

تلفیق مشاهدات GNSS و فاصله جفت ماهواره GRACE به کمک فیلتر کالمن بی اثر (مطالعه موردی: بازیابی میدان گرانش شبیه سازی شده)

محمد علی شریفی^{۱*}، سعید فرزانه^۲، و علی عموتقی^۳

^۱دانشیار، دانشکده مهندسی نقشه برداری، پردیس دانشکده های فنی، دانشگاه تهران، تهران، ایران

^۲استادیار، دانشکده مهندسی نقشه برداری، پردیس دانشکده های فنی، دانشگاه تهران، تهران، ایران

^۳کارشناسی ارشد ژئودزی، دانشکده مهندسی نقشه برداری، پردیس دانشکده های فنی، دانشگاه تهران، تهران، ایران

(تاریخ دریافت: ۱۳۹۷/۰۸/۱۲، تاریخ پذیرش: ۱۳۹۸/۰۲/۰۴)

چکیده

با پیشرفت صنایع فضایی، توسعه علوم ماهواره ای، بررسی ارتباط متقابل مدار ماهواره ها و طراحی مأموریت های زمین-پژوهشی فضایی، تعیین میدان گرانش و مدل سازی تغییرات آن همواره مورد توجه قرار گرفته است. امروزه گیرنده های سامانه موقعیت یابی جهانی امکان تعیین موقعیت ماهواره های گرانی سنجی همچون GRACE را تا حد زیادی تسهیل کرده است. با دراختیار داشتن اطلاعات سینماتیکی و دینامیکی ماهواره همچون موقعیت و سرعت می توان به تقریب قابل قبولی از میدان گرانش زمین رسید و تغییرات آن را در طول زمان ردیابی و بررسی کرد. لزوم برآورد و تخمین دقیق تر مدار ماهواره های گرانی سنجی در تعیین میدان گرانشی دقیق تر و صحیح تر، پژوهشگران را به سمت توسعه و بهبود ابزار اندازه گیری و روش های برآورد مدار ماهواره ها سوق داده است. در این پژوهش در مرحله نخست با دو روش مشتق گیری عددی و فیلتر کالمن گسترش یافته، توانایی مشاهدات GPS در بازسازی مشاهدات فاصله یاب رادیویی (KBR) بررسی و در ادامه توانایی این فیلتر در تلفیق مشاهدات GPS و KBR با نتایج فیلتر کالمن بی اثر مقایسه می شود؛ نتیجه این مقایسه، بهبود حدود ده برابری را نشان می دهد. پس از آن به منظور بررسی دقت روش پیشنهادی از منظر عملی، با استفاده از روش شتاب و مدارهای برآورد شده در مرحله پیشین، میدان گرانش EGM96 تا درجه و مرتبه ۷۰ بازیابی و خروجی روش ها در ابتدا با واریانس درجه و سپس از منظر اختلاف ارتفاع ژئوئیدی با میدان مرجع بررسی می شود. نتایج این مرحله نیز بهبود تقریباً ده برابری اختلاف های واریانس درجه و کمتر از ده برابر برای ارتفاع های ژئوئیدی را نشان می دهد.

واژه های کلیدی: میدان ثقل، UKF، EKF، مشتق گیری عددی، ماهواره GRACE

۱ مقدمه

امروزه استفاده از ماهواره برای تعیین میدان گرانش زمین، سهم بزرگی در دقت و گستردگی انجام این مهم دارد. داده‌هایی که ماهواره‌ها جمع‌آوری می‌کنند، از منظر دقت، گستره پوشش و تراکم حائز اهمیت و توجه بسیاری هستند. کشورهای پیشرو در فناوری‌های فضایی و ماهواره‌ای با پرتاب ماهواره‌های گرانی‌سنجی همچون CHAMP، GRACE و GOCE و بهره‌گیری از روش‌های گوناگون جمع‌آوری اطلاعات و پردازش آنها، امکان تعیین دقیق‌تر و صحیح‌تر میدان گرانش را فراهم کردند. اثر متقابل بسیاری از پدیده‌های ژئوفیزیکی و میدان گرانش زمین بر یکدیگر، اهمیت تعیین و شناخت دقیق و صحیح این میدان و تغییرات آن را در طول زمان مشخص می‌کند (باقربندی و همکاران، ۲۰۱۵). با تعیین دقیق میدان گرانش زمین و نحوه تغییرات آن می‌توان اطلاعات ذی‌قیمتی از پدیده‌هایی همچون تغییرات سطح آب‌های زیرزمینی، حرکت ماگمای گوشته زمین، جزرومد و بسیاری از پدیده‌های دیگر به دست آورد و از این اطلاعات در مدل‌سازی طبیعت زمین و محیط زیست استفاده کرد (فاس و همکاران، ۲۰۱۳).

با پرتاب ماهواره CHAMP در سال ۲۰۰۰، عصر تعیین میدان گرانش با داده‌های ماهواره‌ای به صورت رسمی و ویژه آغاز شد. این ماهواره را مرکز مطالعات زمین آلمان با هدف تهیه نقشه گرانشی، مغناطیسی، مقطع یونوسفر و تروپوسفر زمین، به یک مدار نزدیک قطبی دایره‌ای در ارتفاع ۴۵۰ کیلومتری سطح زمین پرتاب کرد. ماهواره CHAMP با استفاده از یک گیرنده GPS فضایی با شانزده کانال، یک شتاب‌سنج سه محوری برای اندازه‌گیری شتاب‌های ناشی از نیروهای غیرجاذبی، بازتابنده‌های لیزر، مغناطیس‌سنج و یون‌سنج و دیگر دستگاه‌های اندازه‌گیری، داده‌های ارزشمندی را برای حل مسئله تعیین میدان گرانش در اختیار قرار داده است (گرلاخ و همکاران،

۲۰۰۳). در سال ۲۰۰۲، سازمان ملی مدیریت هوانوردی و فضای ایالات متحده آمریکا و مرکز هوانوردی و فضایی آلمان، جفت‌ماهواره GRACE را برای انجام اهداف مشابه به مداری نزدیک قطبی و دایره‌ای در ارتفاع ۴۸۰ کیلومتری از سطح زمین پرتاب کردند. این ماهواره‌ها علاوه بر تجهیزات اندازه‌گیری استفاده‌شده در CHAMP، از تجهیزاتی همچون نوسانگر فرایا (ultra-stable oscillator)، فاصله‌یاب رادیویی باند-K دوطرفه و دوربین‌های ردیابی ستارگان نیز در جهت بهبود هرچه بیشتر دقت فرایند تعیین میدان گرانش و دیگر اهداف مأموریت بهره می‌برند. این جفت‌ماهواره، از فاصله‌یابی رادیویی و بسیار دقیق نیز برخوردار هستند و فاصله بین خود را اندازه‌گیری می‌کنند. تغییرات در اندازه این فاصله (موقعیت نسبی ماهواره‌ها) به معنی تغییرات پارامترهای حرکتی نسبی جفت‌ماهواره پس از اعمال تصحیحات مربوط، به تغییرات مکانی میدان گرانشی زمین تعبیر می‌شود. این مأموریت موفق‌ترین مأموریت فضایی گرانی-سنجی ماهواره‌ای به‌شمار می‌رود، به طوری که با استفاده از مانورهای مداری مناسب، این ماهواره‌ها همچنان در حال استخراج داده‌های ذی‌قیمت هستند (رومل و همکاران، ۲۰۰۲). پس از پرتاب ماهواره GOCE در سال ۲۰۰۹ به فضا در ارتفاع ۲۵۰ کیلومتری سطح زمین در مداری مشابه مأموریت‌های پیشین، نخستین مأموریت گرادیومتری ویژه فضایی میدان گرانش آغاز شد. این ماهواره با استفاده از گیرنده GPS/GloNASS خود و یک گرادیومتر گرانشی نقش بزرگی در فراهم‌آوری داده‌های مناسب و دقیق در جهت بازیابی میدان گرانشی زمین، تعیین ژئوئید و همچنین جریان‌های دریایی ایفا می‌کند (روبیلت و همکاران، ۲۰۱۳).

با تعیین مدار ماهواره یا ماهواره‌ها (موقعیت، سرعت و شتاب مطلق و نسبی)، پس از اعمال تصحیحات مربوط اعم از نیروهای سطحی و حجمی غیرزمینی، هرگونه

و در نهایت، مدار ماهواره با به کارگیری روش‌های بازیابی میدان گرانش به ضرایب هماهنگ‌گامی برای طول موج‌های بلند (تا درجه و مرتبه ۷۰) تبدیل می‌شود. این روش برای نخستین بار در ماهواره CHAMP و سپس در ماهواره GOCE به کار گرفته شد (شریفی، ۲۰۰۴، ۲۰۰۶).

ردیابی ماهواره‌ای Low-Low. این روش برای تعیین مدار نسبی دسته‌ماهواره به کار گرفته می‌شود. با استفاده از تجهیزاتی همچون گیرنده و فرستنده امواج ریزموج یا لیزر، موقعیت، سرعت و شتاب نسبی ماهواره‌ها محاسبه و مدار نسبی ماهواره‌ها به عنوان ورودی مسئله بازیابی میدان گرانش به الگوریتم‌های موجود تزریق می‌شود. به صورت دقیق‌تر، در این روش فاصله ماهواره‌ها (ρ) و تغییرات آن ($\dot{\rho}$) با فاصله یاب رادیویی یا لیزری موجود روی ماهواره‌ها تعیین می‌شود (شریفی، ۲۰۰۴، ۲۰۰۶). در جفت‌ماهواره‌های GRACE با به کارگیری هم‌زمان دو روش HL و LL برای تعیین مدار ماهواره و ایجاد فزونی مشاهدات، ضرایب هماهنگ‌گامی برای طول‌موج‌های کوتاه-تری (تا درجه و مرتبه ۲۰۰) محاسبه می‌شود و بنابراین مدل دقیق‌تری از میدان گرانشی زمین به دست می‌آید. در این ماهواره‌ها ردیابی HL با گیرنده سامانه موقعیت یاب جهانی Blackjack با نرخ برداشت ۰/۱ هرتز و ردیابی LL با فاصله یاب رادیویی KBR با نرخ برداشت ۱۰ هرتز انجام می‌پذیرد و فاصله (ρ) و تغییرات آن ($\dot{\rho}$) مشاهده می‌شود. بین این مشاهدات رابطه زیر برقرار است (صفری و همکاران، ۱۳۹۳):

$$\langle \dot{r}_1 + \dot{r}_2, r_1 + r_2 \rangle = \dot{\rho}^2 + \rho \ddot{\rho} - (\dot{r}_1 + \dot{r}_2, \dot{r}_1 + \dot{r}_2) \quad (1)$$

که r ، \dot{r} و \ddot{r} به ترتیب بردارهای موقعیت، سرعت و شتاب هستند که برای هر کدام از ماهواره‌ها با اندیس مربوط به خود مشخص شده‌اند. دقت هرچه بیشتر در اندازه‌گیری مشاهدات و محاسبه مؤلفه‌های مدار ماهواره‌ها به دقت و صحت هرچه بیشتر در تعیین ضرایب هماهنگ‌گامی میدان

تغییری در عناصر مداری ماهواره را می‌توان به تغییرات میدان جاذبه وابسته دانست. روش‌های متعددی در بازیابی میدان گرانش زمین معرفی و توسعه داده شده‌اند که به طور کلی دو روش انتگرال انرژی و شتاب از مشهورترین این روش‌ها هستند. در روش نخست با استفاده از قانون پایستگی انرژی و بهره‌گیری از انتگرال انرژی روی مدار، می‌توان مشاهدات سرعت ماهواره را به عنوان اندازه‌گیری-هایی در راستای حل مسئله بازیابی میدان گرانش به کار برد. در این روش با انتگرال‌گیری عددی از معادلات حرکت ماهواره که به صورت معادلات تغییرات هستند، پارامترهای مداری و میدان جاذبه به صورت توأمان محاسبه می‌شوند. این روش به دلیل وجود دستگاه معادلات بزرگ و ماتریس نرمال پر نیازمند توان محاسباتی بسیار زیادی است و روشی زمان‌بر به شمار می‌آید (خادمی و همکاران، ۱۳۸۹؛ گریلاخ و همکاران، ۲۰۰۳ و هایسکانن و موریتز، ۱۹۸۴). روش دوم استفاده از قانون دوم نیوتن و به کار بردن شتاب ماهواره‌ها به عنوان مشاهده است. استخراج شتاب ماهواره‌ها معمولاً با مشتق‌گیری عددی از موقعیت و سپس سرعت ماهواره‌ها به دست می‌آید. در این روش فاصله بین ماهواره‌ها، تغییرات مرتبه اول و تغییرات مرتبه دوم آن محاسبه می‌شود. تغییرات مرتبه دوم این فاصله نماینده‌ای از شتاب ماهواره‌ها در راستای خط واصل بین جفت-ماهواره است و تغییرات این شتاب بیانگر تأثیر نیروهای مؤثر بر حرکت نسبی ماهواره‌ها است. به طور کلی مشاهدات و اندازه‌گیری‌های استفاده شده در تعیین میدان گرانش از گیرنده GPS و فاصله یاب رادیویی تأمین می‌شوند (خادمی و همکاران، ۱۳۹۱، شریفی، ۲۰۰۴، ۲۰۰۶). برای تعیین میدان گرانش زمین با کمک مدار ماهواره دو روش کلی وجود دارد:

ردیابی ماهواره‌ای High-Low: در این روش با استفاده از ماهواره‌های با ارتفاع بالا، به عنوان مثال GPS، موقعیت و سرعت (مدار) ماهواره یا ماهواره‌های گرانی‌سنجی تعیین

که در این معادلات F ، B و H به ترتیب اپراتورهای خطی مربوط به حالت، نوفه سیستم و مشاهدات هستند. از آنجا که در واقعیت، مشاهدات در بازه‌های زمانی گسسته در نظر گرفته می‌شوند، لازم است این معادلات گسسته-سازی و بازنویسی شوند. شکل گسسته روابط به صورت زیر است (کراسیدیس و یونکینز، ۲۰۱۲):

$$\hat{x}_{k+1} = \Phi_k \hat{x}_k + L_k w_k, \quad (6)$$

$$\tilde{y}_{k+1} = H_k \hat{x}_{k+1} + \hat{v}_{k+1}, \quad (7)$$

که Φ ، L ، \tilde{y} و v به ترتیب ماتریس گذر، شکل گسسته ماتریس طرح نوفه سیستمی، مشاهده (اندازه‌گیری) و بردار نوفه مشاهدات هستند. شایان ذکر است که هر کدام از روابط (۶) و (۷) می‌توانند در همه زمان‌ها به خودی خود پاسخی مستقل برای مدار داشته باشند. در رابطه (۶) مقدار اولیه‌ای برای بردار وضعیت مورد نیاز است، اما به دلیل نقص مدل دینامیکی، با پیشروی در زمان، انحراف پاسخ معادلات از مدار حقیقی بیشتر می‌شود. از طرف دیگر، در رابطه (۷) نیز به دلیل وجود نوفه در مشاهدات، مدار برآورد شده به شدت آلوده به نوفه خواهد بود. با استفاده هم‌زمان از این دو رابطه، هریک از آنها نقص دیگری را پوشش خواهد داد و پاسخ به صورت کلی زیر خواهد بود (کراسیدیس و یونکینز، ۲۰۱۲):

$$\hat{x}_{k+1}^- = \Phi_k \hat{x}_k^+ + L_k w_k, \quad (8)$$

$$\hat{x}_{k+1}^+ = \hat{x}_{k+1}^- + K(\tilde{y}_{k+1} - H_{k+1} \hat{x}_{k+1}^-), \quad (9)$$

رابطه (۸) را رابطه پیش‌بینی و رابطه (۹) را رابطه به‌هنگام‌سازی می‌نامند. در رابطه (۹) ماتریس K را ماتریس بهره این برآوردگر می‌نامند که بیانگر نحوه و میزان تأثیر سهم متقابل مدل دینامیکی و مشاهدات در برآورد مدار سیستم است. اگر ماتریس K به گونه‌ای تعیین

گردد زمین می‌انجامد؛ از این رو در این پژوهش در ابتدا مشاهدات استفاده شده در روش بازیابی میدان گرانش زمین به دو روش و تنها با استفاده از اندازه‌گیری‌های موقعیت بهبود می‌یابند و با یکدیگر مقایسه می‌شوند سپس به نحوه بهبود تعیین میدان گرانش با تلفیق مشاهدات موقعیت و KBR به صورت توأمان با استفاده از روش UKF پرداخته و در نهایت، نتایج بازیابی میدان گرانش با روش شتاب بررسی می‌شود.

۲ سیستم دینامیکی و برآوردگر مرتبه کامل

یک سیستم دینامیکی با یک دستگاه معادلات دیفرانسیل حاکم بر عناصر وضعیت سیستم و مشاهدات مستقیم و غیرمستقیم مرتبط با آنها بیان می‌شود. این مشاهدات می‌توانند خروجی‌های دستگاه نیز تلقی شوند. شکل کلی دستگاه معادلات دینامیکی و معادلات مشاهدات به صورت زیر است (کراسیدیس و یونکینز، ۲۰۱۲):

$$\dot{x}(t) = T(x(t), w(t)), \quad (2)$$

$$y(t) = G(x(t)), \quad (3)$$

که x ، w و y به ترتیب بردارهای وضعیت سیستم، نوفه سیستمی و مشاهده (خروجی سیستم) و T و G به ترتیب تبدیلات مربوط به دینامیک و مشاهدات هستند. اگر روابط حاکم بر عناصر مدار سیستم و همچنین رابطه وضعیت و مشاهدات، خطی باشد؛ سیستم را سیستم دینامیکی خطی می‌نامند و روابط آن به صورت زیر بازنویسی می‌شوند (کراسیدیس و یونکینز، ۲۰۱۲):

$$\dot{x}(t) = F(t)x(t) + B(t)w(t) \quad (4)$$

$$y(t) = H(t)x(t) \quad (5)$$

که A و B به ترتیب برابر با $a_{ij} = \frac{\partial T_i}{\partial x_j}$ و $b_{ij} = \frac{\partial T_i}{\partial w_j}$ نیز برابر با $h_{ij} = \frac{\partial G_i}{\partial x_j}$ است که باید در هر زمان، ارزیابی و مقدار عددی آنها محاسبه شود. ماتریس طرح B معمولاً ماتریسی ثابت است. w و v به ترتیب فرایندهای تصادفی نوفه مدل دینامیکی و مدل مشاهدات هستند که هر دو با گشتاورهای مرتبه اول برابر صفر و گشتاورهای مرتبه دوم به ترتیب Q_c و R معرفی می‌شوند. این معادلات باید برای بازه‌های زمانی T گسسته‌سازی و به شکل زیر تبدیل شوند (گیس، ۲۰۱۱):

$$\hat{x}_{k+1} = \Phi_k \hat{x}_k + B_k w_k, \quad (12)$$

$$\tilde{y}_{k+1} = H_{k+1} \hat{x}_{k+1} + \hat{v}_{k+1}, \quad (13)$$

$$\Phi_k = e^{A_k T} = I + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(AT)^i}{i!}, \quad (14)$$

$$Q_d = \int_0^T e^{A_k(T-\tau)} B_k Q_c B_k^t e^{A_k(T-\tau)^t} d\tau, \quad (15)$$

که Φ_k ماتریس گذر و Q_d ماتریس نوفه دینامیکی گسسته است. پس از محاسبه مدل گسسته باید فرایند فیلترکردن کالمن در دو مرحله پیش‌بینی (انتشار) و به‌روز-رسانی انجام شود که در این مراحل به ترتیب دینامیک حاکم بر مسئله و سپس مشاهدات اخذ شده در برآورد مؤلفه‌های مدار تأثیر می‌گذارند. اگر مدار اولیه \hat{x}_0 و ماتریس وزن آن، P_0 ، مشخص و معلوم باشند؛ نحوه انجام و اعمال این دو مرحله در هر زمان در روابط زیر مشاهده می‌شود. روابط (۱۶) و (۱۷) برای پیش‌بینی بردار وضعیت و ماتریس واریانس-کوواریانس آن استفاده می‌شوند (کراسیدیس و یونکینز، ۲۰۱۲):

$$\hat{x}_{k+1}^- = \Phi_k \hat{x}_k^+ \quad (16)$$

$$P_{k+1}^- = \Phi_k P_k^+ \Phi_k^t + Q_d \quad (17)$$

برای به‌روزرسانی روابط زیر را خواهیم داشت:

$$\hat{x}_{k+1}^+ = \hat{x}_{k+1}^- + K_{k+1}(\tilde{y}_{k+1} - H(\hat{x}_{k+1}^-)) \quad (18)$$

شود که اثر ماتریس واریانس-کوواریانس مدار برآورد-شده کمینه شود، این ماتریس را ماتریس بهره کالمن و برآوردگر مدار تحت این ماتریس را فیلتر کالمن می‌نامند (کالمن، ۱۹۶۰). با نگاهی به شکل معادلات دینامیک سیستم و مشاهدات، فیلتر کالمن را به سه شکل متفاوت فیلتر کالمن استاندارد (Standard Kalman Filter)، فیلتر کالمن گسترش‌یافته (Extended Kalman Filter) و فیلتر کالمن بی‌اثر (Unscented Kalman Filter) می‌توان بازسازی کرد.

۱-۲ فیلتر کالمن استاندارد

از این فیلتر هنگامی استفاده می‌شود که معادلات دینامیکی و مشاهدات شکل خطی داشته باشند (کالمن، ۱۹۶۰).

۲-۲ فیلتر کالمن گسترش‌یافته

این فیلتر در حالتی استفاده می‌شود که معادلات دینامیکی و مشاهدات غیرخطی باشند. پس از خطی‌سازی معادلات و استفاده از بسط تیلور برای تقریب زدن، شکل معادلات پیش‌بینی و به‌هنگام‌سازی به‌صورتی تبدیل می‌شود که بسیار مشابه آن چیزی است که در فیلتر استاندارد موجود است. این فیلتر حالت خاص و کارآمدتری از فیلتر کالمن خطی‌سازی شده است (کراسیدیس و یونکینز، ۲۰۱۲).

روابط (۲) و (۳) را برای سیستم دینامیکی غیرخطی در نظر بگیرید. به دلیل غیرخطی بودن این روابط، کاربرد مستقیم آنها در روابط کالمن فیلتر استاندارد ممکن نیست؛ بنابراین باید از روابط کالمن گسترش‌یافته استفاده شود. در این روش از مشتق معادلات غیرخطی دینامیک و مشاهدات استفاده می‌شود (کراسیدیس و یونکینز، ۲۰۱۲):

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)w(t), \quad (10)$$

$$y(t) = H(t)x(t) + v(t), \quad (11)$$

گشتاورهای آن توزیع بیان کرد؛ برای مثال یک تابع توزیع نرمال را می توان با معرفی دو گشتاور مرتبه اول و دوم آن توصیف کرد که به ترتیب میانگین و انحراف معیار توزیع هستند. حال اگر متغیر x (مجهولات) خود تابعی از متغیر دیگری مثل y (مشاهدات) باشد و توزیع y نیز موجود و مشخص باشد، این گشتاورها را با روابط مشخصی از فضای y می توان بر فضای x تصویر کرد؛ به طور مثال اگر توزیع y توزیع نرمال با امید و انحراف معیار مشخص باشد و رابطه بین x و y یک رابطه خطی فرض شود، تصویر پارامترهای این توزیع با روابط زیر محاسبه می شود (یولیر، ۲۰۰۲):

$$x = f(y) = Ay \quad (21)$$

$$E(x) = E(Ay) = AE(y) \quad (22)$$

$$E(xx^t) = C_{xx} = AC_{yy}A^t \quad (23)$$

حال اگر رابطه بین x و y خطی نباشد، فرایند تصویرسازی باید با تقریب انجام شود. روش مرسوم در تصویر کردن توزیعها تحت روابط غیرخطی، استفاده از تقریب تیلور رابطه غیرخطی موجود است. واضح است که برای افزایش کیفیت و حفظ خواص غیرخطی رابطه بین x و y لازم است جملات بیشتری از تقریب تیلور رابطه استفاده شوند و این در حالی است که با افزایش جملات تقریب تیلور، پیچیدگی روابط فرایند تصویرسازی برای تقریبهای بالاتر از تقریب خطی و همچنین حجم محاسبات به طور چشمگیری افزایش می یابد به طوری که در عمل، برای توزیعهای پیچیده مشاهدات و روابط به شدت غیرخطی، تصویر کردن توزیع مشاهدات روی فضای مجهولات میسر نخواهد بود (یولیر، ۲۰۰۲). یولیر و اولمان راهکاری جدید برای تسهیل و تقریب فرایند تصویرسازی و حفظ

$$P_{k+1}^+ = (I - K_{k+1}H_{k+1})P_{k+1}^- \quad (19)$$

در این روابط ماتریس K ماتریس بهره کالمن نامیده می شود که میزان تأثیر مشاهدات در مرحله به روزرسانی مؤلفه های مدار را مشخص می کند (کراسیدیس و یونکیتز، ۲۰۱۲):

$$K_{k+1} = P_{k+1}^- H_{k+1}^t (H_{k+1} P_{k+1}^- H_{k+1}^t + R_{k+1})^{-1} \quad (20)$$

برای اجرا و اعمال این فیلتر لازم است مقادیر اولیه بردار مدار و وزن آن مشخص باشد. در صورت مشخص بودن این مقادیر و صحت مدل سازی مسئله، فیلتر همگرا می شود و بردار مدار و وزن آن به مقادیر حقیقی خود میل می کنند. از طرفی، تعیین ماتریس R و Q_c (یا Q_d) تأثیر بسزایی در نتایج خواهد داشت به گونه ای که نسبت این دو ماتریس، معیاری برای نسبت تأثیر دینامیک یا مشاهدات در برآورد بردار مجهولات حالت است (گیس، ۲۰۱۱). زمانی که مدل سازی دینامیک و مشاهدات به شدت غیرخطی باشد، این روش به دلیل استفاده از مشتق مرتبه اول یا حداکثر مشتق مرتبه دوم، قادر به ارائه پاسخ همگرا و پایدار نیست و باید روشی مقاوم و پایدارتر به کار برده شود (یولیر و اولمان، ۲۰۰۴ و گیس، ۲۰۱۱).

۳-۲ فیلتر کالمن بی اثر

این فیلتر زمانی کاربرد دارد که معادلات، رفتاری به شدت غیرخطی از خود نشان دهند. مبنای این فیلتر استفاده از تبدیل بی اثر \cong است که در آن به جای تقریب تبدیل، ابتدا با نمونه برداری از توزیع مشاهدات و سپس انتقال آنها با تبدیل، توزیع مشاهدات را بر توزیع مجهولات می نگارد و توزیع مجهولات را بازسازی می کند (یولیر و اولمان، ۲۰۰۴).

۱-۳-۲ تبدیل بی اثر (Unscented Transform)

برآورد یک پارامتر را می توان به معرفی توزیع و پارامترهای توزیع آماری آن تعبیر کرد. به طور کلی مشخصات و شکل یک توزیع آماری را می توان با

معادلات به‌هنگام‌سازی بردار وضعیت سیستم و ماتریس واریانس-کوواریانس آن عبارت‌اند از (گیس، ۲۰۱۱):

$$\hat{x}_k^+ = \hat{x}_k^- + K_k \hat{e}_k^-, \quad (26)$$

$$P_k^+ = P_k^- + K_k P_k^{e_y e_y} K_k^T, \quad (27)$$

که در آنها e بردار باقیمانده مشاهدات (تفاضل مقدار برآوردشده از مقدار مشاهداتی) است. حال برای به‌دست-آوردن ماتریس بهره فیلتر، با اعمال شرط کالمن (کمینه-سازی اثر ماتریس خطای مدار) و یا به بیانی دیگر، با به‌کارگیری قضیه گاوس-مارکوف، بهره کالمن نیز به-صورت زیر تعریف خواهد شد (کراسیدیس و یونکینز، ۲۰۱۲):

$$K_k = P_k^{e_x e_y} (P_k^{e_y e_y})^{-1} \quad (28)$$

ماتریس‌های $P_k^{e_x e_y}$ و $P_k^{e_y e_y}$ که به ترتیب ماتریس‌های همبستگی (correlation) و همبستگی متقابل (cross correlation) هستند با توجه به ماهیت تبدیل بی‌اثر محاسبه می‌شوند و مقادیر تجربی را تولید می‌کنند. برای محاسبه این ماتریس‌ها، در قدم اول باید نقاط سیگما را تعریف و تولید کنیم که همان نقاط نمونه‌برداری از توزیع توأم مشاهدات هستند. در فیلتر کالمن بی‌اثر این نقاط با محاسبه امید ریاضی مجهولات و ستون‌های ماتریس P تشکیل می‌شوند؛ بنابراین اگر P ، ماتریسی با ابعاد $n \times n$ باشد، به ترتیب روابط زیر، به تعداد $2n$ نقطه سیگما تولید خواهد شد (یولیر و اولمان، ۲۰۰۴ و کراسیدیس و یونکینز، ۲۰۱۲):

$$\chi_k^{(0)} = \hat{x}_k, \quad (29)$$

$$\chi_k^{(2i-1)} = \hat{x}_k - \sqrt{(n+\lambda)p_i}, \quad (30)$$

خواص غیرخطی روابط موجود بین متغیرها ارائه کردند. در این روش به جای تقریب رابطه موجود بین دو فضا، توزیع متغیرها در فضای اول با A نقاط سیگما \cong نمونه-برداری و تقریب زده می‌شود سپس رابطه غیرخطی، نقاط نمونه‌برداری شده از فضای اول را به‌طور مستقیم به فضای دوم می‌برد و توزیع را در فضای مجهولات می‌نگارد. پس از آن با استفاده از نقاط تصویرشده، تابع توزیع مجهولات بازسازی و مجهولات برآورد می‌شوند. در این تبدیل خواص غیرخطی، رابطه بین دو فضا حفظ می‌شود و آن را به ایزاری توانمند برای انجام تبدیلات به‌شدت غیرخطی مبدل می‌سازد. تبدیل نام‌برده به A تبدیل بی‌اثر \cong موسوم است. نحوه انتخاب نقاط سیگما و تعیین چگونگی توزیع آنها در تابع توزیع مشاهدات، مسئله‌ای حائز اهمیت است که برای کاربرد تبدیل مذکور در فیلتر کالمن در ادامه به آن پرداخته می‌شود (یولیر و اولمان، ۲۰۰۴).

۲-۳-۲ فیلتر کالمن بی‌اثر (UKF)

با استفاده از منطق به‌کاررفته در تبدیل بی‌اثر و برای استفاده از خواص غیرخطی شدید در توابع تبدیل سیستم، می‌توان بدون خطی‌سازی توابع تبدیل و با حفظ خواص غیرخطی، تبدیلات را بر بردار وضعیت و ماتریس واریانس-کوواریانس آن اعمال کرد. اگر فرض شود در حالت کلی معادلات دینامیکی و مشاهدات حاکم بر سیستم به‌صورت زیر باشند (کراسیدیس و یونکینز، ۲۰۱۲):

$$x_{k+1} = f(x_k, w_k), \quad (24)$$

$$\tilde{y}_{k+1} = h(x_{k+1}, v_{k+1}). \quad (25)$$

از رابطه (۹) و با به‌کارستن قانون انتشار ماتریس واریانس-کوواریانس، به‌سادگی می‌توان دریافت که

$$\hat{\chi}_k^- = \sum_{i=0}^{2n} W_m^i \chi_k^i \quad (38)$$

$$P_k^- = \sum_{i=0}^{2n} W_c^i [\chi_k^i - \hat{\chi}_k^-][\chi_k^i - \hat{\chi}_k^-]^T \quad (39)$$

$$\hat{\gamma}_k^- = \sum_{i=0}^{2n} W_m^i \gamma_k^i \quad (40)$$

$$P_k^{e_y e_y} = \sum_{i=0}^{2n} W_c^i [\gamma_k^i - \hat{\gamma}_k^-][\gamma_k^i - \hat{\gamma}_k^-]^T \quad (41)$$

$$P_k^{e_x e_y} = \sum_{i=0}^{2n} W_c^i [\chi_k^i - \hat{\chi}_k^-][\gamma_k^i - \hat{\gamma}_k^-]^T \quad (42)$$

$$K_k = P_k^{e_x e_y} (P_k^{e_y e_y})^{-1} \quad (43)$$

حال به کمک ماتریس بهره محاسبه شده و مقادیر مدار و واریانس-کواریانس انتشار یافته و بهره گیری از روابط (۱۵) و (۱۶)، مقادیر انتشار یافته به هنگام می شود. در این روش تعیین پارامترهای نمونه برداری و تولید نقاط سیگما بسیار حائز اهمیت است و تأثیر بسزایی در دقت و پایداری نتایج روش دارد؛ لذا تعیین این پارامترها را می توان با دانش پیشین از توزیع احتمالاتی توابع تبدیل یا با سعی و خطا و بررسی معیار بهینگی انجام داد (یولیر و اولمان، ۲۰۰۴ و کراسیدیس و یونکینز، ۲۰۱۲).

۳ روش شتاب در بازیابی میدان گرانش

با دانستن مدار نسبی ماهواره‌ها، بازیابی میدان گرانش و برآورد ضرایب هماهنگ طول موج بلند و متوسط کروی برای کره زمین امکان پذیر خواهد بود. با توجه به سنجنده‌های متعدد ماهواره‌های GRACE، اعم از گیرنده GPS و فاصله یاب رادیویی بسیار دقیق (KBR) تعبیه شده روی این ماهواره‌ها می توان مدار نسبی ماهواره‌ها را برآورد و محاسبه کرد (رومل و همکاران، ۲۰۰۲). با مشخص بودن موقعیت هرچه دقیق تر ماهواره‌ها یا فاصله دقیق اندازه گیری شده با KBR و سپس با مشتق گیری عددی یا

$$\chi_k^{(2i)} = \hat{\chi}_k + \sqrt{(n + \lambda) p_i}, \quad (31)$$

که λ پارامتر مقیاس است که خود از دو پارامتر دیگر α (میزان پخش نقاط سیگما) و κ (درجه تأثیر گشتاورهای مراتب بالاتر توزیع احتمالاتی) تشکیل شده است. پس از آن لازم است وزن مناسب به نقاط سیگما اختصاص داده شود. این نقاط تحت تبدیل حاکم بر سیستم، بر فضای مجهولات (وضعیت) نگاشته می شوند (یولیر و اولمان، ۲۰۰۴؛ گیبس، ۲۰۱۱ و کراسیدیس و یونکینز، ۲۰۱۲):

$$\lambda = \alpha^2(n + \kappa) - n, \quad (32)$$

$$\chi_{k+1}^{(i)} = f(\chi_k^{(i)}), \quad (33)$$

$$\gamma_{k+1}^{(i)} = f(\gamma_k^{(i)}), \quad (34)$$

$$W_m^{(0)} = \frac{\lambda}{\lambda + n}, \quad (35)$$

$$W_c^{(0)} = \frac{\lambda}{\lambda + n} + (1 - \alpha^2 + \beta), \quad (36)$$

$$W_m^{(i)} = W_c^{(i)} = \frac{1}{2(\lambda + n)}; \quad i = 1, 2, 3, \dots, 2n \quad (37)$$

که W_c ، W_m و β به ترتیب وزن گشتاور اول (امید)، وزن گشتاور دوم (واریانس-کواریانس) نقاط سیگما و پارامتر آزاد تعیین کننده میزان تأثیر برآورد اولیه از توزیع وضعیت هستند. حال با روابطی که در ادامه بیان می شوند و میانگین گیری وزن دار از نقاط سیگمای تبدیل یافته، بردار وضعیت و ماتریس واریانس-کواریانس آن پیش بینی و ماتریس های همبستگی و همبستگی متقابل نیز محاسبه می-شوند تا در تولید ماتریس بهره کالمن و به هنگام سازی وضعیت و ماتریس واریانس-کواریانس آن (روابط (۲۶) و (۲۷)) به کار گرفته شوند (یولیر و اولمان، ۲۰۰۴ و کراسیدیس و یونکینز، ۲۰۱۲):

دستگاه مختصات کروی محلی انتقال داد. دستگاه مختصات LSCS، دستگاهی محلی است که محور دوم آن در راستای نصف النهار، محور سوم آن در راستای شعاع کره زمین و محور اول آن به گونه ایست که دستگاه راست گرد باشد. اگر J^N ماتریس تبدیل دستگاه مختصات LSCS به دستگاه مختصات اینرسیال باشد، می توان رابطه (۴۷) را به شکل زیر بازنویسی کرد (خادمی و همکاران، ۱۳۹۱ و شریفی، ۲۰۰۴):

$$\begin{aligned} (\vec{g}_2^I - \vec{g}_1^I) \cdot \vec{e}_{21} &= (J_2^{NI} \vec{g}_2^N) \cdot \vec{e}_{21} - & (48) \\ (J_1^{NI} \vec{g}_1^N) \cdot \vec{e}_{21} &= (J_2^{NI} \vec{e}_{21}) \cdot \vec{g}_2^N - (J_1^{NI} \vec{e}_{21}) \cdot \vec{g}_1^N = \\ & (J_2^{IN} \vec{e}_{21}) \cdot \vec{g}_2^N - (J_1^{IN} \vec{e}_{21}) \cdot \vec{g}_1^N, \end{aligned}$$

که \vec{g}^N شتاب گرانش وارد بر ماهواره در دستگاه مختصات LSCS است:

$$\vec{g}^N = \begin{bmatrix} -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \phi} \\ \frac{1}{r \cos \phi} \frac{\partial V}{\partial \lambda} \\ -\frac{\partial V}{\partial r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{GM}{r^2} \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^n \left(\frac{R}{r}\right)^n (\bar{c}_{nm} \cos m\lambda + \bar{s}_{nm} \sin m\lambda) \bar{P}_{nm}(\sin \phi) \\ \frac{GM}{r^2} \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^n m \left(\frac{R}{r}\right)^n (\bar{s}_{nm} \cos m\lambda - \bar{c}_{nm} \sin m\lambda) \frac{\bar{P}_{nm}(\sin \phi)}{\cos \phi} \\ \frac{GM}{r^2} \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^n (n+1) \left(\frac{R}{r}\right)^n (\bar{c}_{nm} \cos m\lambda + \bar{s}_{nm} \sin m\lambda) \bar{P}_{nm}(\sin \phi) \end{bmatrix} \quad (49)$$

θ و λ و r به ترتیب مؤلفه های مختصاتی در دستگاه مختصات کروی، m ، n و N به ترتیب مرتبه، درجه و بیشینه درجه مطلوب، \bar{P}_{nm} ، \bar{c}_{nm} و \bar{s}_{nm} به ترتیب توابع لژاندر وابسته و ضرایب هماهنگ سینوسی و کسینوسی نرمال شده و R شعاع متوسط کره زمین است.

همان طور که در روابط (۴۷)، (۴۸) و (۴۹) دیده می شود، با معلوم بودن بردار e_{21} و ماتریس های J^N ، معادلات مذکور یک دستگاه معادلات خطی را نسبت به مجهولات ضرایب ژئوتانسیل تشکیل می دهند که شامل $(N+1)^2$ مجهول است که در صورت وجود تعداد کافی مشاهده، این مجهولات با درجه آزادی مطلوبی قابل سرشکنی خواهند

بر آوردگرهای دینامیکی همچون فیلتر کالمن، سرعت و شتاب نسبی یا نرخ تغییرات فاصله بین ماهواره ها تا مراتب بالا تخمین زده می شود و این مدار نسبی در بازیابی میدان گرانش در این روش به کار گرفته خواهد شد (خادمی و همکاران، ۱۳۹۱ و شریفی، ۲۰۰۴).

اگر \vec{r}_1 و \vec{r}_2 بردارهای موقعیت ماهواره های GRACE در سیستم اینرسیال باشند، فاصله بین دو ماهواره (ρ) با رابطه زیر محاسبه می شود (خادمی و همکاران، ۱۳۹۱ و شریفی، ۲۰۰۴):

$$\rho = \langle (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \cdot (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \rangle^{\frac{1}{2}} = \langle \vec{r}_{21} \cdot \vec{r}_{21} \rangle^{\frac{1}{2}} \quad (44)$$

پس از مشتق گیری از این فاصله روابط زیر حاصل خواهند شد:

$$\dot{\rho} = \frac{\langle \dot{\vec{r}}_{21} \cdot \vec{r}_{21} \rangle}{\rho} \quad (45)$$

$$\ddot{\rho} = \frac{\langle \dot{\vec{r}}_{21} \cdot \dot{\vec{r}}_{21} \rangle + \langle \vec{r}_{21} \cdot \ddot{\vec{r}}_{21} \rangle - \left[\frac{\langle \dot{\vec{r}}_{21} \cdot \vec{r}_{21} \rangle^2}{\rho} \right]}{\rho} \quad (46)$$

از طرفی، برای مشتق دوم نیز به صورت معادل رابطه زیر را خواهیم داشت (خادمی و همکاران، ۱۳۹۱):

$$(\vec{g}_2^I - \vec{g}_1^I) \cdot \vec{e}_{21} = \ddot{\rho} - \frac{\langle \dot{\vec{r}}_{21} \cdot \vec{r}_{21} \rangle - \dot{\rho}^2}{\rho} - (\vec{a}_2^I - \vec{a}_1^I) \cdot \vec{e}_{21}, \quad (47)$$

که g_1^I و g_2^I بردارهای شتاب گرانشی وارد بر ماهواره ها، a_1^I و a_2^I بردارهای شتاب ناشی از نیروهای سطحی وارد بر ماهواره ها و e_{21} بردار یکه راستای خط واصل دو ماهواره ها در دستگاه مختصات اینرسیال هستند. همچنین می توان شتاب های موجود در دستگاه اینرسیال را با استفاده از ژاکوبین تبدیل، به دستگاه مختصات LSCS یا

تفاضل روی مدار دو ماهواره، مدار نسبی ماهواره‌ها، مشاهدات فاصله KBR و با مشتق‌گیری عددی نُه نقطه‌ای نیوتن، تغییرات فاصله KBR و مشتق دوم آن نسبت به زمان محاسبه شده است. پس از آن با در نظر گرفتن بردار وضعیت به صورت برداری نُه مؤلفه‌ای شامل موقعیت، سرعت و شتاب نسبی، مدار نسبی شبیه‌سازی شده با استفاده از فیلتر کالمن گسترش یافته فیلتر شده است.

دینامیک مفروض برای این مسئله مدلی خطی است و مشاهدات نیز به صورت مستقیم از مدار نسبی یا همان بردار وضعیت در نظر گرفته شده‌اند. پس از گسسته‌سازی دینامیک برای بازه زمانی $\Delta t = 30s$ داریم (صفری و همکاران، ۱۳۹۳):

$$\phi(\Delta t) = \begin{bmatrix} \frac{\Delta t^2}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \Delta t & 0 & 0 & 0 & \frac{\Delta t^2}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \Delta t & 0 & 0 & \frac{\Delta t^2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \Delta t & 0 & 0 & \frac{\Delta t^2}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \Delta t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \Delta t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \Delta t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (50)$$

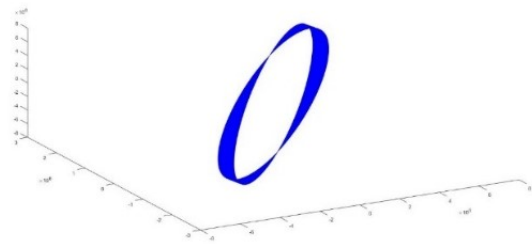
$$Q_d(\Delta t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{20}r\Delta t^5 & 0 & 0 & \frac{1}{8}r\Delta t^4 & 0 & 0 & \frac{1}{6}r\Delta t^3 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{20}r\Delta t^5 & 0 & 0 & \frac{1}{8}r\Delta t^4 & 0 & 0 & \frac{1}{6}r\Delta t^3 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{20}r\Delta t^5 & 0 & 0 & \frac{1}{8}r\Delta t^4 & 0 & 0 & \frac{1}{6}r\Delta t^3 \\ \frac{1}{8}r\Delta t^4 & 0 & 0 & \frac{1}{3}r\Delta t^3 & 0 & 0 & \frac{1}{2}r\Delta t^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{8}r\Delta t^4 & 0 & 0 & \frac{1}{3}r\Delta t^3 & 0 & 0 & \frac{1}{2}r\Delta t^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{8}r\Delta t^4 & 0 & 0 & \frac{1}{3}r\Delta t^3 & 0 & 0 & \frac{1}{2}r\Delta t^2 \\ \frac{1}{6}r\Delta t^3 & 0 & 0 & \frac{1}{2}r\Delta t^2 & 0 & 0 & r\Delta t & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6}r\Delta t^3 & 0 & 0 & \frac{1}{2}r\Delta t^2 & 0 & 0 & r\Delta t & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6}r\Delta t^3 & 0 & 0 & \frac{1}{2}r\Delta t^2 & 0 & 0 & r\Delta t \end{bmatrix} \quad (51)$$

در جهت ارزیابی اولیه کیفیت عملکرد این دو روش، مشاهده KBR برای EKF نیز با رابطه (۴۵) محاسبه و با مشاهدات شبیه‌سازی شده مقایسه شده است. شکل ۲ اختلاف مشاهدات شبیه‌سازی شده با دو روش گفته شده را با مشاهدات شبیه‌سازی شده نشان می‌دهد.

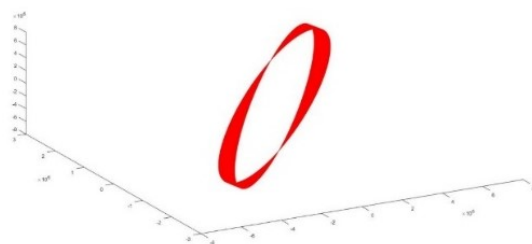
بود. این در حالی است که در فرایند بازیابی میدان گرانش، چهار ضریب درجه صفر و یک ژئوپتانسیل معلوم فرض شده است و بنابراین تعداد مجهولات به $4 - (N+1)$ کاهش می‌یابد (خادمی و همکاران، ۱۳۹۱ و شریفی، ۲۰۰۴).

۴ نتایج

در مرحله پیاده‌سازی داده‌های مفروض در این پژوهش، به صورت شبیه‌سازی بوده و مدار دینامیکی ماهواره‌های GRACE در مدل گرانشی EGM96 تا درجه و مرتبه ۷۰، با تفکیک زمانی ۳۰ ثانیه و به مدت ۳۰ روز است. همچنین به منظور اجرای الگوریتم تلفیق داده با UKF، مشاهدات KBR نیز از داده‌های مداری شبیه‌سازی و تولید شده‌اند. مدار انتشار یافته با انتگرال‌گیری عددی رونگه-کوتای مرتبه ۴ و ۵ برای ماهواره GRACE در شکل ۱ مشخص شده است.



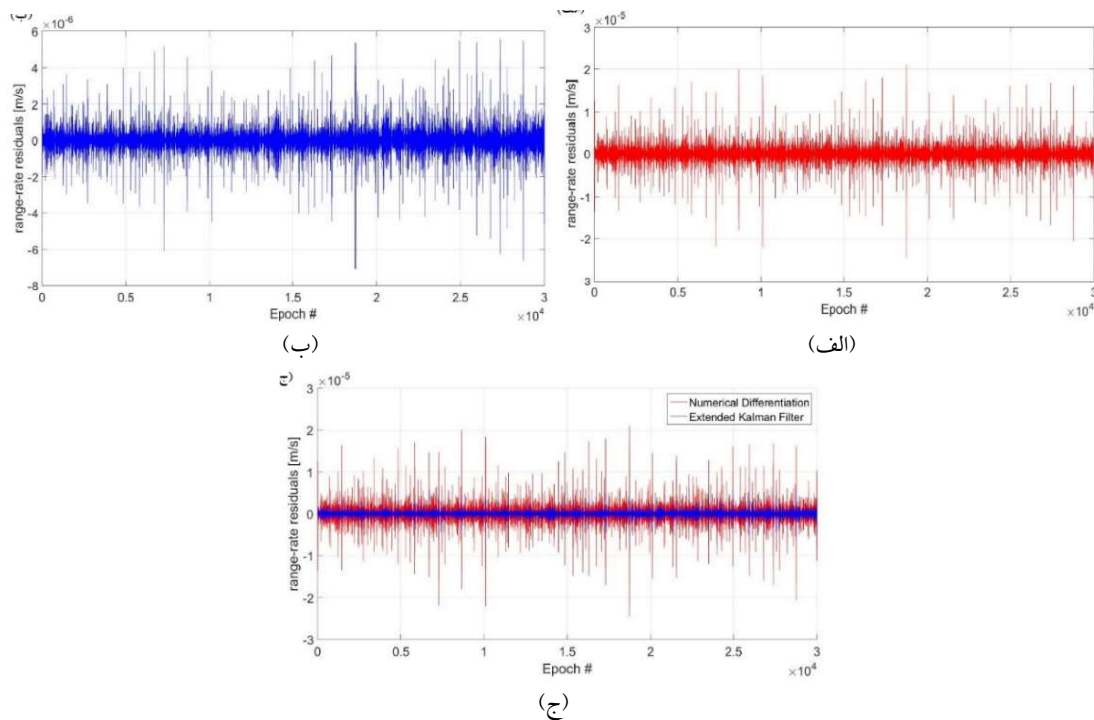
(الف)



(ب)

شکل ۱. مدار ماهواره‌های GRACE A و (ب) و GRACE B در دستگاه مختصات اینرسیال

برای تولید مدار نسبی ماهواره‌ها در جهت آماده‌سازی داده‌های ورودی مسئله بازیابی میدان گرانش، با اعمال



شکل ۲. اختلاف مشاهدات بازسازی شده با دو روش (الف) مشتق گیری عددی و (ب) EKF با مشاهدات شبیه سازی شده (ج) مقایسه باقیمانده دو روش

جدول ۱. مشخصات آماری مربوط به سه روش مشتق گیری عددی، EKF و UKF

آماره / روش پیشنهادی	مشتق گیری عددی نیوتن (متر)	فیلتر کالمن گسترش یافته (متر)	فیلتر کالمن بی اثر (متر)
میانگین	۰/۰۰۰۰۰۰۰۱۸۲۸۷۱۶۶۳	۰/۰۰۰۰۰۰۰۱۵۹۶۹۱۸۸	-۰/۰۰۰۰۰۰۰۰۳۴۴۰۲۴۵۴
کمینه	-۰/۰۰۰۰۲۴۵۰۸۷۹	-۰/۰۰۰۰۰۷۰۷۳۷۱	-۰/۰۰۰۰۰۶۶۸۸۶۷۸
بیشینه	۰/۰۰۰۰۲۰۹۳۱۱۴۲	۰/۰۰۰۰۰۵۵۹۴۲۲۸	۰/۰۰۰۰۰۵۱۸۷۵۹
انحراف معیار	۰/۰۰۰۰۰۱۹۱۰۷۵	۰/۰۰۰۰۰۰۷۴۶۳۱۲	۰/۰۰۰۰۰۵۲۶۳۵۷

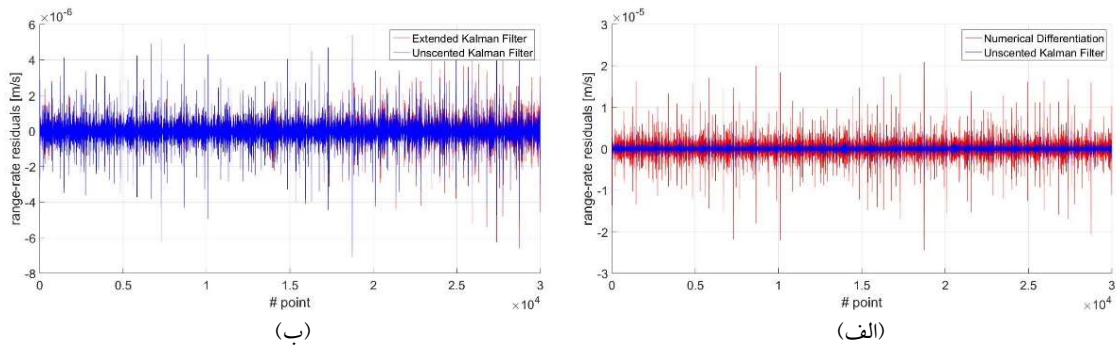
که H_1 مشاهدات GPS و H_2 مشاهده KBR است و رابطه ای غیرخطی با مؤلفه های بردار مدار دارد. پارامترهای بهینه انتخابی α ، β و κ به ترتیب برابر ۱، ۰ و ۲ در نظر گرفته شده و با آزمون و خطا به دست آمده اند. برای اعتبارسنجی این روش، اختلاف مشاهده بازسازی شده از این روش و مشاهدات شبیه سازی شده در شکل ۳ بررسی شده است.

برای مقایسه کمی و دقیق تر، آماره های میانگین، کمینه، بیشینه و انحراف معیار اختلاف برای هر سه روش در جدول ۱ تنظیم شده است.

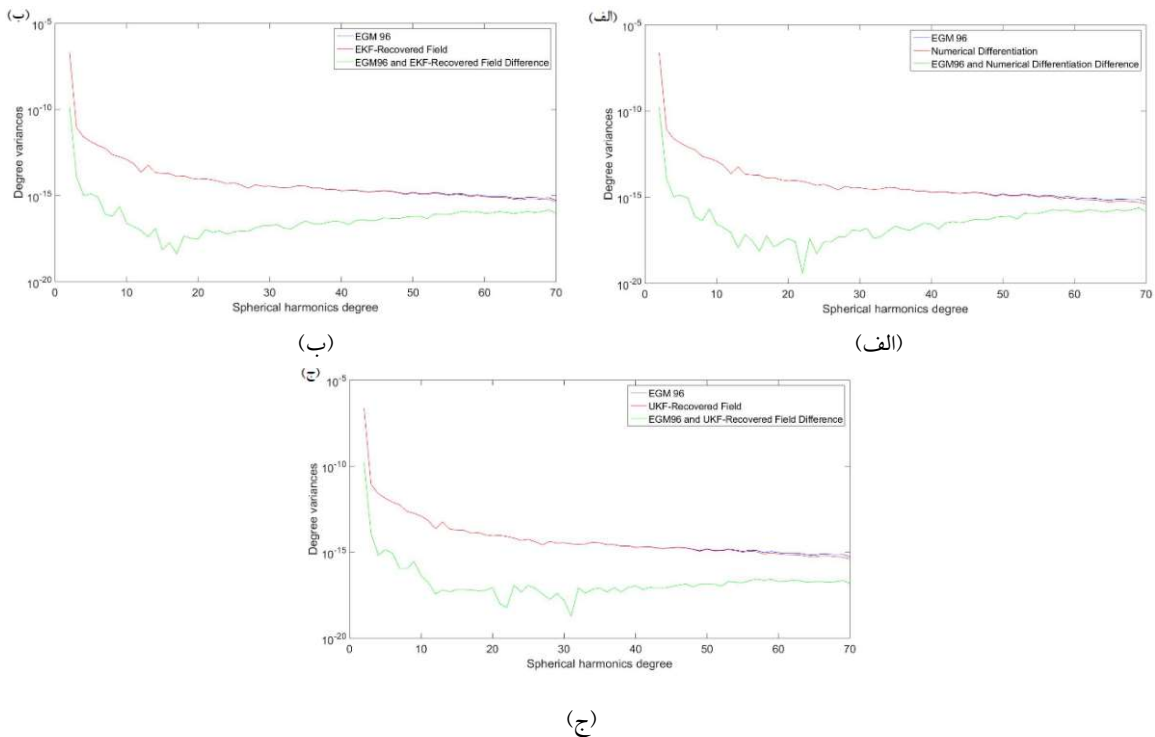
پس از آن با UKF مشاهدات شبیه سازی شده و مدار نسبی و همچنین دینامیک مناسب و تبدیلات دینامیکی مشابه EKF، دو نوع مشاهده تلفیق شدند که در این فرایند مدل مشاهدات برای تلفیق به صورت زیر است:

$$H_1 = \Delta r^0 = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\Delta r} \\ \ddot{\Delta r} \\ \Delta r \end{bmatrix} + v_{r1}, \quad (52)$$

$$H_2 = \frac{\langle \ddot{\Delta r}, \ddot{\Delta r} \rangle}{|\ddot{\Delta r}|} + v_{r2}, \quad (53)$$



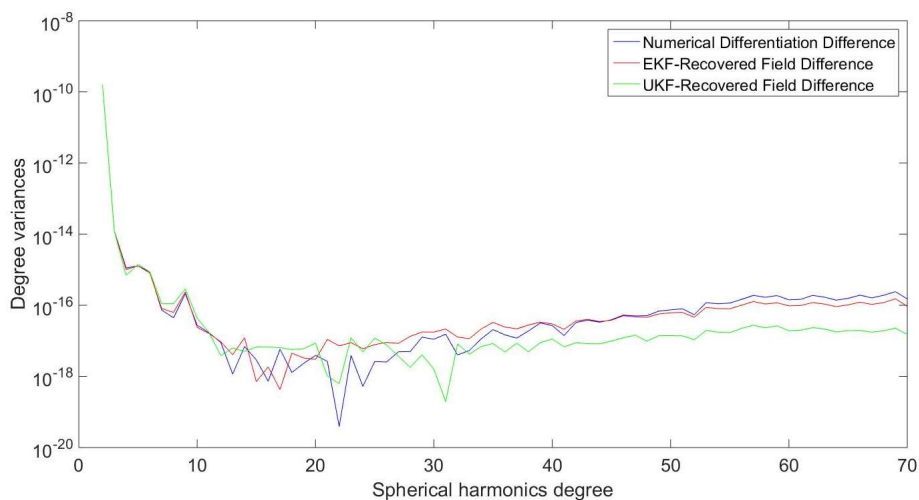
شکل ۳. (الف) اختلاف مشاهدات بازسازی شده با روش های مشتق گیری عددی و UKF با مشاهدات شبیه سازی شده (ب) اختلاف مشاهدات بازسازی شده با روش های EKF و UKF با مشاهدات شبیه سازی شده



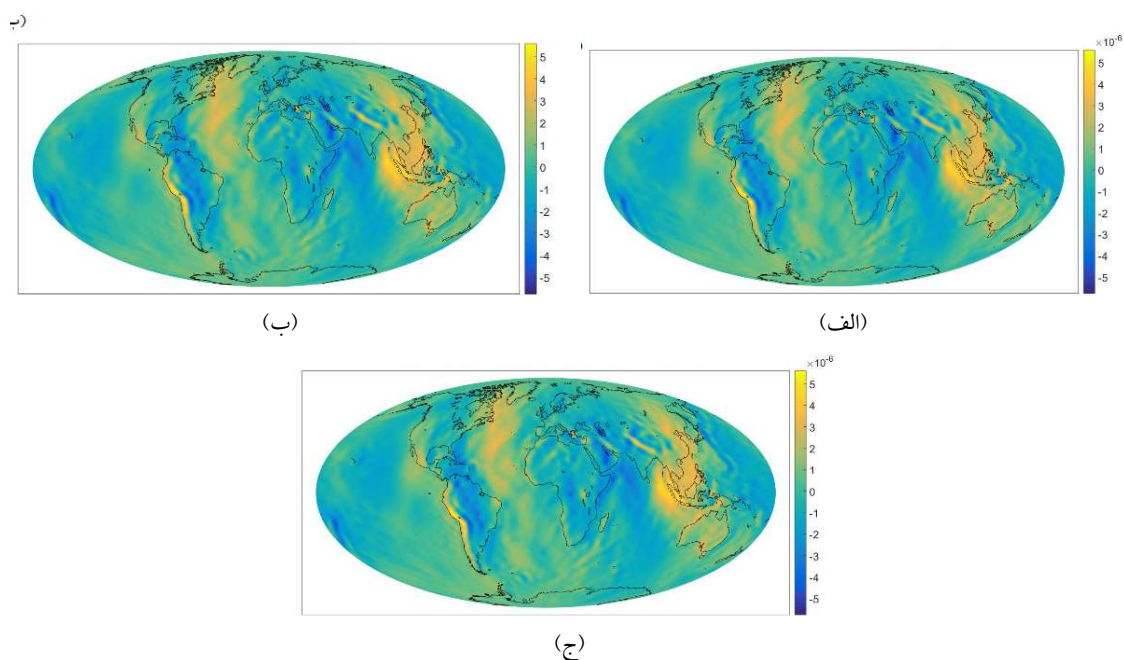
شکل ۴. نمودار مقایسه توان طیفی (واریانس درجه) میدان مرجع EGM96 با میدان بازیابی شده با سه روش (الف) مشتق گیری عددی (ب) EKF و (ج) UKF

دست آمده و مشاهدات بازسازی شده از هر سه روش، میدان گرانش زمین با به کارگیری روش شتاب برآورد شده است. خروجی بازیابی شتاب در هر مرحله همان ضرایب ژئوپتانسیل است که در جهت برآورد دقت بازیابی توان طیفی - که در سری همبستگی های کروی، معادل واریانس درجه (Degree-Variance) است - از ۲ تا ۷۰ درجه همبستگی کروی از رابطه (۵۴) محاسبه و با نظیر

با مقایسه آماره های مشخص شده می توان به روشنی مشاهده کرد که روش EKF نسبت به مشتق گیری عددی و روش UKF نسبت به روش EKF انحراف معیار کمتر و در نتیجه کارایی و دقت بیشتری دارد. هدف نهایی این پژوهش مقایسه نتایج بازیابی میدان گرانش با روش شتاب با استفاده از مدار نسبی به دست آمده از روش های پیشنهادی بود؛ بنابراین با استفاده از مدارهای نسبی به-



شکل ۵. مقایسه اختلاف توان طیفی به دست آمده از سه روش مشتق گیری عددی، EKF و UKF با مدل مرجع EGM96



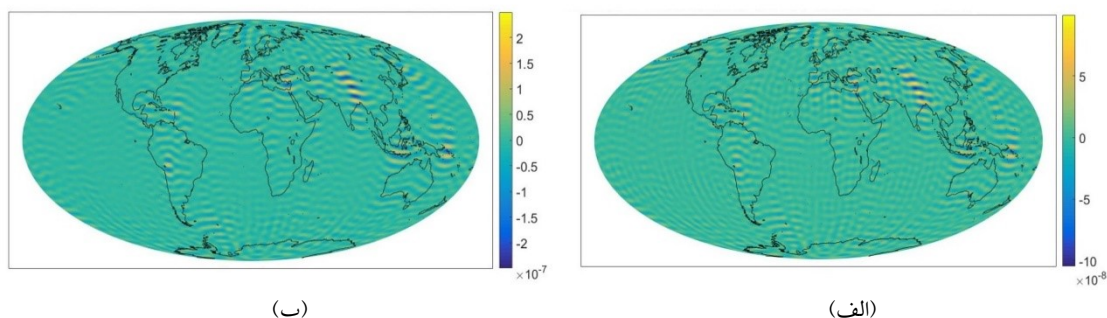
شکل ۶. نمودار اختلاف ارتفاع ژئوئید محاسبه شده برای میدان مرجع EGM96 نسبت به ارتفاع ژئوئید محاسبه شده برای میدان بازیابی شده از محصولات (الف) مشتق گیری عددی (ب) EKF (ج) UKF

حالی که در باقیمانده KBR، بهبود چشمگیری در انحراف معیار باقیمانده‌ها با این روش حاصل شده بود. از طرفی، می‌توان دید که اختلاف توان طیفی برای روش UKF در حالت کلی کمتر و در نتیجه مطلوب‌تر از دو روش پیشنهادی دیگر است.

مدل EGM96 مقایسه شده است (شکل ۴):

$$DV(n) = \sum_{m=0}^n A_{nm}^2 + B_{nm}^2 \quad (54)$$

همان طور که در شکل ۴ مشاهده می‌شود، مدل روش EKF نسبت به روش مشتق گیری عددی با اندکی اختلاف، بازیابی میدان گرانش را بهبود بخشیده است در-



شکل ۷. اختلاف ژئوئید محاسباتی با روش EKF (راست) و UKF (چپ) نسبت به ژئوئید محاسباتی با روش مشتق‌گیری عددی

شده با روش‌های EKF و UKF نسبت به روش مشتق-گیری عددی در شکل ۷ نشان داده شده است. با توجه به دامنه تغییرات در شکل ۸ می‌توان نتیجه گرفت که اختلاف در بازیابی میدان از منظر ارتفاع ژئوئید برای روش UKF نسبت به مشتق‌گیری عددی که ضعیف-ترین عملکرد را در بازسازی KBR داشته است، در مقایسه با اختلاف روش‌های EKF و مشتق‌گیری عددی به‌طور کلی چیزی در حدود پنج تا ده برابر بهتر است و این خود دلیلی دیگر بر برتری روش UKF بر سایر روش‌های پیشنهادی است.

۵ نتیجه‌گیری

در بازیابی میدان گرانش به روش شتاب، مدار نسبی خوشه ماهواره‌ها باید مشخص شود. دقت زیاد در برآورد مدار نسبی، به دقت زیاد در بازیابی ضرایب منجر می‌شود. امروزه با گیرنده‌های سامانه موقعیت‌یاب جهانی، امکان ردیابی و تعیین موقعیت ماهواره‌های مدار پایین فراهم آمده است. در پژوهش کنونی، در ابتدا با داده‌های موقعیت، توانایی دو روش مشتق‌گیری عددی و فیلتر کالمن گسترش‌یافته در برآورد مدار نسبی ارزیابی شد. برای این منظور، نرخ تغییرات فاصله بین ماهواره‌ای $\dot{\rho}$ از مدارهای برآوردشده بازسازی شد و با مشاهدات KBR شبیه‌سازی شده ارزیابی شد. با توجه به نتایج، روش EKF

با ملاحظه در شکل ۵ می‌توان دید اختلاف توان واریانس درجه برای UKF در هماهنگی‌های با طول موج متوسط (درجه بیشتر از ۳۰) تقریباً ده برابر کوچک‌تر از هر دو روش پیشنهادی دیگر است و سازگاری این نتیجه با نتایج ذکرشده برای KBR، نشان از برتری و کارایی چشمگیر این روش در بازیابی میدان گرانش تا درجات بالا نسبت به دو روش دیگر دارد.

برای مقایسه بهتر، با داشتن ضرایب بازیابی شده و ضرایب میدان مرجع EGM96، اختلاف ارتفاع ژئوئید را با تفاضل ضرایب متناظر برای تصویری با توان تفکیکی ۰/۵ درجه ترسیم و با فیلتر پایین‌گذر گاوسی نرم می‌شود تا مقایسه بازیابی از منظری دیگر نیز انجام شود. نتایج ترسیم اختلاف ارتفاع‌های ژئوئیدی در شکل ۶ مشخص شده است.

از شکل ۶ می‌توان نتیجه گرفت در حالت کلی اختلاف میدان گرانش به‌دست آمده از این سه روش نسبت به میدان مرجع EGM96، از منظر ارتفاع ژئوئیدی تا درجه ۷۰ از مراتب میکرومتر است و دامنه تغییراتی به اندازه ۱۰ میکرومتر دارد و از آنجاکه در تصاویر، اختلاف بزرگی به‌نظر نمی‌رسد، می‌توان دریافت که در هر سه روش، مقادیر نسبت به دامنه تغییرات بسیار نزدیک هستند؛ از این-رو برای بررسی و تحلیل دقیق‌تر کیفیت میدان بازیابی شده با محصولات سه روش نامبرده، اختلاف ژئوئید محاسبه-

خادمی، م.، نجفی علمداری، م. و شریفی، م. ع.، ۱۳۹۱، تأثیر روش‌های مختلف مشتق‌گیری عددی در بازیابی میدان جاذبه به روش انتگرال انرژی، مجله فیزیک زمین و فضا، ۳۸(۴)، ۸۹-۱۰۳.

صفری، ع. ر.، شریفی، م. ع.، فرزانه، س.، ۱۳۹۳، تعیین سرعت سینماتیک ماهواره‌های مدار پایین با استفاده از فیلتر کالمن تعمیم‌یافته؛ بررسی موردی: زوج ماهواره GRACE: مجله فیزیک زمین و فضا، ۴۰(۴)، ۶۷-۸۲.

- Bagherbandi, M., Sjöberg, L.E., Tenzer, R., and Abrehdari, M., 2015, A new Fennoscandian crustal thickness model based on CRUST1.0 and a gravimetric-isostatic approach: *Earth-Science Reviews*, **145**, 132-145.
- Crassidis, J.L., and Junkins, J.L., 2012, *Optimal estimation for dynamic systems*: Taylor and Francis, USA.
- Gerlach, C., Sneeuw, N., Visser, P., and Svehla, D., 2003, CHAMP gravity field recovery using the energy balance approach, *First CHAMP Mission Results for Gravity: Magnetic and Atmospheric Studies*, 134-139.
- Gibbs, B.P., *Advanced Kalman filtering, Least squares and modelling*, 2011: Wiley, USA.
- Heiskanen, W.A., and Moritz, H., 1984, *Physical Geodesy*: Institute of Physical Geodesy, Technical University Graz, Austria.
- Julier, S.J., 2002, The scaled unscented transform: *Proceedings of the 2002, IEEE*.
- Julier, S.J., and Uhlmann, J.K., 2004, Unscented filtering and nonlinear estimation: *Proceedings of the IEEE*, 92(3), 401-422.
- Kalman, R.E., 1960, A new approach to linear filtering and prediction problems: *Journal of basic engineering*, 82, 35-45.
- Reubelt, T., Sneeuw, N., Iranpoor, S., et al., 2013, *Future Gravity Field Satellite Missions, Observation of the System Earth from Space - CHAMP, GRACE, GOCE and future missions: Advanced Technologies in Earth Sciences*, 165-203.
- Rummel, R., Balmino, G., Johannessen, J., Visser, P., and Woodworth, P., 2002, Dedicated gravity field missions- principles and aims: *Journal of Geodynamics*, **33**(1-2), 3-20.

با انحراف معیار کمتر، به‌عنوان روش برتر انتخاب شد. همچنین به‌منظور تلفیق مشاهدات موقعیت GNSS و KBR از روش UKF استفاده شد و با مقایسه نتایج این الگوریتم با KBR شبیه‌سازی‌شده، صحت و کارایی این روش با توجه به نتایج موجود در جدول ۱ تصدیق شد. درنهایت، با مقایسه هر سه روش نیز روش UKF روش انتخابی در برآورد مدار نسی بهینه ماهواره‌ها معرفی می‌شود. به‌منظور ارزیابی دوباره و دقیق‌تر و بررسی کارایی عملی نتایج، با استفاده از مدارهای برآوردشده و روش شتاب، میدان گرانش EGM96 بازیابی شد. با تأمل در نمودارهای رسم-شده می‌توان کارایی عملی روش UKF را در ارائه ورودی‌های بسیار قابل اعتماد و اتکا برای بازیابی میدان گرانش دید و به‌صورت خاص بهبود تقریباً ده برابری را در بازیابی هماهنگ‌های با درجات بالاتر از ۳۰ دریافت. همچنین با توجه به دامنه تغییرات اختلاف ارتفاع ژئوئیدی در شکل ۷ می‌توان نتیجه گرفت اگرچه در برآورد مدار، EKF در مقایسه با مشتق‌گیری عددی، روشی برتر و در مقایسه با UKF روشی ناتوان‌تر قلمداد شده است، در بازیابی میدان گرانش، روش UKF نسبت به روش EKF با اختلاف قابل توجهی به‌عنوان روشی کارا و برتر ارزیابی شده است. پیشنهاد می‌شود در پژوهش‌های آتی، نوفه‌های مرتبط با داده‌ها به واقعیت نزدیک‌تر شود و عملکرد روش‌های پیشنهادی در هنگام وجود نوفه‌های پیچیده آزمایش و بررسی شود.

منابع

خادمی، م.، نجفی علمداری، م. و شریفی، م. ع.، ۱۳۸۹، تأثیر روش‌های مختلف مشتق‌گیری عددی در بازیابی میدان جاذبه به روش شتاب: اولین همایش ملی سازه، زلزله، ژئوتکنیک، بابلسر، مازندران، ایران.

- Voss, K.A., Famiglietti, J.S., MinHoi L., Linage C., Rodell, M., and Swenson, S.C., 2013, Groundwater depletion in the Middle East from GRACE with implications for transboundary water management in the Tigris-Euphrates-Western Iran region: *Water Resources Research*, **49**(2), 904-914.
- Sharifi, M.A., 2004, Satellite gradiometry using a satellite pair: Diploma thesis, University of Stuttgart, Stuttgart, Germany.
- Sharifi, M.A., 2006, Satellite to satellite tracking in the space-wise approach, Ph.D. thesis, University of Stuttgart, Stuttgart, Germany.

GRACE satellite pairs and GNSS range observations fusion using unscented Kalman filter (Case study: recovery of simulated gravitational field)

Mohammad Ali Sharifi^{1*}, Saeed Farzaneh², and Ali Amootaghi³

¹Associate Professor, Faculty of Engineering, University of Tehran, Iran

²Assistant Professor, Faculty of Engineering, University of Tehran, Iran

³M. Sc. of Geodesy, Faculty of Engineering, University of Tehran, Iran

(Received: 03 November 2018, Accepted: 24 April 2019)

Summary

Earth gravitational field interacts closely with a variety of natural phenomena. Therefore, studying and modeling the gravitational field and keeping tracks of its changes over time can make a huge contribution to the related geophysical and environmental researches. A well-proven method which is used in dynamic estimation of time varying state parameters is "Kalman filter". Kalman filter exploits dynamical properties of the states and noisy measurements to estimate the optimal state for every time epoch, in its filtering scheme. Smoothed properties of the involved dynamics, the accuracy of the noisy measurements, pay for noises in measurements and incompleteness of the interchangeable dynamics provide optimal estimates of state for the dynamic system. "Standard Kalman Filter" is performed to acquire the optimal solution when dealing with linear dynamics with white noises in both dynamics and measurements while a non-linear system cannot be dealt with in the same way. Various versions of Kalman filter have been introduced so far, including Extended Kalman Filter (EKF) and Unscented Kalman Filter (UKF). The former uses linearization to derive locally-linear dynamics while the latter is the approximation of the probability distribution of the states using sampling points of the state vector which are commonly referred to as "sigma points". Due to the linearization involved in EKF, the method does not give precise solutions when there are non-linearities of high orders while UKF solution is significantly better in the sense of precision, accuracy and optimality. In this paper, the 9-points Newton numerical differentiation is applied on the range values calculated from the relative state vector to reconstruct the so-called KBR range-rate observations and EKF is performed along with positions of observations to give an optimal estimate of the state vector at each time epoch. The calculated range-rates from both methods are then compared statistically. Then, UKF is used to fuse position and range-rate observations and to estimate state vector. Finally, the residuals of the reconstructed range-rate observations of three methods are compared statistically. The results show a relatively significant improvement in KBR observations reconstructions for UKF estimated states. To re-evaluate the superiority of UKF from the practicality point of view, the reconstructed range-rates are used to estimate the harmonics coefficients of geopotential model in a field recovery problem using "acceleration method" in a closed-loop simulation for EGM96. The degree-variances and differences in geoid heights are calculated and plotted. The results show a near 5 to 10-times fold improvement in gravitational field recovery using UKF results compared to the other two mentioned methods.

Keywords: EKF, gravitational field, numerical differentiation, UKF, GRACE satellites

*Corresponding author: