خطای برش انتگرال پواسون برای انتقال فروسوی بی‌هنجاری‌های گرانشی باقیمانده

مهدی گلی[۱*]

[۱] استادیار، دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود، ایران

(تاریخ دریافت: ۱۳۹۷/۰۹/۲۸، تاریخ پذیرش: ۱۳۹۸/۰۲/۱۷)

چکیده

تلفیق مدل‌های زمین‌پتانسیل ماهواره‌ای با داده‌های گرانی زمینی، روشی مرسوم و دقیق برای مدل‌سازی میدان گرانش زمین و تعیین زمین‌وار است. بعد از حذف اثر طول‌موج‌های بلند میدان از مدل ماهواره‌ای و توپوگرافی، اغلب از انتگرال پواسون برای انتقال فروسوی داده‌های باقیمانده استفاده می‌شود. این مطالعه به بررسی خطای برش این انتگرال برای داده‌های گرانشی باقیمانده می‌پردازد. کرنل انتگرال پواسون در حالت اصلی در فواصل کوتاه به‌سرعت میرا می‌شود به‌طوری‌که اصلاح آن تغییری در نتایج ایجاد نمی‌کند، اما کرنل اسفروئیدی انتگرال پواسون (طول‌موج‌های کوتاه انتگرال پواسون) خطای برش زیادی دارد. در این پژوهش ضرایب برش برای تعیین خطای برش کرنل اصلی، کرنل اسفروئیدی و کرنل اسفروئیدی اصلاح‌شده به روش مالدنسکی محاسبه شد. این ضرایب نشان می‌دهند خطای برش برای کرنل اصلی و مالدنسکی تقریباً یکسان و کوچک هستند، اما ضرایب برش کرنل اسفروئیدی بزرگ هستند به‌طوری‌که مقدار خطای برش برای شعاع انتگرال‌گیری یک درجه، به چندین میلی‌گال هم می‌رسد. ازآنجاکه محاسبه این مقادیر با دقت کافی امکان‌پذیر نیست، نتایج فروسو مطلوب نخواهد بود. کرنل اسفروئیدی پواسون وابسته به ارتفاع است و محاسبه ضرایب مالدنسکی زمان‌بر است. در این مطالعه روشی سریع با استفاده از تعامد هارمونیک‌های کروی بر مبنای کرنل کامل توسعه داده شد. نتایج شبیه‌سازی نشان می‌دهد که نتایج روش توسعه‌داده‌شده با اصلاح کرنل به روش مالدنسکی یکسان است و شعاع بهینه برای انتگرال پواسون در منطقه ایران ۰/۵ درجه است.

واژه‌های کلیدی: خطای برش، بی‌هنجاری گرانشی باقیمانده، انتقال فروسو، انتگرال پواسون

* نگارنده رابط: Goli@shahroodut.ac.ir

۱ مقدمه

مدل‌های زمین‌پتانسیل ماهواره‌ای می‌توانند طول‌موج‌های متوسط و بلند میدان را با دقت زیادی بازیابی کنند. پس از مأموریت‌های فضایی گریس و گاوس، طول‌موج‌های تا ۱۰۰ کیلومتر زمین‌وار (ژئوئید) با دقت یک سانتیمتر در دسترس هستند (پیل و همکاران، ۲۰۱۱)، اما این مدل‌ها از مدل‌سازی عوارض محلی میدان، که اغلب ناشی از توپوگرافی است، ناتوان هستند. ازاین‌رو روش مناسب برای تعیین میدان ثقل، ترکیب داده‌های زمینی با مدل‌های زمین‌پتانسیل ماهواره‌ای است. از نظر پراکندگی و دقت، داده‌های ماهواره‌ای نسبت به داده‌های زمینی، طول‌موج‌های متوسط و بلند میدان ثقل را با دقت بیشتری تعیین می‌کنند؛ لذا اغلب روش‌های گرانشی مختلف تعیین میدان ثقل، از روش حذف- بازگشت استفاده می‌کنند (شوبرگ، ۲۰۰۵).

در روش حذف-بازگشت، ابتدا سهم طول‌موج‌های بلند با مدل‌های زمین‌پتانسیل ماهواره‌ای محاسبه و از داده‌های گرانی حذف می‌شود. همچنین برای ایجاد فضای هارمونیک، اثر گرانشی توپوگرافی از داده‌ها کم می‌شود و به‌این‌ترتیب داده‌های باقیمانده به‌دست‌می‌آیند. با حذف اثر توپوگرافی و ایجاد فضای هارمونیک، شرایط برای انتقال هارمونیک داده‌های باقیمانده از ارتفاع اندازه‌گیری به سطح زمین‌وار/بیضوی برای حل مسئله مقدار مرزی ژئودتیکی مهیا می‌شود. درنهایت، پس از حل مسئله مقدار مرزی ژئودتیکی و تعیین طول‌موج‌های کوتاه زمین‌وار، اثر توپوگرافی و اسفروئید (زمین‌وار حاصل از مدل ماهواره‌ای) به آن افزوده می‌شود. این روش کم‌وبیش در اغلب روش‌های تعیین زمین‌وار و بی‌هنجاری ارتفاعی استفاده می‌شود؛ برای مثال در تعیین زمین‌وار به روش استوکس-هلمرت (ونیچک و همکاران، ۱۹۹۹؛ المن و ونیچک، ۲۰۰۵ و یاناک و همکاران، ۲۰۱۷)، تعیین زمین‌وار به روش تک‌مرحله‌ای (اردلان، ۱۹۹۹؛ اردلان و گرافارند، ۲۰۰۴؛ صفری و همکاران، ۲۰۰۵ و اردلان و کریمی، ۲۰۱۳)، روش کالوکیشن کمترین مربعات (Least Squares Collocation) (فورسبرگ و شرنینگ، ۲۰۰۸) و تعیین بی‌هنجاری ارتفاعی به روش توابع پایه شعاعی (سعادت و همکاران، ۲۰۱۷) از نظریه حذف- بازگشت استفاده می‌شود.

یکی از مراحل لازم و مهم محاسباتی در تعیین زمین‌وار در روش‌های دو مرحله‌ای نظیر استوکس- هلمرت (ونیچک و همکاران، ۲۰۱۷) و روش تک- مرحله‌ای (نواک، ۲۰۰۳ و اردلان و گرافارند، ۲۰۰۴)، انتقال داده‌های گرانشی (انتقال فروسو) است. مرحله اول در روش دو مرحله‌ای تعیین زمین‌وار، انتقال فروسو و مرحله دوم حل انتگرال هوتین/استوکس است. در تعیین زمین‌وار با یک مرحله انتگرال‌گیری نیز هر دو مرحله مذکور در یک انتگرال ترکیب می‌شوند (نواک، ۲۰۰۳).

انتگرال پواسون روشی مرسوم برای انتقال فروسو در تعیین زمین‌وار است. از دیدگاه نظری، دامنه این انتگرال تمام سطح زمین است، اما درعمل، به‌دلیل محدودیت دسترسی به داده و محاسبات، انتگرال‌گیری تا شعاع مشخصی محدود می‌شود. خطای مربوط به قطع انتگرال در یک شعاع محدود را خطای برش یا اثر مناطق دور می‌نامند (ونیچک و همکاران، ۱۹۹۶). انتخاب شعاع مناسب انتگرال‌گیری بستگی به رفتار خطای برش انتگرال دارد. هرچه شعاع انتگرال‌گیری کوچک‌تر باشد، به داده‌های اطراف و حجم محاسباتی کمتری نیاز است. شعاع بهینه انتگرال‌گیری، کوچک‌ترین شعاع انتگرال‌گیری است که بتوان خطای برش آن را با دقت کافی برآورد کرد. ازآنجاکه کرنل این انتگرال در فواصل نزدیک به‌سرعت میرا می‌شود، تاکنون مطالعات کمی برای محاسبه اثر خطای برش (اثر مناطق دور) انجام شده است. هیوانگ (۲۰۰۲) نشان داد که اصلاح کرنل انتگرال به روش مالدنسکی (مالدنسکی و همکاران، ۱۹۶۲) تأثیری در

بهبود نتایج ندارد. البته محاسبات وی برای بی‌هنجاری‌های کامل (بدون کم کردن اثر طول‌موج‌های بلند میدان) انجام شد. در مطالعه هیوانگ و همکاران (۲۰۰۲) اصلاح کرنل به دو روش مالدنسکی و وُنگ-گور (۱۹۶۹) نشان داد که اصلاح کرنل به روش ونگ-گور خطای برش زیادی دارد. در آن مطالعه شعاع بهینه برای انتگرال پواسون برای توپوگرافی با ارتفاع حداکثر ۲۰۰۰ متر، ۳۰ دقیقه کمانی برآورد شد.

مطالعه هیوانگ (۲۰۰۲) براساس انتقال فرسوی داده‌های گرانی کامل (بدون کم کردن اثر طول‌موج‌های بلند میدان) است، اما در پژوهش‌های متعددی برای داده‌های باقیمانده و حتی روش تک مرحله‌ای نیز از نتایج این مطالعه استفاده شده است؛ برای مثال در مطالعات اردلان و گرافارند (۲۰۰۴)، آلبرت و کلس (۲۰۰۴) و اردلان و کریمی (۲۰۱۳)، برای انتقال فروسوی داده‌های باقیمانده با انتگرال اسفروئیدی پواسون و حتی روش تک‌مرحله‌ای، از خطای برش و اصلاح کرنل صرف‌نظر شده است. ازآنجاکه رفتار کرنل کامل پواسون و کرنل اسفروئیدی آن در طول‌موج‌های بلند متفاوت است، انتظار می‌رود رفتار خطای برش آنها نیز متفاوت باشد؛ ازاین‌رو نتایج کرنل کامل پواسون قابل تعمیم به کرنل اسفروئیدی آن نیست.

هدف از انجام این مطالعه برآورد خطای برش انتقال فروسوی داده‌های گرانی باقیمانده با کرنل اسفروئیدی پواسون است. در این راستا خطای برش انتگرال با کرنل اسفروئیدی بررسی و براساس خطای برش، برای اصلاح کرنل نیز تصمیم‌گیری می‌شود. درانتها، روشی سریع برحسب کرنل کامل بدون استفاده از اصلاح کرنل پیشنهاد و کارایی روش پیشنهادی با داده‌های شبیه‌سازی‌شده از مدل زمین‌پتانسیل بررسی می‌شود.

۲ انتقال فروسو با انتگرال پواسون

در تقریب کروی، بی‌هنجاری‌های سطح زمین از بی‌هنجاری‌های روی زمین‌وار با حل معادله مقدار مرزی دیریشله (انتگرال پواسون) به‌دست‌می‌آیند (هافمن و موریتز، ۲۰۰۶):

$$\Delta g(r,\Omega)=\frac{1}{4\pi}\int_\sigma \Delta g(R,\Omega')K(\xi,\psi)\,\mathrm{d}\Omega', \qquad (۱)$$

که $\Delta g(r,\Omega)$ بی‌هنجاری گرانشی زمینی، $\Delta g(R,\Omega')$ بی‌هنجاری گرانشی روی زمین‌وار، $r=R+H$ شعاع زمین‌مرکزی (ژئوسنتریک) و $\Omega=(\theta,\lambda)$ موقعیت مسطحاتی نقطه است. θ، λ و H به‌ترتیب متمم عرض کروی، طول کروی و ارتفاع هستند. $\xi=\frac{R}{r}<1$ کمیت بی‌بعد، R شعاع متوسط زمین‌وار و ψ طول کروی بین نقطه محاسبه و نقطه انتگرال‌گیری است. $K(\xi,\psi)$ کرنل انتگرال پواسون است (همان مرجع):

$$K(\xi,\psi)=\frac{\xi-\xi^3}{L^3(\xi,\psi)}, \qquad (۲)$$

که $L=\sqrt{1+\xi^2-2\xi\cos\psi}$ تابع فاصله است. شکل طیفی این کرنل برابر است با (همان مرجع):

$$K(\xi,\psi)=\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)\xi^{n+2}P_n(\cos t). \qquad (۳)$$

برای محاسبه بی‌هنجاری‌های گرانشی در سطح زمین‌وار، انتگرال رابطه (۱) باید به‌طور معکوس حل شود. دامنه انتگرال‌گیری در این انتگرال تمام سطح زمین است، اما درعمل باید به یک شعاع انتگرال‌گیری مثلاً ψ_0 محدود شود. محدود کردن انتگرال به شعاع ψ_0 منجر به معرفی خطای برش در این معادله انتگرالی خواهد شد. در حالت گسسته، این معادله انتگرالی تبدیل به دستگاه معادلات خطی زیر می‌شود:

$$\Delta g(r_i,\Omega_i) = \frac{1}{4\pi}\sum_{j=1}^{N}\Delta g\big(R,\Omega_j\big)K\big(\xi_i,\psi_{ij}\big)\cos\theta_j\,\Delta\theta\Delta\lambda + \Delta g_i^{tr}(\xi_i,\psi_0), \quad (۴)$$

که اندیس i مربوط به نقاط زمینی (مشاهدات) و اندیس j مربوط به نقاط روی زمین‌وار (مجهولات) است. $\Delta\theta$ و $\Delta\lambda$ ابعاد سلول روی زمین‌وار، Δg_i^{tr} خطای برش و N تعداد سلول‌ها روی زمین‌وار است.

با حذف اثر طول‌موج‌های بلند میدان از بی‌هنجاری جاذبه تا درجه/مرتبه L، (Δg_L)، انتگرال رابطه (۱) به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\Delta g^L(r,\Omega) = \frac{1}{4\pi}\int_\sigma \Delta g^L(R,\Omega')K^L(\xi,\psi)\,\mathrm{d}\Omega', \quad (۵)$$

که $\Delta g^L = \Delta g - \Delta g_L$، بی‌هنجاری باقیمانده و $K^L = K - K_L$ کرنل اسفروئیدی (تفاضلی) است. این کرنل با استفاده از روابط (۲) و (۳) برابر است با:

$$K^L(\xi,\psi) = \frac{\xi-\xi^3}{L^3(\xi,\psi)} - \sum_{n=0}^{L}(2n+1)\xi^{n+2}P_n(\cos t). \quad (۶)$$

خطای برش در رابطه (۴) با استفاده از رابطه زیر به‌دست‌می‌آید (ونیچک و همکاران، ۱۹۹۶):

$$\Delta g^{tr}(\xi,\psi_0) = \frac{GM\xi}{2R^2}\sum_{n=0}^{\infty}(n-1)V_n(\xi,\psi_0)T_m, \quad (۷)$$

که GM حاصل‌ضرب جرم زمین در ثابت گرانش و T_m هارمونیک لاپلاس بی‌هنجاری پتانسیل است که از مدل زمین‌پتانسیل به‌دست‌می‌آید. $V_n(\xi,\psi_0)$، n–اُمین ضریب برش است و از رابطه زیر محاسبه می‌شود (ونیچک و همکاران، ۱۹۹۶):

$$V_n(\xi,\psi_0) = \int_{\psi=\psi_0}^{\pi} K(\xi,\psi_0)P_n(\cos\psi)\sin\psi\,\mathrm{d}\psi\,, \quad (۸)$$

P_n چندجمله‌ای لژاندر از درجه n است. ازآنجاکه خطای برش به رفتار طول‌موج‌های بلند کرنل بستگی دارد، برای محاسبه خطای برش در رابطه (۷) می‌توان سری را به درجه L' محدود کرد.

برای حل انتگرال (۸) از انتگرال‌گیری عددی (در این مقاله، روش عددی رومبرگ) استفاده می‌شود، اما این ضرایب تابعی از ξ هستند. به‌عبارت‌دیگر، این ضرایب تابع ارتفاع هستند. ازآنجاکه ارتفاع هر بی‌هنجاری متغیر است، این ضرایب باید برای هر نقطه محاسبه شوند، اما محاسبه ضرایب و خطای برش برای همه نقاط بسیار زمان‌بر است. برای سرعت بخشیدن به محاسبات می‌توان ضرایب برش را برای فواصل ارتفاعی محدودی محاسبه کرد و با درون‌یابی آنها، ضرایب برای هر ارتفاع را به‌دست‌آورد (هیوانگ، ۲۰۰۲). به‌تازگی، بوشا و همکاران (۲۰۱۹) روش موسوم به روش گرادیان را برای محاسبه ضرایب برش وابسته به ارتفاع توسعه داده‌اند. در روش گرادیان، برای یک ارتفاع پایه، برای مثال ۱۰۰۰ متر، ضرایب مالدنسکی و مشتقات ارتفاعی متوالی آن محاسبه می‌شود سپس با استفاده از بسط سری تیلور در هر ارتفاع، ضرایب اصلاح مالدنسکی به‌دست‌می‌آیند. در مطالعه گفته‌شده، از روش گرادیان برای محاسبه ضرایب مالدنسکی در اصلاح انتگرال نیوتن برای محاسبه اثر توپوگرافی استفاده شده است. در مطالعه حاضر، از روش هیوانگ (۲۰۰۲) برای محاسبه سریع ضرایب اصلاح کرنل مالدنسکی استفاده می‌شود؛ زیرا حجم محاسباتی دو روش یکسان، اما فرمول‌بندی روش هیوانگ ساده‌تر است.

خطای برش و ضرایب آن برای مشاهدات باقیمانده از روابط زیر به‌دست‌می‌آیند (هیوانگ، ۲۰۰۲):

$$\Delta g^{tr}(\xi,\psi_0) = -\frac{GM\xi}{2R^2}\sum_{n=L+1}^{L'}(n-1)V_n^L(\xi,\psi_0)T_n, \quad (۹)$$

$$\Delta g^{tr}(\xi,\psi_0) = -\frac{GM\xi}{2R^2}\sum_{n=L+1}^{L'}(n-1)V_n^L(\xi,\psi_0)T_n,$$

روش استاندارد برای کم کردن خطای برش، اصلاح طول‌موج‌های بلند میدان به نحوی است که خطای برش تا حد امکان کمینه شود. در مطالعات انتقال فروسو، اغلب از روش‌های وُنگ-گور و روش مالدنسکی برای این منظور استفاده می‌شود. در روش وُنگ-گور اثر طول‌موج‌های بلند از روی کرنل کامل برداشته می‌شود. استفاده از کرنل اسفروئیدی معادل روش وُنگ-گور است که در رابطه (۵) به‌کاررفته است. روش ونگ-گور در مطالعات اردلان و گرافارند (۲۰۰۴) و آلبرت و کلیس (۲۰۰۴) برای روش تک‌مرحله‌ای و دو مرحله‌ای استفاده شده است.

در اصلاح کرنل به روش مالدنسکی (از این پس به‌طور خلاصه، کرنل مالدنسکی)، ضرایب اصلاح t_n به طول‌موج‌های بلند کرنل اسفروئیدی اعمال می‌شوند:

$$K^{L,M}(\xi,\psi,\psi_0) = K - K_L - \sum_{n=0}^{L}\frac{2n+1}{2}t_n(\xi,\psi_0)P_n(\cos\psi)\,, m \le L. \quad (۱۰)$$

سپس این ضرایب از شرط کمینه شدن مربعاتِ خطای برش و حل دستگاه معادلات زیر به‌دست‌می‌آیند (ونیچک و همکاران، ۱۹۹۶):

$$\sum_{n=0}^{L}\frac{2n+1}{2}R_{n,m}(\psi_0)\,t_n(\xi,\psi_0) = \int_{\psi=\psi_0}^{\pi}K^{L,M}\,(\xi,\psi)\,P_m(\cos\psi)\,, m \le L \quad (۱۱)$$

علاوه‌براین، شکل طیفی خطای برش برای کرنل مالدنسکی همانند رابطه (۹) است با این تفاوت که در محاسبه ضرایب برش، کرنل رابطه (۱۰) به‌کارمی‌رود.

۳ انتقال فروسو با کرنل کامل

فارغ از وابستگی ضرایب برش به ارتفاع، هر دو کرنل اسفروئیدی و مالدنسکی شامل یک بخش طیفی وابسته به ارتفاع نقطه هستند. محاسبه این بخش کرنل برای هر نقطه در سطح زمین به‌ویژه برای داده‌های متراکم، زمان‌بر است.

یک روش برای سرعت بخشیدن به محاسبات، ایجاد جداولی برای ارتفاعات و فواصل کروی مختلف و استفاده از درون‌یابی آنها برای تعیین مقدار کرنل است. ازآنجاکه این فرایند ممکن است با تقریب‌هایی همراه باشد، در اینجا با استفاده از میرایی سریع کرنل پواسون، روشی برای استفاده از کرنل کامل بدون کم کردن طول‌موج‌های بلند و حتی اصلاح آن ارائه می‌شود. ایده این روش، استفاده از کرنل کامل به جای کرنل اسفروئیدی برای انتقال فروسوی داده‌های باقیمانده در رابطه (۵) است. حسن استفاده از کرنل کامل، سرعت بالای محاسبه آن و نیاز نداشتن به اصلاح است؛ زیرا شامل قسمت طیفی نیست. در اینجا از تعامد هارمونیک‌های کروی روی کره استفاده می‌کنیم. اگر دامنه انتگرال‌گیری تمام سطح زمین باشد، در رابطه (۵) افزودن طول‌موج‌های بلند کرنل (K_L) به کرنل (با توجه به تعامد هارمونیک‌های کروی) تغییری در رابطه ایجاد نخواهد کرد؛ بنابراین خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}\Delta g^L(r,\,\Omega) &= \frac{1}{4\pi}\int_\sigma \Delta g^L(R,\Omega')K^L(\xi,\psi)\,\mathrm{d}\Omega' \\ &= \frac{1}{4\pi}\iint_\sigma \Delta g^L(R,\Omega')K^L(\xi,\psi)\,\mathrm{d}\Omega' \\ &\quad + \frac{1}{4\pi R}\int\int_\sigma^\pi \Delta g^L(R,\Omega')K_L(\xi,\,\psi)\,\mathrm{d}\Omega' \\ &= \frac{1}{4\pi}\iint_{\psi\le\psi_0}\Delta g^L(R,\Omega')K(\xi,\psi)\,\mathrm{d}\Omega' + \Delta g^{\mathrm{tr}}\end{aligned} \quad (۱۲)$$

در رابطه اخیر، خطای برش Δg^{tr} همانند رابطه (۹) است با این تفاوت که در محاسبه ضرایب برش، کرنل کامل به‌کارمی‌رود:

$$\Delta g^{tr}(\xi,\psi_0) = -\frac{GM\xi}{2R^2}\sum_{n=L+1}^{L'}(n-1)V_n\;(\xi,\psi_0)T_n, \quad (۱۳)$$

۴ انتقال فروسو با کرنل متوسط

نحوه گسسته‌سازی انتگرال پواسون بستگی به نوع کمیت‌های بی‌هنجاری‌های گرانشی آن از نظر نقطه‌ای یا متوسط بودن دارد. در ژئودزی فیزیکی از بی‌هنجاری‌ها در سطح

زمین‌وار برای تعیین زمین‌وار در انتگرال استوکس استفاده می‌شود. ازآنجاکه برای حل انتگرال استوکس از روش عددی ذوزنقه‌ای استفاده می‌شود، به بی‌هنجاری‌های متوسط در سطح زمین‌وار نیاز داریم؛ بنابراین مدل گسسته‌سازی انتگرال پواسون باید مدل نقطه-متوسط یا متوسط-متوسط باشد؛ یعنی بی‌هنجاری‌های نقطه‌ای یا متوسط در سطح زمین را به بی‌هنجاری‌های متوسط تبدیل کند. مطالعه گلی و همکاران (۲۰۱۱) نیز نشان داد خطای گسسته‌سازی انتگرال پواسون در مدل‌های نقطه-متوسط و متوسط-متوسط به مراتب بیشتر از مدل نقطه-نقطه است؛ ازاین‌رو در این مطالعه از مدل گسسته‌سازی متوسط-متوسط استفاده می‌شود.

برای تبدیل مدل گسسته‌سازی از نقطه‌ای به متوسط کافی است در همه روابط قبلی به جای کرنل نقطه‌ای پواسون از متوسط آن در هر سلول زمین‌وار استفاده کنیم؛ برای مثال کرنل متوسط کامل پواسون برابر است با:

$$\overline{K}(\xi,\psi) = \int_{C_j} K(\xi,\psi)\,\mathrm{d}\Omega \int_{C_j}. \qquad (۱۴)$$

به‌عبارت‌دیگر، برای محاسبه کرنل در مرکز سلول از انتگرال آن در تمام سلول استفاده می‌شود. انتگرال فوق در سیستم مختصات کروی به روش عددی حل می‌شود و در سیستم مختصات دکارتی جواب تحلیلی دارد. در این مقاله از جواب تحلیلی آن در سیستم مختصات کروی براساس مطالعه گلی و نجفی علمداری (۲۰۱۱) استفاده شده است. همانند کرنل متوسط کامل، کرنل متوسط اسفروئیدی و مالدنسکی نیز با رابطه (۱۴) تعریف می‌شوند.

۵ نتایج عددی

برای بررسی اثر خطای برش بر انتقال فروسو و آزمودن ایده استفاده از کرنل کامل، به داده‌های گرانی در سطح زمین و زمین‌وار نیاز داریم. ازآنجاکه قادر به اندازه‌گیری گرانی روی زمین‌وار نیستیم، از بی‌هنجاری‌های هلمرت شبیه‌سازی‌شده استفاده می‌کنیم. برای این منظور، بی‌هنجاری‌های هلمرت از مدل زمین‌پتانسیل EGM2008 (پاولیس و همکاران، ۲۰۱۲) متناظر با هارمونیک‌های ۲۸۱ تا ۲۱۶۰ و مدل ارتفاعی هارمونیک متناظر با همین هارمونیک‌ها تا توان چهارم روی زمین و زمین‌وار محاسبه شدند. محاسبات روی یک شبکه منظم با گام ۳ دقیقه در منطقه ایران محدود به عرض $B25^\circ, 40^\circ X$ و طول ژئودتیکی $B45^\circ, 60^\circ X$ صورت گرفت. جزئیات روابط مورد استفاده در این محاسبات پیش از این در مقالات متعددی نظیر گلی و همکاران (۲۰۱۸) آمده است و در ادامه فقط به روابط کلی آن اشاره می‌شود.

بی‌هنجاری هلمرت Δg^H از اعمال اثر توپوگرافی بر بی‌هنجاری هوای آزاد به‌دست‌می‌آید:

$$\Delta g^H = \Delta g^{FA} + \mathrm{DTE} + \mathrm{SITE}, \qquad (۱۵)$$

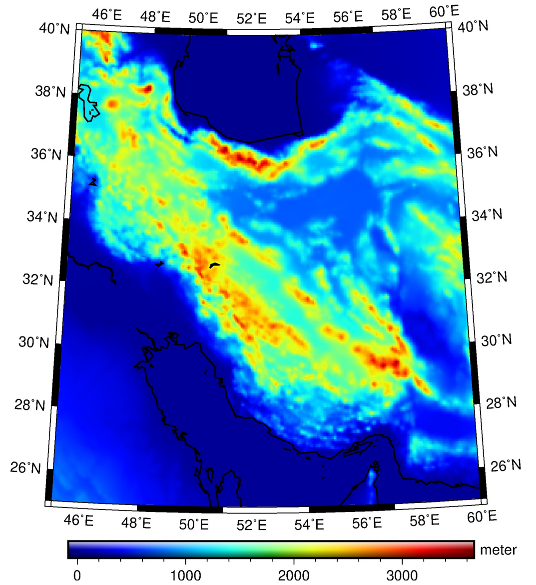
که Δg^{FA} بی‌هنجاری هوای آزاد، DTE و SITE به‌ترتیب اثر مستقیم و غیرمستقیم توپوگرافی هستند:

$$\mathrm{DTE} = \frac{\partial \delta V}{\partial r} \ , \mathrm{SITE} = \frac{2}{r}\delta V \qquad (۱۶)$$

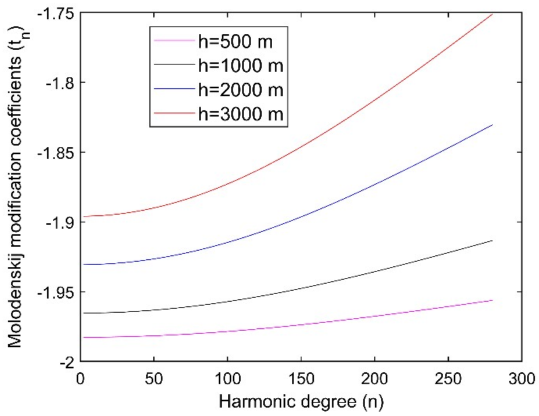
در این روابط δV تفاضل پتانسیل گرانشی توپوگرافی و توپوگرافی تحکیم‌شده (فشرده‌شده) روی زمین‌وار است. همچنین بی‌هنجاری هوای آزاد و δV از سری هارمونیک برابر است با:

$$\Delta g^{FA}(r,\theta,\lambda) = \frac{GM}{a}\sum_{n=281}^{2160}\frac{n-1}{r}\left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} T_n \, , \delta V(r,\theta,\lambda) = \sum_{n=281}^{\infty}\left(\frac{R}{r}\right)^{n+1}\left(\frac{1}{2n+1}\right)\left(\frac{n}{2}H_n^{(2)} + \frac{n(n+3)}{6R}H_n^{(3)} + \frac{n(n+1)(n+2)}{24R^2}H_n^{(4)}\right), \qquad (۱۷)$$

که a مقیاس مدل زمین‌پتانسیل است. R شعاع متوسط زمین، T_n ضریب لاپلاس هارمونیک کروی بی‌هنجاری پتانسیل و $H_n^{(i)}$ توان i - اُم توپوگرافی است.



شکل ۱. توپوگرافی منطقه آزمون براساس مدل ارتفاعی SRTM با گام ۳ دقیقه.



شکل ۲. ضرایب مالدنسکی برای ارتفاعات مختلف و شعاع انتگرال‌گیری $\psi_0 = 1^\circ$

در این مطالعه، ارتفاع نقاط روی سطح زمین از مدل ارتفاعی رقومی SRTM با گام ۳ دقیقه به‌دست‌آمد (شکل ۱). این مدل ارتفاعی از میانگین‌گیری داده‌های SRTM با گام ۳۰ ثانیه محاسبه شد که در همه مناطق زمین در دسترس هستند. علت استفاده از بی‌هنجاری‌های هلمرت، اطمینان از هارمونیک بودن آنها در فضای بالای زمین‌وار و امکان انتقال فروسوی آنها است. همچنین دلیل انتخاب گام ۳ دقیقه برای داده‌ها، اطمینان از پایداری انتقال فروسو براساس مطالعه گلی و همکاران (۲۰۱۸) است.

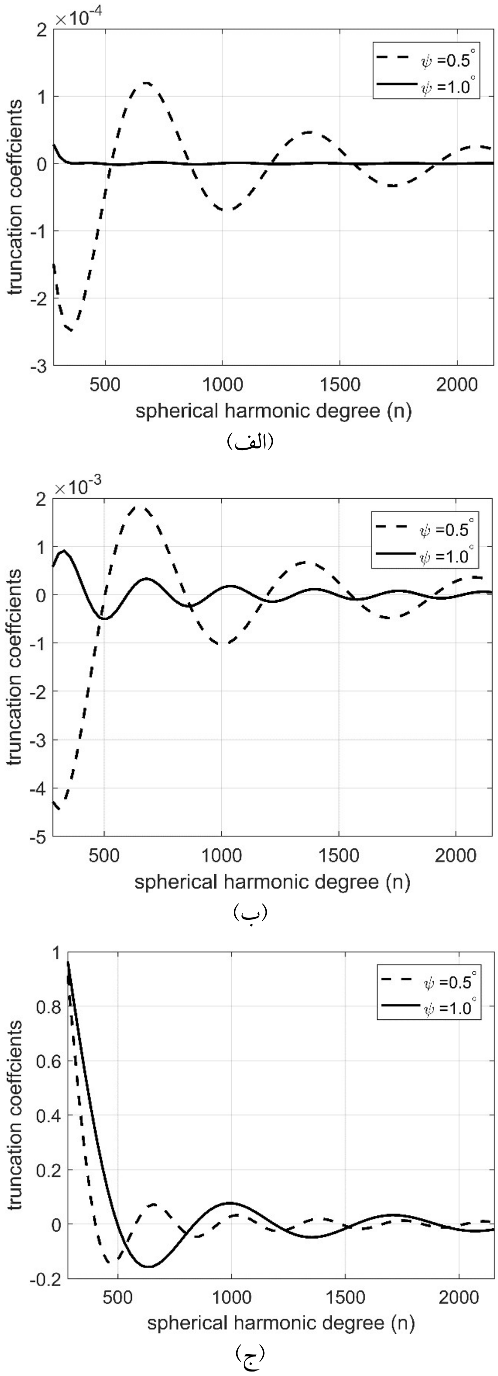
به‌کمک رابطه (۱۰)، ضرایب اصلاح مالدنسکی برای ارتفاعات مختلف ۱۰۰، ۵۰۰، ۱۰۰۰، ۱۵۰۰، ۲۰۰۰، ۲۵۰۰، ۳۰۰۰، ۴۰۰۰ و ۵۰۰۰ متری و دو شعاع انتگرال‌گیری ۳۰ دقیقه و ۶۰ دقیقه محاسبه شده‌اند. شکل ۲شکل ۲ این ضرایب را برای ارتفاعات ۵۰۰ تا ۳۰۰۰ متر برای شعاع انتگرال‌گیری $\psi_0 = 1^\circ$ نشان می‌دهد. براساس این شکل، این ضرایب نسبت به ارتفاع و درجه هارمونیک به‌آرامی تغییر می‌کنند؛ بنابراین خطای درون‌یابی آنها برای هر ارتفاع از نمودار فوق قابل‌قبول خواهد بود.

با استفاده از روابط (۷) و (۹) ضرایب خطای برش برای درجات ۲۸۱ تا ۷۲۰ برای ارتفاع ۱۰۰۰ متر محاسبه شد. شکل‌های ۳-الف تا ۳-ج این ضرایب را برای سه کرنل کامل، اسفروئیدی و مالدنسکی برای ارتفاع ۱۰۰۰ متر و دو شعاع انتگرال‌گیری $\psi_0 = 0/5^\circ, 1^\circ$ نشان می‌دهند. همان‌طورکه در شکل ۳ مشهود است، ضرایب خطای برش مربوط به کرنل اسفروئیدی حدود ۵۰۰ برابر کرنل کامل است. همچنین ضرایب برش کرنل مالدنسکی ۱۰ برابر از کرنل کامل کمتر است. با افزایش شعاع انتگرال‌گیری از $0/5^\circ$ به 1° انتظار می‌رود ضرایب برش کم شوند، اما شکل ۳-ج نشان می‌دهد که با وجود افزایش شعاع انتگرال‌گیری، ضرایب برش برای کرنل اسفروئیدی همچنان بزرگ هستند و مقدار درخورتوجهی دارند.

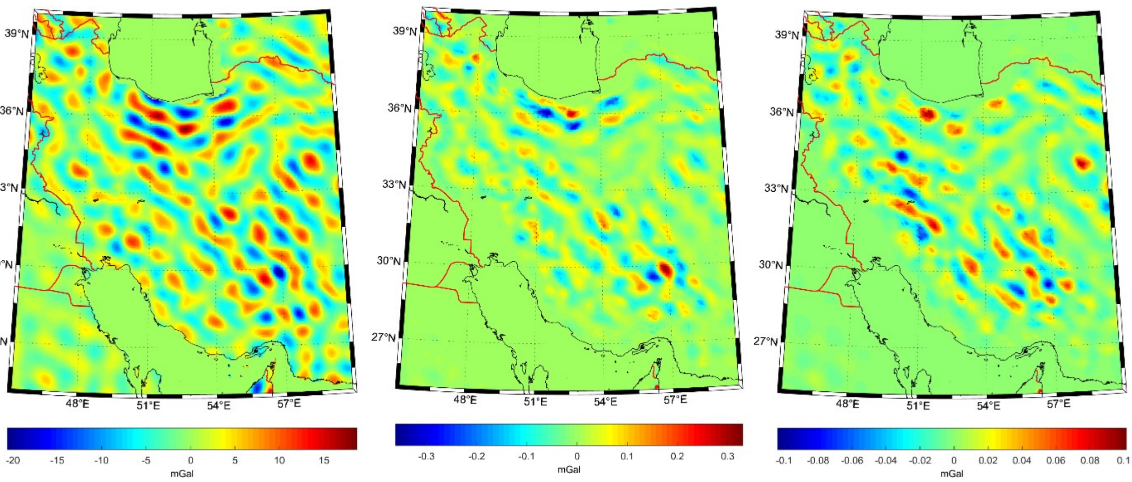
برای بررسی بهتر اثر ضرایب برش، خطای مربوط به هریک محاسبه شد. برای بی‌هنجاری‌های هلمرت در سطح زمین و با استفاده از روابط (۷) و (۹) خطای برش انتگرال متناظر با دو شعاع انتگرال‌گیری $0/5^\circ$ و 1° محاسبه شد. ازآنجاکه در اینجا با انتقال فروسوی بی‌هنجاری‌های هلمرت سروکار داریم، برای محاسبه خطای برش در روابط (۷) و (۹) به جای بی‌هنجاری پتانسیل، باید بی-

هنجاری پتانسیلِ هلمرت قرار داده شود. بی‌هنجاری پتانسیل هلمرت از رابطه $T^H = T - \delta V$ به‌دست‌می‌آید که δV (تفاضل پتانسیل گرانشی توپوگرافی و توپوگرافی تحکیم‌شده) از رابطه (۱۵) محاسبه می‌شود.

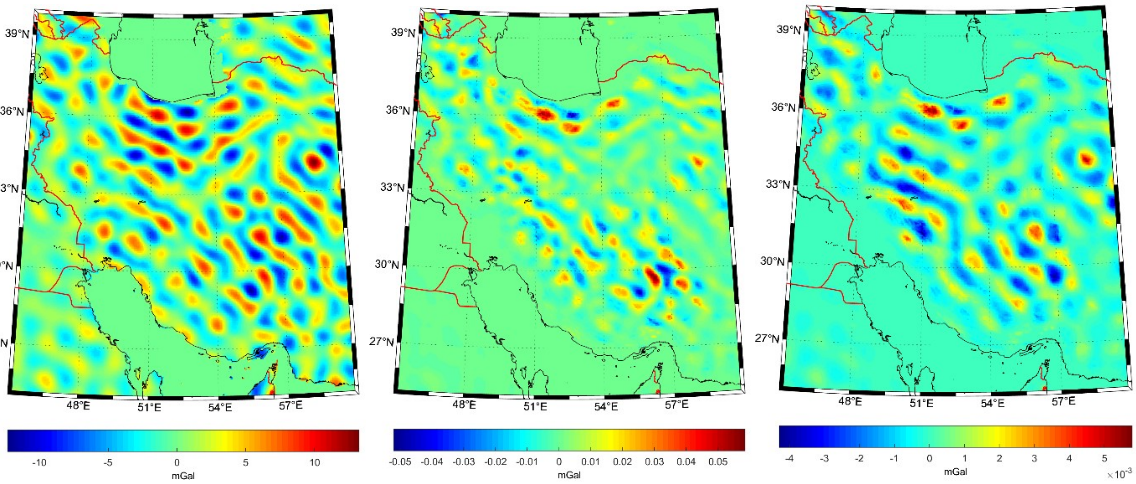
شکل‌های ۵–الف تا ۵–ج خطای برش انتقال فروسو برای بی‌هنجاری‌های هلمرت با گام ۳ دقیقه را برای کرنل‌های مختلف و شعاع انتگرال‌گیری $0/5^\circ$ نشان می‌دهد. برای محاسبه این مقادیر از مدل زمین‌پتانسیل EGM20008 با درجه و مرتبه ۲۸۱ تا ۷۲۰ استفاده شده است. با توجه به این شکل‌ها، درجه ۷۲۰ برای کرنل‌های کامل و مالدنسکی کاملاً کافی است، اما با توجه به مقادیر بزرگ ضرایب برش، برای کرنل اسفروئیدی به درجات بالاتر نیاز داریم. ادامه محاسبات برای این کرنل در درجات بالا به دو دلیل میسر نیست. دلیل نخست این است که محاسبه درجات بالا بسیار زمان‌بر است؛ زیرا در رابطه (۹) به محاسبه توابع لژاندر از درجات بالا نیاز است؛ برای مثال با کد تهیه‌شده به زبان فرترن و یک کامپیوتر با سرعت محاسباتی ۴ مگاهرتز، زمان مورد نیاز برای هر ارتفاع ۳۶ ساعت است. دلیل دوم، مفهوم بالا رفتن درجه هارمونیک یا به‌عبارتی، نزدیک شدن به فرکانس محلی میدان است؛ یعنی خطای برش کرنل اسفروئیدی، شامل مؤلفه‌های محلی میدان نیز هست. درنتیجه، مدل‌های زمین‌پتانسیل توانایی برآورد دقیق خطای برش را نخواهند داشت. راه‌حل جایگزین برای این منظور، افزایش شعاع انتگرال‌گیری است، اما افزایش شعاع انتگرال‌گیری نیاز به داده‌های اطراف بیشتری دارد و ابعاد دستگاه معادلات خطی مسئله را بالا می‌برد؛ برای مثال برای انتقال فروسوی یک بلوک $3^\circ \times 3^\circ$ از بی‌هنجاری‌های گرانشی با فاصله $1' \times 1'$ با شعاع انتگرال‌گیری ۲ درجه باید یک دستگاه معادلات با ابعاد حداقل ۱۷۶۴۰۰×۱۷۶۴۰۰ حل شود درحالی‌که برای شعاع انتگرال‌گیری $0/5^\circ$ این مقدار ۴۴۱۰۰×۴۴۱۰۰ است که با یک کامپیوتر معمولی نیز قابل‌حل است؛ بنابراین به نظر می‌رسد اصلاح کرنل اسفروئیدی امری لازم است.



شکل ۳. ضرایب برش برای (الف) کرنل مالدنسکی (ب) کرنل کامل و (ج) کرنل اسفروئیدی در ارتفاع ۱۰۰۰ متر



شکل ٤. خطای برش برای (الف) کرنل مالدنسکی (ب) کرنل کامل (ج) کرنل اسفروئیدی. شعاع انتگرال‌گیری $\psi_0 =$ ۰/۵° و واحد خطا میلی‌گال است.

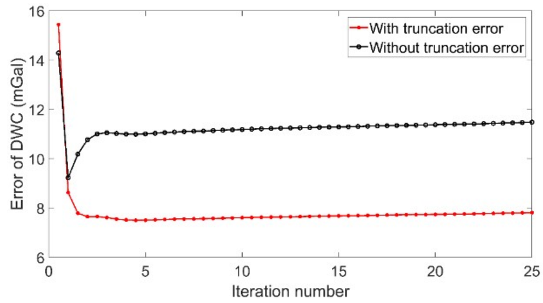


شکل ۵. خطای برش برای (الف) کرنل مالدنسکی (ب) کرنل کامل (ج) کرنل اسفروئیدی. شعاع انتگرال‌گیری $\psi_0 = 1^\circ$ و واحد خطا میلی‌گال است.

همان‌طورکه در شکل‌های ۴ و ۵ مشهود است، خطای برش یک خطای تصادفی نیست. خطای برش یک خطای (به بیان بهتر مؤلفه) نظام‌مند و تحت تأثیر طول‌موج‌های متوسط میدان گرانی (در اینجا، درجات هارمونیک ۲۸۱ تا ۷۲۰) است. طول‌موج‌های متوسط توپوگرافی، اغلب مسئول ایجاد طول‌موج‌های متوسط میدان گرانی هستند؛ لذا الگوی این خطا در این شکل‌ها بیشتر شبیه طول‌موج‌های متوسط توپوگرافی است.

در این بخش اثر خطای برش در انتقال فروسو برای کرنل‌های مختلف و شعاع انتگرال‌گیری $\psi_0 =$ ۰/۵° بررسی می‌شود. با توجه به شکل‌های ۵ و ۶، این شعاع برای انتقال فروسو کافی است. بی‌هنجاری‌های هلمرت را یک‌بار با درنظرگرفتن خطای برش و یک‌بار بدون درنظرگرفتن خطای برش روی زمین‌وار ادامه فروسو می‌دهیم. برای انتقال فروسو از کرنل متوسط پواسون (ر.ک. بخش ۴) استفاده می‌شود. پس از گسسته‌سازی انتگرال،

ابعاد دستگاه معادلات خطی حاصل ۸۰۰۸۰×۸۰۰۸۰ است. برای غلبه بر مشکل تخصیص حافظه محاسباتی، با توجه به صفر بودن اغلب عضوهای ماتریس ضرایب از ماتریس-های تنک استفاده شد. حل دستگاه معادلات خطی به-کمک روش تکراری کمترین مربعات با دوقطری‌سازی لنکزوز موسوم به کمترین مربعات LSQR (پایگ و ساندرز، ۱۹۸۲) انجام شد. ازآنجاکه بی‌هنجاری‌های هلمرت در سطح زمین‌وار معلوم هستند، می‌توان خطای انتقال فروسو را برای هر تکرار LSQR محاسبه کرد.



شکل ٦. نرم خطای ۵۰ تکرار اول انتقال فروسو با کرنل اسفروئیدی

نتایج عددی خطای هر کرنل در جدول ۱ آمده است. نتایج عددی انتقال فروسو نشان می‌دهد که تکرارهای مربوط به کرنل‌های کامل و مالدنسکی همگرا هستند به-طوری‌که در هر تکرار، نرم خطای انتقال فروسو کمتر می-شود. به‌عبارت‌دیگر، مسئله انتقال فروسوی آنها پایدار است، اما در تکرارهای دستگاه معادلات کرنل اسفروئیدی، پدیده شبه‌همگرایی اتفاق می‌افتد؛ یعنی در چند تکرار اول، خطای تکرارها کم می‌شود سپس نرم خطاها افزایش می‌یابد (شکل ۶). همان‌طورکه در شکل ۶ مشهود است، حتی با صرف‌نظرکردن از شبه‌همگرایی، خطای انتقال فروسو با کرنل اسفروئیدی خیلی زیاد است. با صرف‌نظرکردن از شبه‌همگرایی، خطای انتقال فروسو حدود ۹ میلی‌گال بدون درنظرگرفتن خطای برش و ۷/۵ میلی‌گال با درنظرگرفتن خطای برش است. اعمال خطای برش باعث بهبود نتایج انتقال فروسو شده است، اما خطا همچنان بزرگ است.

جدول ۱. خطای انتقال فروسو برای کرنل‌های مختلف. شعاع انتگرال-گیری ۰/۵ درجه و واحد میلی‌گال است

کرنل	خطای برش	خطای انتقال فروسو			
		کمینه	بیشینه	میانگین	انحراف معیار
مالدنسکی	اعمال-نشده	-۲۳/۹۴۸	۸/۰۲۷	-۰/۰۴۵	۰/۷۵۸
	اعمال-شده	-۲۳/۹۷۵	۸/۰۳۲	-۰/۰۴۴	۰/۷۵۸
کامل	اعمال-نشده	-۲۳/۹۴۸	۸/۰۲۷	-۰/۰۴۵	۰/۷۵۸
	اعمال-شده	-۲۳/۹۸۱	۷/۹۹۸	-۰/۰۴۸	۰/۷٦۰
اسفروئیدی	اعمال-نشده	-۸۳/۹۱۴	۳۲/۲۰٦	-۱۲/۸۲۰	۱٤/۷۹٦
	اعمال-شده	-٦۰/۰۲۹	۲۳/۰۲۲	-۹/٥٦۰	۱۰/٥۳۳

نتایج جدول ۱ نشان می‌دهد در اصلاح کرنل به روش مالدنسکی، برای $\psi_0 = ۰/۵^\circ$، خطای برش بسیار کوچک است و نتایج انتقال فروسو را تنها در حد چند میکروگال تغییر می‌دهد؛ ازاین‌رو درعمل از محاسبه و اعمال آنها می‌توان صرف‌نظر کرد. نتایج این جدول همچنین حاکی از موفقیت استفاده از کرنل کامل برای انتقال داده‌های باقیمانده است. اعمال خطای برش برای کرنل کامل باعث کاهش دقت به میزان یک میکروگال شده که خلاف انتظار است. این میزان بسیار کوچک است و می‌تواند ناشی از خطای گرد کردن یا خطای محاسباتی در برآورد آن باشد. همچنین نتایج جدول نشان می‌دهد اختلاف نتایج کرنل مالدنسکی و کرنل کامل کمتر از یک میکروگال است.

۶ نتیجه‌گیری

دامنه انتگرال پواسون همانند اغلب انتگرال‌های ژئودزی فیزیکی تمام کره زمین است که قطع آن برای شعاع محدود منجر به معرفی خطای برش می‌شود. درصورتی‌که شعاع انتگرال‌گیری مقدار مناسبی باشد (بزرگ‌تر از $۰/۵^\circ$)، مقدار این خطا در حد چند صد میکروگال است و اصلاح کرنل (به روش مالدنسکی) تأثیر چشمگیری در کم کردن آن ندارد، اما خطای برش برای کرنل اسفروئیدی پواسون بزرگ است.

برای بررسی اثر خطای برش بر نتایج انتقال فروسو از بی‌هنجاری‌های هلمرت شبیه‌سازی‌شده از مدل زمین‌پتانسیل EGM2008 متناظر با درجه‌های ۷۲۰ تا ۲۱۶۰ با تراکم ۳ دقیقه استفاده شد. استفاده از داده‌های شبیه‌سازی‌شده به جای داده‌های واقعی که فرکانس‌های محلی سیگنال گرانی هستند، ناقض نتایج عددی این مطالعه نخواهد بود؛ زیرا هدف این مطالعه بررسی خطای برش انتقال فروسو است و این خطا متأثر از طول‌موج‌های بلند کرنل انتگرال پواسون است. علاوه‌براین، برای بررسی صحت نتایج انتقال فروسو نیاز به داده گرانی روی زمین‌وار است و این داده‌ها وجود ندارند؛ بنابراین چاره ای جز شبیه‌سازی روی زمین‌وار وجود ندارد.

براساس نتایج عددی این مطالعه، خطای برش برای کرنل اسفروئیدی با شعاع انتگرال‌گیری ۰/۵ یا ۱ درجه بیشتر از چند میلی‌گال است. دستگاه معادلات خطای آن، حتی با اعمال خطای برش ناپایدار و نتایج انتقال فروسو، به پدیده شبه‌همگرایی آلوده است. اصلاح کرنل اسفروئیدی به روش مالدنسکی می‌تواند خطای برش را به سطح چند ده میکروگال کاهش دهد به‌طوری‌که اعمال آن تأثیر ملموسی بر نتایج نداشته باشد. در این مطالعه برای رهایی از محاسبات زمان‌بر ضرایب اصلاح کرنل مالدنسکی و کرنل آن، روشی بر مبنای استفاده از کرنل کامل ارائه شد. نتایج نشان می‌دهد روش پیشنهادشده با دقتی معادل اصلاح کرنل به روش مالدنسکی عمل می‌کند. همین‌طور نتایج عددی نشان داد شعاع بهینه برای انتگرال پواسون برای منطقه ایران برابر $\psi_0 = ۰/۵^\circ$ است.

منابع

Alberts, B., and Kless, R., 2004, A comparison of methods for the inversion of airborne gravity data: Journal of Geodesy, **78**(1), 55-65, doi:10.1007/s00190-003-0366-x.

Ardalan, A. A., 1999, High resolution regional geoid computation in the World Geodetic Datum 2000, based upon collocation of linearized observational functionals of the type GPS, gravity potential and gravity intensity: PhD thesis, University of Stuttgart.

Ardalan, A. A., and Grafarend, E. W., 2004, High resolution regional geoid computation without applying Stokes's formula: a case study of the Iranian geoid: Journal of Geodesy, **78**(1), 138-156, doi:10.1007/s00190-004-0385-2.

Ardalan, A. A., and Karimi, R., 2013, On correct application of one-step inversion of gravity data: Studia Geophysica et Geodaetica, **57**(3), 401-425, doi:10.1007/s11200-012-0443-9.

Bucha, B., Hirt, C., and Kuhn, M., 2019, Cap integration in spectral gravity forward modelling: Near-and far-zone gravity effects via Molodensky's truncation coefficients: Journal of Geodesy, **93**(1), 65-83, doi:10.1007/s00190-0-1139-18x.

Ellmann, A., and Vaníček, P., 2007, UNB application of Stokes–Helmert's approach to geoid computation: Journal of Geodynamics, **43**(2), 200-213.

Forsberg, R., and Tscherning, C. C., 2008, An overview manual for the GRAVSOFTRep.: Technical University of Denmark, Copenhagen, Denmark.

Goli, M. and Najafi-Alamdari, M., 2011, Planar, spherical and ellipsoidal approximations of Poisson's integral in near zone, Journal of Geodetic Science. **1**(1), 17-24. Doi:10.2478/v10156-010-0003-6.

Goli, M., Najafi-Alamdari, M., and Vanicek, P., 2011, Numerical behaviour of the downward continuation of gravity anomalies, Studia Geophysica et Geodaetica, 55(2), 191-202, doi=10.1007/s11200-011-0011-8.

Goli, M., Foroughi, I., and Novak, P., 2018, On estimation of stopping criteria for iterative

Mayrhofer, R., Krasbutter, I., Sansò, F., and Tscherning, C. C, 2011, First GOCE gravity field models derived by three different approaches: Journal of Geodesy, **85**(11), 819-843, doi:10.1007/s00190-011-0467-x.

Saadat, A., Safari, A., and Needell, D., 2018, IRG2016: RBF-based regional geoid model of Iran: Studia Geophysica et Geodaetica, **62**(3), 380-407, doi:10.1007/s11200-016-0679-x.

Safari, A., Ardalan, A. A., Grafarend, E. W., 2005, A new ellipsoidal gravimetric, satellite altimetry and astronomic boundary value problem, a case study: The geoid of Iran: Journal of Geodynamics, **39**(5), 545-568.

Sjöberg, L., 2005, A discussion on the approximations made in the practical implementation of the remove–compute–restore technique in regional geoid modelling: Journal of Geodesy, **78**(11-12), 645-653, doi:10.1007/s00190-004-0430-1.Vaníček, P., Huang, J., Novak, P., Pagiatakis, S., Veronneau, M., Martinec, Z., and Featherstone, W., 1999, Determination of the boundary values for the Stokes-Helmert problem: Journal of Geodesy, **73**(4), 180-192.

Vaníček, P., Novák, P., Sheng, M., Kingdon, R., Janák, J., Foroughi, I., Martinec, Z., and Santos, M., 2017, Does Poisson's downward continuation give physically meaningful results?: Studia Geophysica et Geodaetica, 61(3), 412-428, doi:10.1007/s11200-016-1167-z.

Wong, L., and Gore, R. , 1969, Accuracy of geoid heights from modified Stokes kernels: Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society, **18**(1), 81-91, doi:10.1111/j.1365-246X.1969.tb00264.x.

solutions of gravity downward continuation: Canadian Journal of Earth Sciences, **55**(4), 397-405, doi:10.1139/cjes-2017-0208.

Hofmann-Wellenhof, B., and Moritz, H., 2006, Physical Geodesy: Springer Science and Business Media.

Huang, J., 2002, Computational methods for the discrete downward continuation of the Earth gravity and effects of lateral topographical mass density variation of gravity and geoid: PhD thesis, UNB, Federicton.

Huang, J., Pagiatakis, S. D., and Véronneau, M., 2002, Truncation of Poisson's integral in upward and downward continuations of the Earth's gravity: paper presented at Gravity, Geoid and Geodynamics 2000, Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2002.

Janák, J., Vańiček, P., Foroughi, I., Kingdon, R., Sheng, M. B., and Santos, M. C., 2017, Computation of precise geoid model of Auvergne using current UNB Stokes-Helmert's approach: Contributions to Geophysics and Geodesy, **47**(3), 201-229.

Molodenskij, M. S., Eremeev,V. F., and Yurkina, M. I., 1962, Method for study of the external gravitation field and figure of the Earth: Translation from Russian (1960), Jerusalem.

Novák, P., 2003, Geoid determination using one-step integration: Journal of Geodesy, **77**(3-4), 193-206, doi:10.1007/s00190-003-0314-9.

Paige, C. C., and Saunders, M. A., 1982, LSQR: An Algorithm for Sparse Linear Equations and Sparse Least Squares: ACM Transactions on Mathematical Software, **8**(1), 43-71, doi: 10.1/145/355984.355989.

Pail, R., Bruinsma, S., Migliaccio, F., Förste, C., Goiginger, H., Schuh, W., Höck, E., Reguzzoni, M., Brockmann, J. M., Abrikosov, O., Veicherts, M., Fecher, T.,

Iranian Journal of Geophysics, Vol 13, No 1, 2019, P. 6

Truncation Error of Poisson's Integral in Downward Continuation of Residual Gravity Anomalies

Mehdi Goli[1*]

[1] *Assistant professor, Faculty of civil engineering, Shahrood University of technology, Shahrood, Iran*

(Received: 19 December 2018, Accepted: 07 May 2019)

Summary

The global gravity models (GGM) are combined with the surface gravity data to geoid determination in remove-restore scheme. In the remove step, the residual gravity anomalies are computed by subtracting the long wavelength signal of gravity anomalies, computed from GGM, as well as the gravitational effect of topographic masses. In next step, the residual anomalies are downward continued (DWC) into the geoid/ellipsoid surface for solving the Stokesian boundary value problem. In restore step, the long wavelength of geoid and indirect effect of topography are restored. The main goal of the present paper is to study the truncation error of spheroidal Poisson's integral.

The comparison of truncation coefficient of full and spheroidal kernel shows that the truncation error of spheroidal kernel is at least 500 times of full kernel. As a result, modification of the kernel using spheroidal Poisson kernel is vital for DWC.

Since the Poisson kernel depends on height, the modification must be computed for individual observation height. The computation of modification coefficients for all observations needs long computational time. To overcome this problem, they can be interpolated using suitable pre-computed coefficients of few reference altitudes. To escape from time consuming modification process, we proposed a fast and accurate method based on the full kernel. This method uses the orthogonal property of Legendre polynomial.

For numerical test, the proposed method was applied in Iran within latitude band of $[25°, 40°]$ and longitude band of $[45°, 60°]$. To test the effect of the truncation error on DWC accuracy, Helmert gravity anomalies corresponding to spherical degree 281-2160 were synthesized using EGM2008 and spherical harmonics of the topography on both Earth's surface and geoid. The truncation error of full, spheroidal and modified spheroidal (using Molokensij method) were evaluated for integration radius ψ_0= 0.5 and 1 arc-deg. Our results show that for both radii, truncation error of full and modified kernel is about hundreds μGals, whereas these values can reach to several mGals for spheroidal kernel. Numerical results show that large truncation error yields the wrong results of DWC with spheroidal Poisson kernel. Also, the results show the good performance of proposed method in comparison with Molodenskij modified kernel.

Keywords: truncation error, residual gravity anomaly, downward continuation, Poisson's integral

*Corresponding author: Goli@shahroodut.ac.ir