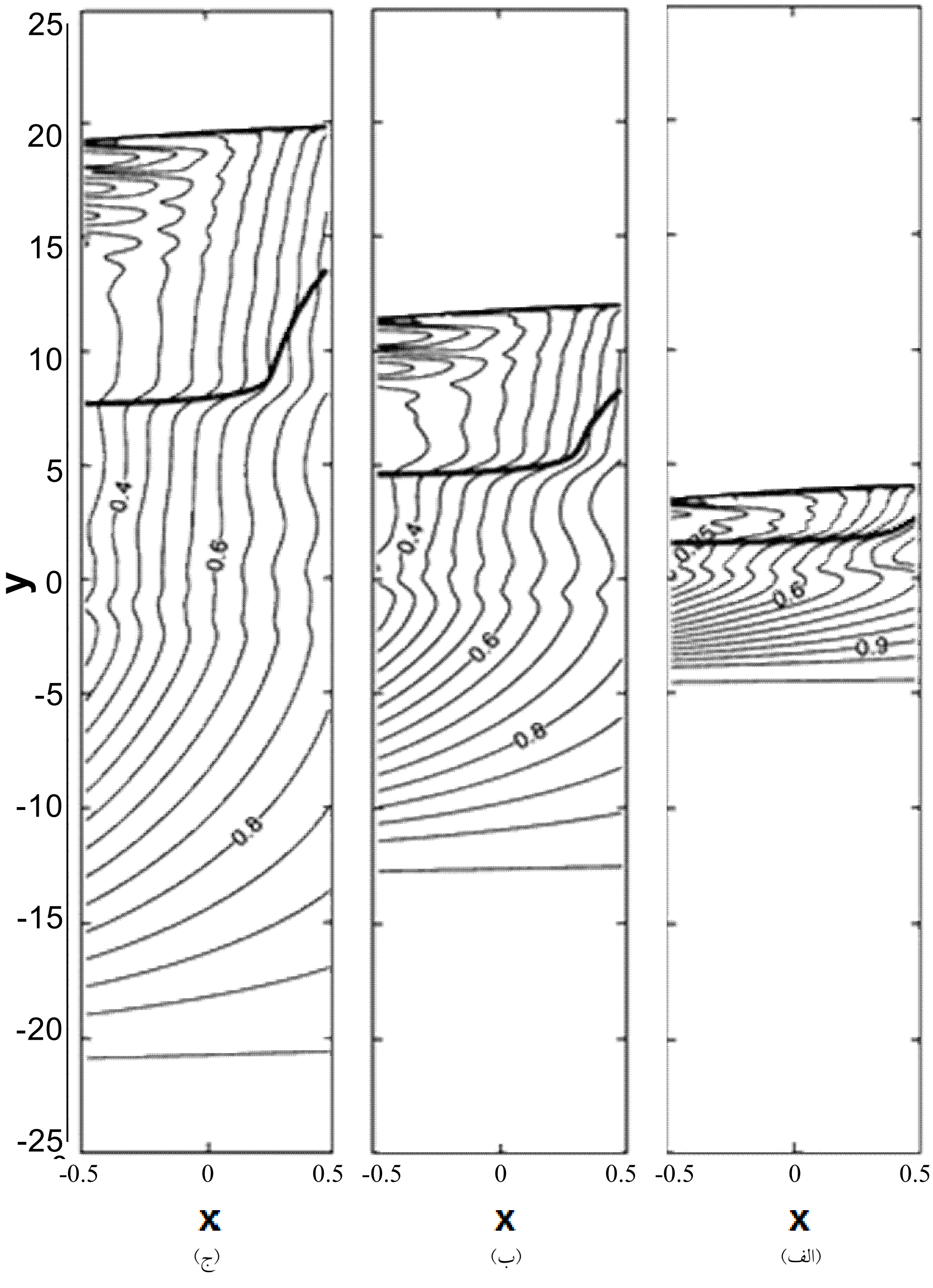
در شکل ۴ بلافاصله بعد از شکستن سد یک شوک تولید شده و به پایین‌سوی جریان منتشر می‌شود. همچنین موج بازشونده کلوین هم به بالاسوی جریان منتشر می‌شود. بین شوک و موج کلوین یک ناحیه منبسط قرار دارد که امواج پوانکاره در این ناحیه حضور دارند.

در شکل ۶ مشابه با کار انجام شده توسط هلفریش و همکاران (۱۹۹۹) میدان ارتفاع، میدان سرعت افقی و میدان تاوایی پتانسیلی برای در زمان ۲۰ ثانیه با طول $w=1$ و $d=0.25$ نشان داده شده است.

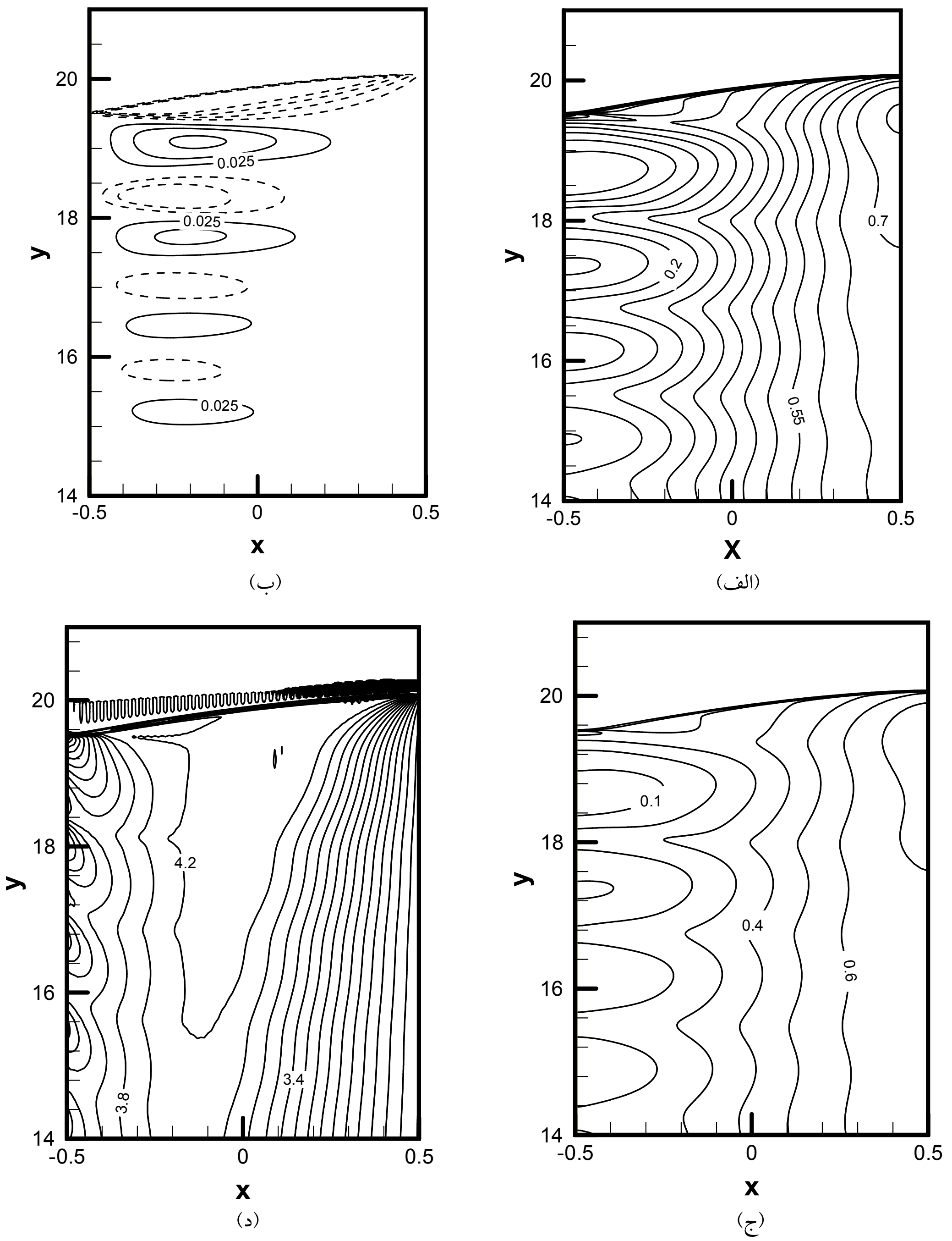


(ج) (ب) (الف)

شکل ۴. تحول زمانی میدان ارتفاع شبیه‌سازی مسئله تنظیم راسبی غیرخطی دو بعدی در یک کانال چرخان با استفاده از روش MCRK4 در سه زمان: (الف) ۴s، (ب) ۱۲s و (ج) ۲۰s برای طول $w = 1$ ، ضخامت $d_0 = 0.25$. پربندهای هم‌ضخامت در بازه صفر تا ۱ قرار دارند. اختلاف بین دو پربند متوالی برابر با ۰/۰۵ است.



شکل ۵. نتایج هلفریش و همکاران (۱۹۹۹) برای حل عددی مسئله تنظیم راسبی غیرخطی در یک کانال چرخان در سه زمان: (الف) ۴ ثانیه، (ب) ۱۲ ثانیه و (ج) ۲۰ ثانیه برای طول $w = 1$، ضخامت $d_0 = 0.25$. پربندهای هم‌ضخامت در بازه صفر تا ۱ قرار دارند.



شکل ۶. شبیه‌سازی مسئله تنظیم راسبی غیرخطی دو بعدی در یک کانال چرخان در زمان ۲۰ ثانیه با طول $w=1$ و $d=0.25$. (الف) میدان ارتفاع، (ب) مؤلفه افقی میدان سرعت در راستای محور x (ج) مؤلفه افقی میدان سرعت در راستای محور y و (د) میدان تاوایی پتانسیلی می‌باشد. خط‌چین‌ها نشان‌دهنده پریشیدگی منفی می‌باشد.

۶ نتیجه‌گیری

در کار حاضر برای بررسی دقت عددی، ابتدا خطای بریدگی روش‌های MC2، MC4 و MCRK4 برای معادله فرارفت خطی یک‌بعدی با ضریب ثابت که دارای حل تحلیلی می‌باشد، به‌دست آمد. در ادامه آهنگ همگرایی برای روش‌های متفاوتی از جمله لکس‌وندرف، لیپ-فراگ، بیم‌وارمینگ و همچنین روش‌های MC2، MC4 و MCRK4 به‌دست آمد که نتایج حاصل گویای مطابقت خوبی با مبانی نظری است. همچنین مشاهده شد دو روش MC4 و MCRK4 دارای مرتبه دقت مکانی یکسانی هستند. از طرفی با حل عددی معادله فرارفت به‌عنوان یک مسئله خطی معلوم به همراه محاسبه خطای بریدگی و آهنگ همگرایی معلوم شد که روش مک‌کورمک فشرده مرتبه چهارم نسبت به روش مک‌کورمک مرتبه دوم از عملکرد و دقت بالاتری برخوردار است. به‌علاوه در این پژوهش به حل عددی مسئله تنظیم راسبی غیرخطی ناپایای یک‌بعدی و دو بعدی با استفاده از MCRK4 پرداخته شد. با توجه به عدم وجود حل تحلیلی در یک‌بعد و برای اینکه مقایسه کمّی بین نتایج عددی حاصل از روش MCRK4 برای تحول زمانی میدان ارتفاع مسئله تنظیم راسبی یک‌بعدی صورت گیرد، مشابه با کار انجام شده توسط کو و پولوانی (۱۹۹۷)، میدان ارتفاع مسئله تنظیم راسبی به‌دست آمد. با توجه به اینکه معادلات مسئله تنظیم راسبی در دو بعد فاقد حل تحلیلی هستند، لذا برای مقایسه کیفی جواب‌ها، مشابه با کار انجام شده توسط هلفریش و همکاران (۱۹۹۹)، میدان ارتفاع شبیه‌سازی مسئله تنظیم راسبی غیرخطی دو بعدی در یک کانال چرخان با استفاده از روش MCRK4 به‌دست آمد. با مقایسه نتایج حل عددی عرضه شده برای شبیه‌سازی مسئله تنظیم راسبی غیرخطی ناپایا با استفاده از روش مک کورمک فشرده مرتبه چهارم با پیمایش زمانی رونگه‌کوتا چهار مرحله‌ای با کار هلفریش و همکاران (۱۹۹۹) و همچنین قادر و همکاران (۱۳۸۹) گویای توانمند بودن این روش در حل عددی معادلات دو بعدی است. با توجه به اینکه روش مک‌کورمک فشرده مرتبه چهارم دارای دقت بیشتری در گسسته‌سازی زمان و مکان و همچنین پخش عددی کمتر می‌باشد، می‌توان از این روش برای مدل‌های عددی پیش‌بینی عددی وضع هوا به‌ویژه مدل‌های میان‌مقیاس با اثرات جبهه‌ای شامل گسستگی در میدان شارش استفاده کرد.

منابع

جوان‌نژاد، ر.، مشکواتی، ا. ح.، قادر، س.، و احمدی‌گیوی، ف.، **۱۳۹۵**، حل عددی شکل پایستار معادلات تراکم‌پذیر دو بعدی و غیر هیدروستاتیک ایستایی جو با روش فشرده مک‌کورمک: مجله ژئوفیزیک ایران، **۱۰**(۱)، ۲۸–۴۶.

قادر، س.، بیدختی، ع. ع. و فلاحت، س.، **۱۳۸۹**، حل عددی مسئله تنظیم راسبی غیرخطی ناپایای دو بعدی با استفاده از روش فشرده مک‌کورمک مرتبه چهارم: مجله فیزیک زمین و فضا، **۳۶** (۳)، ۱۵۱–۱۷۳.

قادر، س.، بیدختی، ع. ع. و فلاحت، س.، **۱۳۹۰**، حل عددی شکل پایستار معادلات تراکم‌پذیر دو بعدی و غیر هیدروستاتیک جو با استفاده از روش مک‌کورمک مرتبه دوم: مجله فیزیک زمین و فضا، **۳۷** (۲)، ۱۷۱–۱۹۱.

میرزایی شیری، ر.، قادر، س.، مزرعه فراهانی، م. و بیدخی، ع. ع.، **۱۳۹۶**، حل عددی معادلات آب کم‌عمق با روش مک‌کورمک فشرده مرتبه چهارم: مجله فیزیک زمین و فضا، **۴۳** (۱)، ۲۰۹–۲۲۸.

Ahmad, N. and Lindeman, J., 2007, Euler solution using flux-based wave decomposition: International Journal for Numerical Methods in Fluids, **54**, 47-72.

Dynamics of Atmospheres and Oceans, **41**, 149–171.

Hirsch, S. R., 1975, Higher order accurate difference solution of fluid mechanics problems by a compact differencing technique: Journal of Computational Physics, **19**, 99-109.

Hixon, R., and Turkel, E., 2000, Compact implicit Mac Cormack–type scheme with high accuracy: Journal of Computational Physics, **158**, 51-70.

JavanNezhad, R., Meshkatee, A, H., Ghader, S., and Ahmadi-Givi, F., 2016, High-order compact MacCormack scheme for two-dimensional compressible and non-hydrostatic equations of the atmosphere: Dynamics of Atmospheres and Oceans, **75**, 102–117.

Kreiss, H. O., and Oliger, J., 1972: Comparision of accurate method for the integration of hyperbolic eqution, Tellus, **24**, 199-215.

Kuo, A. C. and polvani, L. M., 1997, Time-dependent fully nonlinear geostrophic adjustment: Journal of Physical Oceanography, **27**, 1614-1634.

Kuo, A. C. and polvani, L. M., 1997, Time-dependent fully nonlinear geostrophic adjustment: Journal of Physical Oceanography, **27**, 1614-1634.

Lax, P., Wendroff, B., 1960, Systems of conservation laws: Communications on Pure and Applied Mathematics, **13**, 217–237.

Lele, S. K., 1992, Compact finite difference shemes with spectral like resolution, Journal of Computational Physics, **103**, 16-42.

Mohebalhojeh, A. R., and Dritschel, D. G., 2007, Assessing the numerical accuracy of complex spherical shallow water flows: Monthly Weather Review, **135**, 3876-3894.

Navon, I. M., and Riphagen H. A., 1979, An implicit compact fourth-order algorithm for solving the shallow water equation in conservative-law form: Monthly Weather Review, **107**, 1107-1127.

Numerov, B. V., 1924, A method of extrapolation of perturbations, Roy. Astrom: Monthly notices of the Royal Astronomical Society , **84**, 592-601.

Roy, C. J., Smith, T. M., and Ober, C. C., 2002, Verifcation of a compressible CFD code using the method of manufactured solutions: AIAA Paper, 2002-3110.

Roy, C. J., Nelson, C. C., Smith, T. M., and Ober C. C., 2004, Verification of Euler/Navier–Stokes codes using the method of

Boss, E., and Thompson, L., 1994, Energetics of nonlinear geostrophic adjustment: Journal of Physical Oceanography, **25**,1521-1529.

Beam, R. M., and Warming, R. F., 1976, An implicit finite difference algorithm for hyperbolic systems in conservative-law form: Journal of Computational Physic, **22**, 87–116

Cahn, A., 1945, An investigation of the free oscillations of a simple current system: Journal of Meteorology. **2**, 113-119.

Cebeci, T., Shao, J. P., Kafyeke, F., and Laurendeau, E., 2005, Computational Fluid Dynamics for Engineers: Springer.

Esfahanian, V., Ghader, S., and Mohebolhojeh, A. R., 2005, On the use of super compact scheme for spatial differencing in numerical models of the atmosphere: Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society, **131**, 2109-2130.

Fox, L., and Goodwin, E. T., 1949, Some new method for the numerical integration of ordinary differential equation: Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, **45**, 373-388.

Ghader, S., Mohebalhojeh, A. R., and Esfahanian, V., 2009, On the Spectral convergence of the supercompact finite-difference schemes for the f-plane shallow-water equations: Monthly Weather Review, **137** (7), 2393–2406.

Ghader, S., and NordstrÖm, J., 2015, High-order compact finite difference schemes for the vorticity-divergence representation of the spherical shallow water equations: International Journal for Numerical Methods in Fluids, **78**, 709-738.

Ghader, S., Ghasemi, A., Banazadeh, M. R., and Mansoury, D., 2012, High-order compact scheme for Boussinesq equations: Implementation and numerical boundary condition issue: International Journal for Numerical Methods in Fluids, **69**, 590–605.

Gill, A. E., 1976, Adjustment under gravity in a rotating channel: Journal Fluid Mechanics, **77**, 603–621.

Gill, A. E., 1982, Atmosphere-Ocean Dynamics: Academic Press.

Helfrich, K. R., Kuo, A. C. and Prat, L. J., 1999, Nonlinear Rossby adjustment in a channel: Journal Fluid Mechanics, **390**, 187-222.

Helfrich, K. R., 2006, Nonlinear adjustment of a localized layer of buoyant, uniform potential vorticity fluid against a vertical wall:

Density Curent: A Benchmark Solution and Comparisons: International Journal for Numerical Methods in Fluids, **17**, 1-22.

Williamson, D. L., Drake, J. B., Hack, J. J., Jakob-Chien, R., and Swarztrauber, P. N., 1992, A standard test set for numerical approximations to the shallow water equations in spherical geometry: Journal of Computational Physics, **102**, 211-224.

Wake, G. W., Ivey, G. N., Imberger, J., Mcdonald, 2004, The temporal evolution of a geostrophic flow in a rotating stratified basin: Dynamics of Atmospheres and Oceans, **39**, 189-210.

manufactured solutions: International Journal for Numerical Methods in Fluids, **44**, 599–620.

Rivas, D., Fuentes, O. U., and Ochoa, J., 2005, Topographic effects on the dynamics of gravity currents in a rotating system: Dynamics of Atmospheres and Oceans, **39**, 227-249.

Salari, K., and Knupp, P., 2000, Code Verification by the Method of Manufactured Solutions, Sandia National Laboratories, Albuquerque, NM 87185-0825.

Straka, J. M, Wilhelmson, R. B., Wicker, L. J., Anderson, J. R, and Droegemeier, K. K, 1993, Numerical Solutions of a Non-linear

Iranian Journal of Geophysics, Vol 11, No 3, 2017, P. 5

Application of the fourth-order compact MacCormack scheme with a four-stage Runge–Kutta time marching for numerical solution of unsteady and non-linear Rossby adjustment problem

Reza JavanNezhad[1], and Sarmad Ghader [2*]

[1]*Ph. D. of Meteorology, Science and Research branch, Islamic Azad university, Tehran, Iran*
[2]*Associate Professor, Space Physics Department, Institute of Geophysics, University of Tehran, Tehran, Iran*

(Received: 21 May 2017, Accepted: 16 August 2017)

Summary
By increasing the computing power of computers, the advantage of high-resolution numerical methods for numerical simulation of the governing equations of fluid flow is further emphasized. Recently, increasing the accuracy of numerical methods used for simulation of fluid dynamics problems, particularly the geophysical fluid dynamics problems (e.g., shallow water equations) has been the subject of many research works.

The compact finite difference schemes can provide a simple way to reach the main objectives in the development of numerical algorithms, i.e., having a low cost on the one hand and a highly accurate computational method on the other hand. These methods have also been used for numerical simulation of some geophysical fluid dynamics problems.

However, by splitting the derivative operator of a l compact centra method into one-sided forward and backward operators, a family of compact MacCormack-type schemes can be derived (Hixon and Turkel, 2000). While these classes of compact methods are as accurate as the original compact central methods used to derive the one-sided forward and backward operators, they need less computational work per grid point.

The present work is devoted to the assessment of the accuracy of different methods. The one-dimensional advection equation with the known analytical solution is employed as a prototype model. Also, the truncation error of the traditional second-order MacCormack scheme, the standard fourth-order compact Mac-Cormack scheme, and a fourth-order compact MacCormack scheme with a four-stage Runge–Kutta time marching method are studied. Furthermore, to be able to examine the accuracy, the Lax–Wendroff, the leap-frog and the Beam–Warming methods combined with the second-order and fourth-order compact finite difference methods for spatial differencing are also used. In addition, the convergence rates of different methods are studied. It can be seen that the convergence rates are in agreement with the theoretical order of convergence.

In this work, the traditional second-order MacCormack scheme (MC2), the standard fourth-order compact Mac-Cormack scheme (MC4) developed by Hixon and Turkel (2000) and a fourth-order compact MacCormack scheme with a four-stage Runge–Kutta time marching method (MCRK4) are used for numerical solution of the unsteady and non-linear Rossby adjustment problem (one- and two-dimensional cases). In the one-dimensional case, a single layer shallow water model is used to study the unsteady and nonlinear Rossby adjustment problem. The conservative form of the two-dimensional shallow water equations is used to study the unsteady and nonlinear Rossby adjustment problem in the two-dimensional case. For both cases, the time evolution of a fluid layer initially at rest with a discontinuity in height filed is considered for numerical simulations.

Keywords: compact MacCormack scheme, numerical accuracy, truncation error

*Corresponding author: sghader@ut.ac.ir