مجله ژئوفیزیک ایران، جلد ۱۴، شماره ۲، ۱۳۹۹، صفحه ۴۹ – ۶۱ DOI: 10.30499/ijg.2020.107362

ارائه یک مدل جدید تبدیل سطوح مبنای مسطحاتی بر مبنای تقریب بیضوی و برآورد ضرایب سطح تبدیل مؤلفه ارتفاعی با به‌کارگیری مدل ریاضی تعمیم‌یافته

محمّد علی شریفی [1*] و محمد مهدی کریمی نژاد [2]

[1] دانشیار دانشکده مهندسی نقشه برداری و اطلاعات مکانی، دانشگاه تهران، تهران، ایران
[2] دانشجوی کارشناسی ارشد ژئودزی، دانشکده مهندسی نقشه برداری و اطلاعات مکانی، دانشگاه تهران، تهران، ایران

(تاریخ دریافت: ۱۳۹۸/۱۱/۱۴، تاریخ پذیرش: ۱۳۹۹/۰۲/۲۳)

چکیده

مسئله تبدیل مختصات ژئودتیک از یک سطح مبنای مسطحاتی به سطح مبنای مسطحاتی دیگر از مسائل مهم و کاربردی در ژئودزی هندسی است که با توجه به فراگیر شدن استفاده از سامانه‌های اطلاعات مکانی در یکپارچه‌سازی و تحلیل و تفسیر اطلاعات مکانی، لزوم یکسان‌سازی سطح مبنای مختصات لایه‌های مختلف اطلاعاتی به‌مراتب بیش از گذشته است. انتقال مختصات منحنی‌الخط از یک سطح مبنا به سطح مبنای دیگر که اصطلاحاً مسئله تبدیل سطوح مبنا یا دیتوم نامیده می‌شود، بر پایه وجود مختصات ژئودتیک سه‌بعدی تعدادی نقاط مشترک در هر دو سطح مبنا استوار است و پارامترهای تبدیل دو سطح بر مبنای مختصات معلوم این نقاط برآورد می‌شود. مختصات علائم مرزی در مرزهای بین‌المللی و نقشه‌های پوششی کوچک‌مقیاس کشوری بر مبنای سطوح مبنای مسطحاتی محلی قدیمی تعیین شده است. در تعیین پارامترهای تبدیل این سطوح به سطوح مبنای جدید جهانی- که در تعیین موقعیت و مکان‌یابی با سامانه‌های تعیین موقعیت جهانی به‌کارمی‌روند - یک مشکل اساسی در به‌کارگیری روابط ریاضی تبدیل وجود دارد که امکان استفاده مستقیم از روش‌های کلاسیک ارائه‌شده برای حل این مسئله را غیرممکن می‌سازد. موقعیت ژئودتیک سه‌بعدی نقاط با استفاده از سامانه‌های تعیین موقعیت جهانی به‌صورت همگن و در سه بعد تعیین می‌شود؛ این در حالی است که تعیین موقعیت نقاط کلاسیک مختصات ژئودتیک نقاط در دو بعد مسطحاتی صورت می‌گیرد و ارتفاع نقاط هم در بهترین حالت، به‌صورت ارتفاع ارتومتریک (بر مبنای ارتفاع محلی) معلوم است. به‌منظور به‌کارگیری روابط کلاسیک تبدیل سطوح مبنا در این حالت خاص، لازم است تبدیل ارتفاع ارتومتریک به ژئودتیک در سطح مبنای مربوطه انجام شود. هدف این مقاله بررسی نتیجه به‌کارگیری دو روش برای تعیین ارتفاع ژئوئید در نقاط مورد استفاده در تعیین پارامترهای تبدیل است. روش اول استفاده از مدل‌های جهانی جاذبه و محاسبه ارتفاع ژئوئید و روش دوم گسترش مدل ریاضی روابط تبدیل، جهت برآورد هم‌زمان پارامترهای تبدیل سطوح ارتفاعی و سطح تبدیل ارتفاعی است. نتایج عددی نشان‌دهنده دستیابی به دقت بهتر تبدیل در هنگام استفاده از روش دوم در تعیین پارامترهای تبدیل سطوح مبناست.

بهبود تقریب روابط تبدیل از حالت کروی هشت پارامتری و بیضوی پنج پارامتری به روابطی با تقریب بیضوی با هشت پارامتر، دیگر دستاورد مورد بحث در این مقاله است. استفاده هم‌زمان این تقریب و مدل ریاضی گسترش‌یافته، حتی در صورت نبود ارتفاع ژئودتیک در هر دو دستگاه در نقاط مشترک مورد استفاده، به دقت بهینه در برآورد پارامترهای تبدیل منجر می‌شود. روش‌های پیشنهادی، در داده‌های موجود از کشور نیجریه پیاده‌سازی و نتایج ارزیابی شده است. نتایج عددی داده‌های مذکور، نشان‌دهنده دستیابی به دقت دهم ثانیه در مؤلفه‌های منحنی‌الخط مختصات و دقت دسی‌متری در مؤلفه ارتفاعی است.

واژه‌های کلیدی: تبدیل سطوح مبنا به روش دیفرانسیلی، روش مالودنسکی، تقریب بیضوی، حل هم‌زمان، تبدیل ارتفاع ارتومتریک به ژئودتیک، مدل جهانی جاذبه

* نگارنده رابط: sharifi@ut.ac.ir

۱ مقدمه

دستگاه مختصات عناصری از فضا را نشان می‌دهد که با درنظرگرفتن آنها می‌توان مکان یک نقطه را با توجه به مبدأ معلوم تعیین کرد. در دستگاه مختصات دکارتی این عناصر همان طول اقلیدسی محورهای مختصات هستند. دستگاه مختصات منحنی‌الخط براساس یک جسم مرجع هندسی نظیر کره یا بیضوی تعریف می‌شود و برای نمایش یک نقطه در این دستگاه‌ها به یک پارامتر هندسی و دو پارامتر زاویه‌ای نیاز است. این پارامترها در هر جسم مرجعی متفاوت هستند. مختصات یک نقطه در دو دستگاه مختصات بیضوی، متفاوت از یکدیگر است چون پارامترهای مختصاتی براساس پارامترهای هندسی جسم مرجع تعریف می‌شوند. با دانستن مختصات یک سری نقاط مشترک در دو دستگاه مختصات بیضوی می‌توان اختلاف پارامترهای هندسی دو جسم مرجع را یافت. حل مسئله تبدیل دیتوم، یافتن تفاوت این پارامترها است.

مالودنسکی و همکاران (۱۹۶۲) مجموعه‌ای از معادلات دیفرانسیل را برای تبدیل مختصات از یک دیتوم به دیتوم دیگر ارائه کردند. براساس این معادلات، تغییرات در مختصات دکارتی یک نقطه با دوران نسبت به محورهای دکارتی و نسبت به نقطه ثابت (مبدأ)، انتقال نسبت به مبدأ جسم مرجع و تغییرات نسبت عناصر هندسی جسم مرجع (نظیر فشردگی و نیم‌قطر اطول در بیضوی) مرتبط است. در برخی منابع معادلات دیفرانسیل مالودنسکی را تبدیل کانفورمال می‌گویند.

سه مدل از انتقال مختصات مالودنسکی عبارت‌اند از:

۱- مدل انتقال مالودنسکی–بادکاس (بادکاس، ۱۹۶۹)که مدل هفت پارامتری کانفورمال برای انتقال مختصات است و شامل سه دوران، سه انتقال و یک مقیاس است؛

۲- مدل مالودنسکی استاندارد که مدل پنج پارامتری برای انتقال مختصات است و شامل تغییرات در مختصات منحنی‌الخط و تغییرات نیم‌قطر اطول و فشردگی در بیضوی است؛

۳- مدل مالودنسکی خلاصه‌شده که مدل پنج پارامتری برای انتقال مختصات است و همانند مدل استاندارد است با این تفاوت که ارتفاع از بیضوی درنظرگرفته نمی‌شود.

مدل‌های ۲ و ۳ انتقال‌هایی بودند که آژانس ملی نقشه‌برداری و تهیه تصویر ایالات متحده امریکا در سال ۲۰۰۰ تصویب کرده است. مدل وولف-بورسا (وولف، ۱۹۶۳ و بورسا، ۱۹۶۲) مدل هفت پارامتری دیگری برای تبدیل دیتوم به‌شمارمی‌رود و تفاوت آن با مدل مالودنسکی-بادکاس در این است که در مدل وولف‌بورسا، سه دوران نسبت به مرکز دستگاه مختصات سنجیده می‌شود ولی مدل مالودنسکی-بادکاس دوران را نسبت به نقطه اندازه‌گیری‌شده روی بیضوی می‌سنجد. تفاوت این دو روش در زاووتی و کالمار (۲۰۱۶) بررسی شده است. در همه این مدل‌ها مشاهدات مؤلفه ارتفاعی باید از جنس هندسی (ژئودتیکی) باشد. در برخی موارد این مؤلفه به‌صورت فیزیکی (ارتومتریک) موجود است و باید برای استفاده صحیح از روابط، این تبدیل با روش‌های مختلف صورت پذیرد. برای انجام این تبدیل به محاسبه ارتفاع ژئوئید نیاز است تا با اضافه کردن آن به ارتفاع ارتومتریک بتوان به ارتفاع ژئودتیک رسید. در این مقاله دو روش برای محاسبه ارتفاع ژئوئید نقاط ارائه شده است که در بخش ۲ به تفصیل شرح داده خواهد شد.

۲ روش تحقیق

۲-۱ مسئله تبدیل دیتوم

مختصات ژئودتیک با رابطه زیر به مختصات دکارتی تبدیل می‌شود (وینچک، ۱۹۸۶):

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (N+h)\cos\phi\cos\lambda \\ (N+h)\cos\phi\sin\lambda \\ (N(1\quad e^2)+h)\sin\phi \end{bmatrix}, \qquad (۱)$$

مولفه های φ, λ و مختصات منحنی الخط هر ایستگاه و

N شعاع انحنای قائم اولیه و e خروج از مرکز بیضوی است:

$$e^2 = f(2 \quad f)\,,1 \quad e^2 = (1 \quad f)^2,$$
$$N = \frac{a}{(1-e^2 \sin^2 \phi)^{1/2}} \qquad (۲)$$

مسئله تبدیل دیتوم با سه دستگاه مختصات سروکار دارد:

(الف) دستگاه مختصات زمین‌مرکز CT؛

(ب) دستگاه مختصات ژئودتیکی اول (بیضوی مرجع اول)؛

(ج) دستگاه مختصات ژئودتیکی دوم (بیضوی مرجع دوم).

برای تبدیل دستگاه (الف) به دستگاه‌های (ب) و (ج) از رابطه برداری زیر استفاده می‌شود (ونیچک ، ۱۹۸۶):

$$r^{CT} = r^G + T^G \varepsilon + r_E^{CT}, \qquad (۳)$$

$$r^{CT} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}^G + \begin{bmatrix} 0 & z & y \\ z & 0 & x \\ y & x & 0 \end{bmatrix}^G \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_E \\ y_E \\ z_E \end{bmatrix}^{CT}, \qquad (۴)$$

که r^G و r^{CT}، به‌ترتیب مختصات هر نقطه دلخواه در دستگاه مختصات ژئودتیک و دستگاه مختصات زمین‌مرکز است. T^G و ε ماتریس‌های متناظر پارامترهای دورانی و زوایای دوران هستند. بردار r_E^{CT} بیانگر پارامترهای انتقال از دستگاه ژئودتیک به دستگاه مختصات زمین‌مرکز است. طول و عرض جغرافیایی یک نقطه در دستگاه مختصات زمین‌مرکز با طول و عرض جغرافیایی آن در دو دستگاه مختصات ژئودتیکی اول و دوم متفاوت است که علت آن به تفاوت در ابعاد هندسی بیضوی‌های مرجع بازمی‌گردد. برای نقطه مذکور، تفاوتی در دستگاه مختصات زمین‌مرکز CT وجود ندارد؛ بنابراین با توجه به این موضوع و رابطه (۴) رابطه زیر به‌دست‌می‌آید:

$$r^{G2} \quad r^{G1} + T^{G2}\overline{\varepsilon}_2 \quad T^{G1}\overline{\varepsilon}_1 + r_{E2}^{CT} \quad r_{E2}^{CT} = 0, \qquad (۵)$$

معادله (۵) اساس مسئله تبدیل دیتوم و یافتن اختلاف پارامترهای هندسی دو دستگاه ژئودتیکی را بیان می‌کند. در ادامه به نحوه استفاده از رابطه (۵) برای حل این مسئله اشاره می‌شود.

۲-۲ حل مسئله تبدیل دیتوم به روش دیفرانسیلی با تقریب کروی

با جایگذاری رابطه (۲) در رابطه (۱)، رابطه (۶) به‌دست‌می‌آید:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{matrix} \frac{a \cos\phi \cos\lambda}{(1-f(2-f)\sin\phi^2)^{1/2}} + h \cos\phi \cos\lambda \\ \frac{a \cos\phi \sin\lambda}{(1-f(2-f)\sin\phi^2)^{1/2}} + h \cos\phi \sin\lambda \\ \frac{a\,(1-f)^2 \sin\phi}{(1-f(2-f)\sin\phi^2)^{1/2}} + h \sin\phi \end{matrix}, \qquad (۶)$$

با توجه به نظریه دیفرانسیل کامل دیاکین (۲۰۰۴)، تغییرات کوچک در x،y و z باعث تغییرات در h، λ، f، a و ϕ می‌شود.

براساس این نظریه داریم:

$$\begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \\ \delta z \end{bmatrix} = \begin{matrix} \frac{\partial x}{\partial a}\delta a + \frac{\partial x}{\partial f}\delta f + \frac{\partial x}{\partial \phi}\delta\phi + \frac{\partial x}{\partial \lambda}\delta\lambda + \frac{\partial x}{\partial h}\delta h \\ \frac{\partial y}{\partial a}\delta a + \frac{\partial y}{\partial f}\delta f + \frac{\partial y}{\partial \phi}\delta\phi + \frac{\partial y}{\partial \lambda}\delta\lambda + \frac{\partial y}{\partial h}\delta h \\ \frac{\partial z}{\partial a}\delta a + \frac{\partial z}{\partial f}\delta f + \frac{\partial z}{\partial \phi}\delta\phi + \frac{\partial z}{\partial \lambda}\delta\lambda + \frac{\partial z}{\partial h}\delta h \end{matrix}, \qquad (۷)$$

می‌توان رابطه (۷) را به شکل ماتریسی زیر بازنویسی کرد:

$$\begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \\ \delta z \end{bmatrix}^G = \underbrace{\begin{matrix} \frac{\partial x}{\partial a} & \frac{\partial x}{\partial f} \\ \frac{\partial y}{\partial a} & \frac{\partial y}{\partial f} \\ \frac{\partial z}{\partial a} & \frac{\partial z}{\partial f} \end{matrix}}_{B} \begin{bmatrix} \delta a \\ \delta f \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{matrix} \frac{\partial x}{\partial \phi} & \frac{\partial x}{\partial \lambda} & \frac{\partial x}{\partial h} \\ \frac{\partial y}{\partial \phi} & \frac{\partial y}{\partial \lambda} & \frac{\partial y}{\partial h} \\ \frac{\partial z}{\partial \phi} & \frac{\partial z}{\partial \lambda} & \frac{\partial z}{\partial h} \end{matrix}}_{J} \begin{bmatrix} \delta\phi \\ \delta\lambda \\ \delta h \end{bmatrix} =$$

$$B \begin{bmatrix} \delta a \\ \delta f \end{bmatrix} + J \begin{bmatrix} \delta\phi \\ \delta\lambda \\ \delta h \end{bmatrix}, \qquad (۸)$$

ماتریس B در تقریب کروی برابر است با (ونیچک،۱۹۸۶):

$$B \quad \begin{bmatrix} \cos\phi \cos\lambda & a \sin^2\phi \cos\phi \cos\lambda \\ \cos\phi \sin\lambda & a \sin^2\phi \cos\phi \sin\lambda \\ \sin\phi & a(\sin^2\phi \quad 2) \sin\phi \end{bmatrix}, \qquad (۹)$$

ماتریس J در تقریب کروی برابر خواهد بود با (ونیچک،۱۹۸۶):

(۱۰)

$$J \begin{bmatrix} a\sin\phi\cos\lambda & a\cos\phi\sin\lambda & \cos\phi\cos\lambda \\ a\sin\phi\sin\lambda & a\cos\phi\cos\lambda & \cos\phi\sin\lambda \\ a\cos\phi & 0 & \sin\phi \end{bmatrix},$$

با جایگذاری رابطه (۸) در رابطه (۵) رابطه زیر به‌دست‌می‌آید:

$$J\left(\begin{bmatrix}\phi_2\\ \lambda_2\\ h_2\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}\phi_1\\ \lambda_1\\ h_1\end{bmatrix}\right) + B\begin{bmatrix}\delta a\\ \delta f\end{bmatrix} + T^{G2}\begin{bmatrix}\varepsilon x_2\\ \varepsilon y_2\\ \varepsilon z_2\end{bmatrix}$$

$$T^{G1}\begin{bmatrix}\varepsilon x_1\\ \varepsilon y_1\\ \varepsilon z_1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\delta_{xE}\\ \delta_{yE}\\ \delta_{zE}\end{bmatrix} \quad 0, \qquad (۱۱)$$

می‌توان ماتریس دوران T را به تقریب، یکسان فرض کرد (ونیچک، ۱۹۸۶):

(۱۲)

$$J\left(\begin{bmatrix}\phi_2\\ \lambda_2\\ h_2\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}\phi_1\\ \lambda_1\\ h_1\end{bmatrix}\right) + B\begin{bmatrix}\delta a\\ \delta f\end{bmatrix} + T\begin{bmatrix}\delta_{\varepsilon x}\\ \delta_{\varepsilon y}\\ \delta_{\varepsilon z}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\delta_{xE}\\ \delta_{yE}\\ \delta_{zE}\end{bmatrix} \quad 0,$$

با فرض اینکه مشاهدات شامل مختصات ژئودتیکی دو دستگاه است، باید مسئله را به شکل پارامتری زیر تبدیل کرد:

(۱۳)

$$\begin{bmatrix}\phi_2 & \phi_1\\ \lambda_2 & \lambda_1\\ h_2 & h_1\end{bmatrix} \quad J^{-1}\left(\begin{bmatrix}\delta_{xE}\\ \delta_{yE}\\ \delta_{zE}\end{bmatrix} + T\begin{bmatrix}\delta_{\varepsilon x}\\ \delta_{\varepsilon y}\\ \delta_{\varepsilon z}\end{bmatrix} + B\begin{bmatrix}\delta a\\ \delta f\end{bmatrix}\right),$$

با انجام محاسبات ماتریسی رابطه (۱۳) خواهیم داشت:

$$\begin{bmatrix}\phi_2 & \phi_1\\ \lambda_2 & \lambda_1\\ h_2 & h_1\end{bmatrix} \quad \underset{\text{spherical}}{A} \quad X \qquad (۱۴)$$

$$X = [\delta_{xE}, \delta_{yE}, \delta_{zE}, \delta_{\varepsilon x}, \delta_{\varepsilon y}, \delta_{\varepsilon z}, \delta a, \delta f]^T, \qquad (۱۵)$$

رابطه (۱۴)، یک دستگاه معادلات ماتریسی است. به علت تعداد زیاد نقاط و درنتیجه تعداد زیاد معادلات نسبت به تعداد مجهولات، دستگاه معادلات یک دستگاه معادلات فرامعین است و با توجه به وجود خطا در مشاهدات (اختلاف مختصات منحنی‌الخط نقاط)، دستگاه معادلات به شکل زیر بازنویسی می‌شود:

$$\begin{bmatrix}\Delta\Phi_i\\ \Delta\lambda_i\\ \Delta h_i\end{bmatrix}_{3i\times 1} + \begin{bmatrix}e_{\Delta\Phi_i}\\ e_{\Delta\lambda_i}\\ e_{\Delta h_i}\end{bmatrix}_{3i\times 1} = \underset{\text{spherical}_{3i\times 8}}{A} \quad X_{8\times 1} \qquad (۱۶)$$

با روش‌های مختلف سرشکنی نظیر روش کمترین مربعات، می‌توان دستگاه معادلات (۱۶) را حل کرد و جواب بهینه را به‌دست‌آورد.

۳-۲ حل مسئله تبدیل دیتوم به روش دیفرانسیلی با روابط کامل بیضوی

براساس معادله (۸)، اختلاف مختصات ژئودتیکی در دو دستگاه مرجع برابر است با:

$$\begin{bmatrix}\delta x\\ \delta y\\ \delta z\end{bmatrix}^G = B\begin{bmatrix}\delta a\\ \delta f\end{bmatrix} + J\begin{bmatrix}\delta\phi\\ \delta\lambda\\ \delta h\end{bmatrix}$$

که با درنظرنگرفتن تقریب کروی ماتریس‌های J و Bخواهیم داشت:

(۱۷)

$$B = \begin{matrix} \frac{N\cos\phi\cos\lambda}{a} & \frac{M\sin\phi^2}{1-f}\cos\phi\cos\lambda \\ \frac{N\cos\phi\sin\lambda}{a} & \frac{M\sin\phi^2}{1-f}\cos\phi\sin\lambda \\ \frac{N(1-f)^2\sin\phi}{a} & 2N\sin\phi\,(1 \quad f) + M\sin^2\phi\,(1 \quad f) \end{matrix},$$

(۱۸)

$$J = \begin{bmatrix} (M+h)\sin\phi\cos\lambda & (M+h)\cos\phi\sin\lambda & \cos\phi\cos\lambda \\ (M+h)\sin\phi\sin\lambda & (M+h)\cos\phi\cos\lambda & \cos\phi\sin\lambda \\ (M+h)\cos\phi & 0 & \sin\phi \end{bmatrix}$$

نحوه محاسبه درایه‌های ماتریس‌های فوق در پیوست الف ارائه شده است.

با جایگذاری این ماتریس‌ها در معادله زیر، بدون اعمال تقریب، خواهیم داشت:

(۱۹)

$$\begin{bmatrix}\phi_2 & \phi_1\\ \lambda_2 & \lambda_1\\ h_2 & h_1\end{bmatrix} = J^{-1}\left(\begin{bmatrix}\delta_{xE}\\ \delta_{yE}\\ \delta_{zE}\end{bmatrix} + T\begin{bmatrix}\delta_{\varepsilon x}\\ \delta_{\varepsilon y}\\ \delta_{\varepsilon z}\end{bmatrix} + B\begin{bmatrix}\delta a\\ \delta f\end{bmatrix}\right),$$

ماتریس دوران T برای دو دستگاه برابر است با:

(۲۰)

$$= \begin{bmatrix} 0 & a\sin\phi & a\cos\phi\sin\lambda \\ a\sin\phi & 0 & a\cos\phi\cos\lambda \\ a\cos\phi\sin\lambda & a\cos\phi\cos\lambda & 0 \end{bmatrix}^{T},$$

با انجام محاسبات ماتریسی رابطه بالا خواهیم داشت:

$$\begin{bmatrix} \phi_2 & \phi_1 \\ \lambda_2 & \lambda_1 \\ h_2 & h_1 \end{bmatrix} = \underset{\text{ellipsoidal}}{A} \quad X \qquad (۲۱)$$

همچون قسمت قبل، با توجه به وجود خطا در مشاهدات و فرامعین بودن دستگاه معادلات ماتریسی فوق، می‌توان دستگاه معادلات (۲۰) را نیز به‌صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\begin{bmatrix} \Delta\Phi_i \\ \Delta\lambda_i \\ \Delta h_i \end{bmatrix}_{3i\times1} + \begin{bmatrix} e_{\Delta\Phi_i} \\ e_{\Delta\lambda_i} \\ e_{\Delta h_i} \end{bmatrix}_{3i\times1} = \underset{\text{ellipsoidal}_{3i\times8}}{A} \quad X_{8\times1} \qquad (۲۲)$$

به‌منظور برآورد بهینه پارامترهای تبدیل دو سطح مبنا به یکدیگر با استفاده از داده‌های آلوده به خطاهای تصادفی، می‌توان دستگاه معادلات (۲۲) را از روش کمترین مربعات حل کرد و جواب بهینه را به‌دست‌آورد. در پیوست ب درایه‌های ماتریس‌های طرح دو روش ارائه شده است.

۲-۴ بررسی مشکل مؤلفه ارتفاعی در تبدیل سطوح و ارائه یک مدل برای حل هم‌زمان پارامترهای تبدیل و ضرایب سطح

برای استفاده از روابط تبدیل سطوح مبنا به یکدیگر لازم است مختصات ژئودتیک نقاط مشترک به‌صورت سه‌بعدی در هر دو سطح مبنا معلوم باشد. یک مشکل اساسی در به‌کارگیری روابط ریاضی تبدیل وجود دارد که امکان استفاده مستقیم از روش‌های کلاسیک ارائه‌شده برای حل این مسئله را غیرممکن می‌سازد. تعیین موقعیت ژئودتیک نقاط در سطوح مبنای جدید با استفاده از سامانه‌های تعیین موقعیت جهانی به‌صورت همگن و در سه‌بعد صورت می‌گیرد؛ این در حالی است که در تعیین موقعیت نقاط به‌صورت کلاسیک، مختصات ژئودتیک نقاط در دو بعد مسطحاتی تعیین و ارتفاع نقاط در بهترین حالت به‌صورت ارتفاع ارتومتریک نسبت به سطح مبنای محلی اندازه‌گیری شده است. به‌منظور به‌کارگیری روابط کلاسیک تبدیل سطوح مبنا در این حالت خاص، لازم است به‌نحوی تبدیل ارتفاع ارتومتریک به ژئودتیک در سطح مبنای مربوطه صورت گیرد. رابطه تبدیل ارتفاع ارتومتریک به ژئودتیک برای یک سطح مبنا عبارتست از:

$$h = N + H \qquad (۲۳)$$

که h ارتفاع ژئودتیک، H ارتفاع ارتومتریک و N ارتفاع ژئوئید است. برای تعیین ارتفاع ژئوئید که به کمک آن بتوان مشکل تبدیل سطوح مبنا به یکدیگر را حل کرد، می‌توان از روش‌های مختلفی استفاده کرد که ازجمله مهم‌ترین آنها روش‌های زیر هستند:

۱) استفاده از مدل‌های محلی/ جهانی جاذبه و محاسبه ارتفاع ژئوئید؛

۲) گسترش مدل ریاضی روابط تبدیل، جهت برآورد هم‌زمان پارامترهای تبدیل سطوح ارتفاعی و سطح تبدیل ارتفاعی.

در صورت وجود مدل ژئوئید دقیق محلی می‌توان انتظار داشت با محاسبه ارتفاع ژئوئید در نقاط مدنظر و تصحیح ارتفاع ارتومتریک به ارتفاع ژئودتیک به نتایج دقیقی دست یافت، ولی به علت نبود مدل‌های محلی دقیق در بیشتر مناطق، به‌کارگیری این روش امکان‌پذیر نیست.

راه‌حل جایگزین برای استفاده از روش اول، استفاده از مدل‌های ترکیبی جهانی جاذبه است که امروزه با وجود ماهواره‌های اختصاصی گرانی‌سنجی و تلفیق آن با داده‌های مختلف مرتبط با میدان جاذبه ازجمله داده‌های ارتفاع‌سنجی ماهواره‌ای می‌توان ارتفاع ژئوئید را در نقاط مورد نظر در حد دقت چشمداشتی از مدل‌های جهانی جاذبه و نسبت به هر بیضوی دلخواه اعم از جهانی و محلی برآورد کرد. خوشبختانه با افزایش روزافزون این مدل‌های جهانی، سرویس‌های برخطی نیز برای محاسبه تابعک‌های مختلف میدان جاذبه ارائه شده است که ازآن‌جمله می‌توان به سرویس برخط محاسبه مرکز علوم زمین آلمان (ICGEM) اشاره کرد که امکان محاسبه و نمایش

تابعک‌های مختلف را براساس مدل‌های جهانی متعدد برای کاربران فراهم می‌سازد. جزئیات بیشتر درباره مبانی نظری نحوه محاسبه این تابعک‌ها در گزارش فنی برخط مرکز مذکور به نشانی (http://icgem.gfz-potsdam.de/str-0902.pdf) ارائه شده است.

در روش دوم می‌توان مدل ریاضی برآورد پارامترهای تبدیل سطوح مبنا را با افزودن ضرایب سطح تصحیح تبدیل ارتفاع ارتومتریک به ژئودتیک به حالت یک مدل تعمیم‌یافته تبدیل و هم‌زمان با برآورد پارامترهای تبدیل، ضرایب سطح تصحیح را نیز برآورد کرد. در این روش نیازی به هیچ‌گونه داده جانبی وجود ندارد و تنها می‌توان با داشتن اطلاعات مورد نیاز برای تعیین پارامترهای تبدیل سطوح مبنا، این ضرایب را نیز تعیین کرد. بدیهی است داشتن تعداد نقاط مشترک کافی به‌گونه‌ای که با افزودن ضرایب مجهول سطح تبدیل، همچنان درجه آزادی تعیین مجهولات عدد قابل قبولی باشد نیز ضروری است.

با توجه به تغییرات ارتفاع ژئوئید در مقیاس محلی، می‌توان یک مدل ریاضی چندجمله‌ای را برحسب طول و عرض ژئودتیک مدنظر به‌کارگرفت:

$$N_i(\phi,\lambda) \quad a_0 + a_1(\phi_i \quad \phi_m) + a_2(\lambda_i \quad \lambda_m) + a_3(\phi_i \quad \phi_m)^2 + a_4(\lambda_i \quad \lambda_m)^2, \qquad (۲۴)$$

که λ_m و ϕ_m به‌ترتیب طول و عرض ژئودتیک متوسط منطقه‌ای هستند که نقاط مشترک در آن قرار دارند. λ_i و ϕ_i مختصات منحنی‌الخط نقطه محاسباتی هستند که هدف، تعیین ارتفاع ژئوئید (N_i) آن است. مشاهدات، اختلاف مختصات ایستگاه‌هایی هستند که مختصات سه‌بعدی آنها (مختصات سه‌بعدی ژئودتیک نقاط مشترک نسبت به یک بیضوی و مختصات مسطحاتی همان نقاط در بیضوی دیگر به‌همراه ارتفاع ارتومتریک آنها) در هر دو دستگاه معلوم است. هم‌زمان با برآورد پارامترهای تبدیل سطوح مبنا، ضرایب مجهول این چندجمله‌ای با استفاده از روش کمترین مربعات برآورد می‌شوند. با داشتن نتایج برآورد هم‌زمان مجهولات می‌توان با ارزیابی نتایج از بهینه بودن مدل ریاضی پیشنهادی نیز اطمینان حاصل کرد.

۳ پیاده‌سازی عددی و تحلیل نتایج

۳-۱ تبدیل دیتوم کشور نیجریه با روش‌های پیشنهادی

برای بررسی کارایی و تحلیل نتایج عددی پیاده‌سازی روش پیشنهادی، از داده‌های کشور نیجریه (شکل ۱) استفاده شد (اروپابو، ۲۰۱۴). در این داده‌ها، مختصات پنجاه نقطه مشترک در سراسر این کشور در دو سطح مبنای مختلف در دسترس است. سطح مبنای اول MINNA و بیضوی آن CLARCK-1880 است و سطح مبنای دوم WGS84 است. ارتفاع‌های قرائت‌شده در سطح مبنای اول از جنس ارتومتریک است که باید آنها را به ژئودتیک تبدیل کرد. برای محاسبه ارتفاع ژئوئید در این مقاله، از دو روش مبتنی بر محاسبه ارتفاع ژئوئید از مدل های محلی/ جهانی جاذبه و روش تقریب چندجمله‌ای با برآورد ضرایب سطح به روش کمترین مربعات استفاده شده است. نتایج نشان می‌دهند روش تقریب چندجمله‌ای از دقت بیشتری برخوردار است. برای تعیین ارتفاع ژئوئید مربوط به بیضوی کلارک از رابطه (۲۳) می‌توان نوشت:

$$h_i^{CLARCK} = H_i^{CLARCK} + N_i^{CLARCK}$$

و در روش مبتنی بر محاسبه ارتفاع ژئوئید از مدل‌های محلی/ جهانی داریم:

$$h_i^{CLARCK} = H_i^{CLARCK} + \underbrace{N_i^{CLARCK}}_{\text{gravity model}}$$

رابطه محاسبه ارتفاع ژئوئید از روش تقریب چندجمله‌ای ضرایب سطح به‌صورت زیر است:

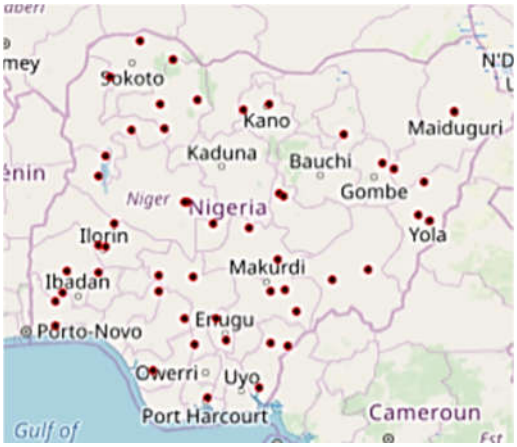
$$h_i^{CLARCK} = H_i^{CLARCK} + \underbrace{N_i^{CLARCK}}_{\text{polynomial approximation}}$$

که براساس رابطه (۲۴) داریم:

$$N_i^{CLARCK}(\phi,\lambda) \quad a_0 + a_1(\phi_i \quad \phi_m^{CLARCK}) + a_2(\lambda_i \quad \lambda_m^{CLARCK}) + a_3(\phi_i \quad \phi_m^{CLARCK})^2 + a_4(\lambda_i \quad \lambda_m^{CLARCK})^2$$

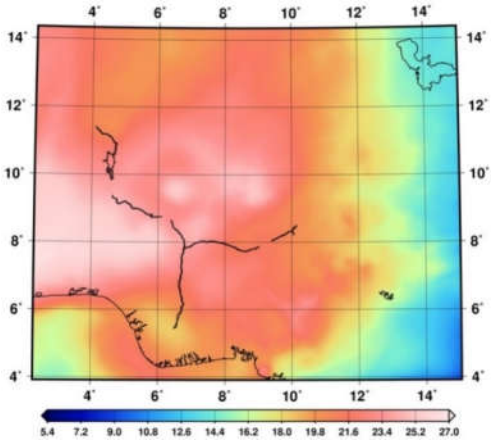
همچنین برای بررسی اثر تقریب کروی و بیضوی در محاسبات، پارامترهای تبدیل به هر دو روش محاسبه و نتایج به‌صورت مشابه تحلیل شده است؛ گرچه با توجه به ابعاد منطقه مورد مطالعه و به علت تفاوت تقریب کروی و بیضوی شاید نتوان تفاوت محسوسی انتظار داشت.

برای راستی‌آزمایی نتایج روش‌ها و تقریب‌های مختلف از روش کنترل نتایج در نقاط کنترل استفاده شد. به عبارت دیگر، متوسط مربعات خطای محاسبات در نقاطی مدنظر قرار گرفت که در مرحله محاسبه ضرایب، از فهرست نقاط مشترک کنار گذاشته شده بودند. همچنین برای وابسته نبودن نتایج به نقاط محاسباتی و نقاط کنترل خطا، محاسبات با به‌کارگیری چهل‌ونه نقطه از بین پنجاه نقطه انجام شد و خطا در تک نقطه کنار گذاشته شده محاسبه شد. فرایند محاسبات به تعداد پنجاه بار تکرار و در هر بار نقطه کنترل یکی از پنجاه نقطه انتخاب شد. درنهایت، از متوسط خطای محاسبه پنجاه مرتبه به‌عنوان خطای معیار استفاده شد.



شکل ۱. نقشه نقاط مشاهده‌شده در دو دیتوم مختلف در کشور نیجریه.

برای محاسبه ارتفاع ژئوئید نقاط در سطح مبنای اول از مدل جهانی جاذبی EIGEN-6C4 استفاده شد. این مدل یکی از کامل‌ترین مدل‌های جهانی جاذبه است که در آن با ترکیب داده‌های مختلف، ضرایب ژئوپتانسیل تا درجه و مرتبه ۲۱۹۰ ارائه شده است. نقشه ارتفاع ژئوئید حاصل از این محاسبات در شکل ۲ نمایش داده شده است.



شکل۲. نقشه ارتفاع ژئوئید محاسبه‌شده منطقه موردمطالعه برحسب متر .

همان‌گونه که در شکل ۲ مشخص شده است، تغییرات ارتفاع ژئوئید در این محدوده نیز درخور توجه است و تصحیح نکردن آن می‌تواند به خطای فاحش در تعیین پارامترهای تبدیل منجر شود.

ضرایب مدل چندجمله‌ای سطح تصحیح ارتفاع ژئوئید در روش دوم نیز از روش کمترین مربعات و بر مبنای فرایند کنترلی بیان‌شده برآورد شده است. به علت وجود ضرایب مجهول صفحه تصحیح در مؤلفه ارتفاعی، معادله ریاضی مؤلفه ارتفاعی شامل هر دو دسته مجهول (پارامترهای تبدیل سطوح مبنا و ضرایب مجهول سطح تصحیح ارتفاع) خواهد بود. نتیجه برآورد در جدول ۱ ارائه شده است.

جدول ۱. ضرایب برآورد شده چند جمله‌ای سطح تصحیح ارتفاع ژئوئید منطقه.

a_0	a_1	a_2	a_3	a_4
۲۳/۱	۴/۵۶	۴۰/۲	۸۷۱/۲	۱۳۱/۴

با توجه به به‌کارگیری دو روش تقریب کروی و بیضوی در محاسبه ضرایب ماتریس طرح و همچنین استفاده از دو روش تبدیل ارتفاع ارتومتریک به ارتفاع ژئودتیک نتایج در چهار حالت زیر با هم مقایسه می‌شوند:

حالت اول) محاسبه براساس تقریب کروی و محاسبه ارتفاع ژئوئید از مدل های محلی/جهانی جاذبه؛

حالت دوم) محاسبه براساس تقریب بیضوی و محاسبه ارتفاع ژئوئید از مدل های محلی/جهانی جاذبه؛

حالت سوم) محاسبه براساس تقریب کروی و محاسبه ارتفاع ژئوئید از تقریب چندجمله‌ای؛

حالت چهارم) محاسبه براساس تقریب بیضوی و محاسبه ارتفاع ژئوئید از تقریب چندجمله‌ای.

ضرایب تبدیل سطوح مبنای برآوردشده در چهار حالت مذکور به‌صورت مقایسه‌ای در جدول ۲ ارائه شده است.

جدول ۲. پارامترهای برآوردشده تبدیل سطوح.

پارامتر تبدیل	تقریب ارتفاع ژئوئید با مدل جاذبی		تقریب ارتفاع ژئوئید با سطح تصحیح	
	تقریب کروی	تقریب بیضوی	تقریب کروی	تقریب بیضوی
$dx\ (m)$	۹۶/۹۶۳	۹۶/۶۹۷	−۱/۲۰۵	−۱/۲۲۶
$dy\ (m)$	−۶۹/۹۱۹	−۶۹/۹۴۲	−۰/۲۴۳	−۰/۲۴۶
$dz\ (m)$	۲۴۸/۴۱	۲۴۷/۳۸	−۲/۱۳۱	۲/۱۳۳
$\epsilon_x\ (sec)$	−۳/۳۴۵	−۳/۳۴۵	−۲/۹۵۰	−۲/۹۶۰
$\epsilon_y\ (sec)$	−۲/۹۰۲	−۲/۸۷۳	۰/۴۴۸	۰/۴۴۸
$\epsilon_z\ (sec)$	−۰/۸۱۳	−۰/۸۲۸	۱/۹۹۰	۱/۹۸۰
$da\ (m)$	۱۷۷/۹۴۳	۱۷۷/۶۰۰	۱/۰۶۵	۱/۰۸۷
$df\ \times ۱۰^۵$	−۶/۶۷۷	−۶/۶۶۶	−۰/۱۱۵	−۰/۱۱۵

مقایسه نتایج ارائه‌شده در جدول ۲ نشان می‌دهد پارامترهای برآوردشده با تقریب‌های کروی و بیضوی تقریباً مقادیر یکسانی دارند که با توجه به مطالب بحث‌شده، جزئی بودن اختلافات ناشی از کوچک بودن ابعاد منطقه مورد مطالعه است. با وجود این، تفاوت در مقادیر پارامترهای مرتبط با انتقال، شکل و اندازه بین بیضوی دو سطح مبنا در دو روش محاسبه ارتفاع ژئوئید معنی‌دار است؛ این تفاوت می‌تواند ناشی از وجود ضرایب سطح تصحیح باشد که نقشی مشابه این پارامترها در مدل‌سازی اثر پارامترهای مزبور دارند.

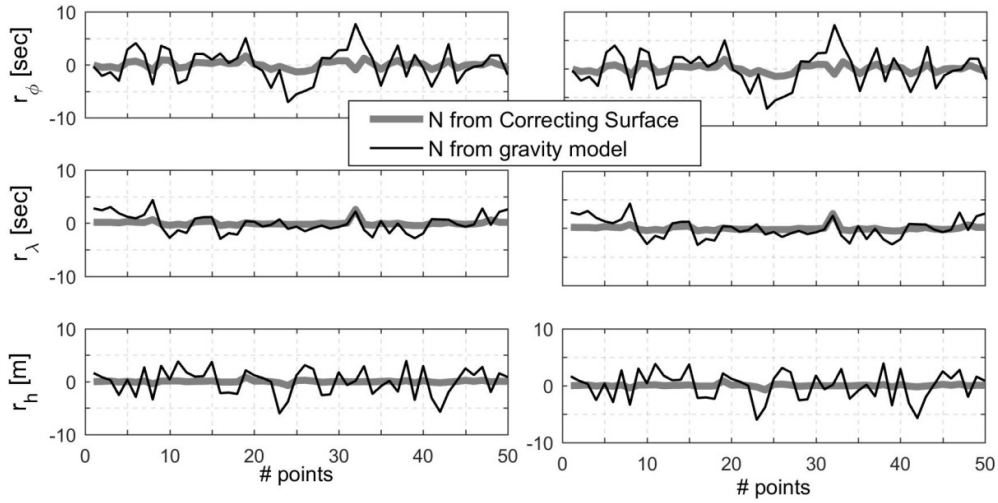
در چهار حالت مزبور و با روش کنترل خطای مورد بحث، متوسط نرم خطای مؤلفه‌های مختلف مختصات محاسبه و نتایج برای هر سه مؤلفه مختصات ژئودتیک در جدول ۳ ارائه شده است. مقایسه عددی نتایج نشان‌دهنده بهبود معنی‌دار نرم خطا در هر مؤلفه در حالت برآورد ارتفاع ژئوئید با استفاده از سطح تصحیح ارتفاعی است به‌گونه‌ای که خطا در مؤلفه‌های طول و عرض ژئودتیک بهتر از یک ثانیه و در مؤلفه ارتفاعی در حدود دسی‌متر است، درحالی‌که خطای روش تعیین ارتفاع ژئوئید با بهره‌گیری از مدل جهانی جاذبه در دو مؤلفه زاویه‌ای در حدود چند ثانیه و در مؤلفه ارتفاعی در حدود ۲ متر است. خطای معنی‌دار در مؤلفه ارتفاعی می‌تواند به علت جهانی بودن مدل جاذبه و همچنین خطای ارتفاع ارتومتریک باشد.

به‌منظور اطمینان از نتایج برآورد، خطای برآورد هر سه مؤلفه مختصات منحنی‌الخط در هر پنجاه بار تکرار (انتخاب یک نقطه به‌عنوان نقطه کنترل در هر بار محاسبه) و در هر دو روش تعیین ارتفاع ژئوئید و با هر دو تقریب کروی و بیضوی به‌صورت مجزا برای تمامی نقاط مورد استفاده محاسبه شد. نتایج در شکل ۳ به‌صورت یکپارچه نمایش داده شده است. به‌صورت کاملاً معنی‌داری، خطای محاسبه‌شده در استفاده از روش تعیین ارتفاع ژئوئید به کمک سطح تصحیح نسبت به استفاده از روش مدل جاذبی کمتر است. این موضوع برای هر سه مؤلفه صادق است، هر چند در مؤلفه ارتفاعی این سهم مشهودتر است.

برای انجام کنترل کیفی نهایی و تصمیم‌گیری مبتنی بر اصول آماری، مناسب بودن مدل ریاضی و آلوده نبودن مشاهدات به اشتباهات و همچنین درستی وزن انتخابی، آزمون‌های آماری مربوط روی نتایج برآورد انجام گرفته و در قسمت بعد به تفصیل توضیح داده شده است.

جدول ۳. میانگین نرم خطای مؤلفه‌های مختصاتی.

روش	نرم خطای عرض ژئودتیک (ثانیه)	نرم خطای طول ژئودتیک (ثانیه)	نرم خطای ارتفاع ژئودتیک (متر)
تقریب کروی و محاسبه ارتفاع ژئوئید از مدل‌های محلی/جهانی جاذبی	۲/۵۴۲	۱/۳۹۷	۲/۰۸۰
تقریب بیضوی و محاسبه ارتفاع ژئوئید از مدل‌های محلی/جهانی جاذبی	۲/۵۵۴	۱/۴۰۵	۲/۰۸۰
تقریب کروی و محاسبه ارتفاع ژئوئید از سطح تصحیح چندجمله‌ای	۰/۵۵۸	۰/۲۶۴	۰/۱۳۱
تقریب بیضوی و محاسبه ارتفاع ژئوئید از سطح تصحیح چندجمله‌ای	۰/۵۵۸	۰/۲۶۴	۰/۱۳۰



شکل ۳. خطای مؤلفه‌های موقعیت محاسبه‌شده بر مبنای تقریب کروی (سمت راست) و بیضوی (سمت چپ).

۳-۲ آزمون‌های آماری

به‌منظور ارزیابی نتایج و حصول اطمینان از صحت مشاهدات، مناسب بودن مدل ریاضی مورداستفاده و همچنین تناسب وزن نسبی مشاهدات از آزمون آماری عامل واریانس ثانویه استفاده می‌شود:

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{\hat{\mathbf{v}}^{\mathrm{T}} \mathrm{P} \hat{\mathbf{v}}}{\mathrm{df}}, \qquad (۲۵)$$

که $\hat{\mathrm{v}}$ بردار تصحیحات برآوردشده مشاهدات به روش کمترین مربعات و P ماتریس وزن مشاهدات است. برای برآورد صحیح مجهولات باید مشاهدات با وزن مناسب در فرایند برآورد قرار بگیرند. در محاسبات، فرایند نسبت‌دهی وزن به‌صورت تکراری صورت گرفته است به‌گونه‌ای که با انتخاب وزن اولیه و تکرار اولیه سرشکنی و برآورد خطای به‌دست‌آمده در نقاط کنترل، وزن نسبی مشاهدات تصحیح و دوباره سرشکنی انجام شده است؛ درنتیجه، عامل واریانس برآوردشده برای حصول اطمینان از مناسب بودن مدل انتخابی و نبود مشاهدات اشتباه در بین مشاهدات مورداستفاده در برآورد مجهولات آزمایش شده است. فرضیه مورداستفاده در آزمون عامل واریانس ثانویه به‌صورت زیر است:

$$\begin{cases} H_0: \sigma_0^2 = \hat{\sigma}_0^2 \\ H_1: \sigma_0^2 \neq \hat{\sigma}_0^2 \end{cases} \quad (۲۶)$$

آماره این آزمون عبارتست از:

$$f = \frac{df\hat{\sigma}_0^2}{\sigma_0^2} \propto \chi_{df}^2 \quad (۲۷)$$

این آماره از توزیع کای دو با درجه آزادی df پیروی می‌کند. قاعده تصمیم درباره فرضیه آماری فوق به‌صورت زیر است:

(۲۸)

$$P(f > L_{max} \text{ or } f < L_{min}, H_0: True) = \alpha$$

که مقادیر بحرانی L_{min} و L_{max} از تابع توزیع کای دو محاسبه می‌شوند:

$$L_{max} = \chi_{df,1-\frac{\alpha}{2}}^2, L_{min} = \chi_{df,\frac{\alpha}{2}}^2 \quad (۲۹)$$

برای مثال با فرض ۵۰ نقطه مشاهداتی یا به‌عبارتی، ۱۵۰ معادله مشاهده و ۸ مجهول تبدیل سطوح مبنا، درجه آزادی مسئله ۱۴۲ است که در صورت فرض سطح اطمینان ۹۵ درصد حد بالا برابر ۱۷۰/۸ و حد پایین برابر ۴/۱۱۵ به‌دست‌می‌آید. آماره آزمون برای چهار روش موردبحث به‌همراه عامل واریانس ثانویه برآوردشده به‌ترتیب در جدول ۴ ارائه شده است.

جدول۴. آماره آزمون و عامل واریانس برآوردشده در چهار روش محاسباتی.

روش	مقدار آماره	عامل واریانس
تقریب کروی و تعیین ارتفاع ژئوئید از مدل جاذبی	۱۶۰/۷۰	۱/۱۳۱۵
تقریب بیضوی و تعیین ارتفاع ژئوئید از مدل جاذبی	۱۶۰/۸۰	۱/۱۳۲۸
تقریب کروی و تعیین ارتفاع ژئوئید از سطح تصحیح	۱۴۸/۷۰	۱/۰۴۷۶
تقریب بیضوی و تعیین ارتفاع ژئوئید از سطح تصحیح	۱۴۵/۷۰	۱/۰۲۶۵

همان‌طور که از نتایج عددی آماره‌های آزمون و همچنین عامل واریانس برآوردشده نمایان است، روش‌هایی که بر مبنای محاسبه ارتفاع ژئوئید از مدل چندجمله‌ای سطح تصحیح بنا شده‌اند، نتایج بهتری در مقایسه با روش دیگر دارند. به‌کارگیری تقریب بیضوی در تشکیل ماتریس طرح معادلات مشاهدات نیز باعث بهبود مدل ریاضی می‌شود، ولی مشابه تحلیل‌های دیگر ارائه‌شده، این بهبود در مقایسه با اثر بهبود مؤلفه ارتفاعی، اثری فرعی و با تأثیر کمتر است.

۴ نتیجه‌گیری و پیشنهادها

با توجه به نتایج و منطق محاسباتی مورد استفاده در مسئله تبدیل سطوح مبنا، استفاده از تقریب بیضوی به‌همراه مقادیر صحیح مختصات نقاط مشترک نسبت به تقریب کروی به نتایج بهتری منجر می‌شود؛ گرچه سهم درستی مختصات ارتفاعی در مقایسه با سهم خطای تقریب کروی به‌مراتب بیشتر است. بدیهی است در مسائلی که محدوده جغرافیایی کوچک باشد، نمی‌توان انتظار داشت که تفاوت زیادی در تقریب‌های کروی و بیضوی وجود داشته باشد؛ هرچه محدوده وسیع‌تر شود، تفاوت این دو روش بیشتر آشکار می‌شود.

برای حل مشکل تبدیل مؤلفه ارتفاعی از ارتفاع ارتومتریک به ارتفاع ژئودتیک نیز روش حل هم‌زمان مسئله با به‌کارگیری یک مدل تعمیم‌یافته پیشنهاد شد که ضمن حل مشکل مؤلفه ارتفاعی، نتایج بهینه‌ای را در تبدیل سطوح مبنا به دنبال داشت. حُسن این روش در نیاز نداشتن به وجود اطلاعات اضافی درباره میدان جاذبه است و تنها با به‌کارگیری مدل تعمیم‌یافته امکان برآورد هم‌زمان کلیه پارامترها وجود دارد. مقایسه عددی نشان داد کارایی روش پیشنهادی حتی از به‌کارگیری مدل‌های جهانی ترکیبی جاذبی هم بیشتر است. بررسی کارایی این روش در مقایسه با مدل‌های محلی جاذبه برای محاسبه ارتفاع ژئوئید و حل مسئله تبدیل دیتوم برای کارهای آتی پژوهشی پیشنهاد می‌شود.

منابع

Badekas, J., 1969, Investigations related to the establishment of a world geodetic system: Ohio State University, **8**, 181 pp.

Bursa, M, 1962, The theory for the determination of the non-parallelism of the minor axis of the reference ellipsoid and the inertial polar axis of the Earth, and the planes of the initial astronomic and geodetic meridians from the observation of artificial Earth satellites: Studia Geophysica et Geodaetica, **6**, 209-214.

Deakin, R. E., 2004, The standard and abridged Molodensky coordinate transformation formulae: Department of Mathematical and Geospatial Sciences, RMIT University, 1-21.

Molodensky M., Eremeev V. and Yurkina M., 1962, Methods for study of the external gravitational field and figure of the earth, Technical notes, Moscow.

Orupabo, S., Opuaji, T. A., and Adekunle, I. A., 2014, 50-Points data for deriving transformation parameters of geodetic data in Nigeria: Indian Journal of Scientific Research and Technology, **2**, 97-101.

Vanicek, P., and Krakiwsky, E. J., 1986, Geodesy: The Concepts: Elsevier.

Wolf, H., 1963, Geometric connection and re-orientation of three-dimensional triangulation nets: Bulletin Géodésique, **68**, 165-169.

Závoti, J., and Kalmár, J., 2016, A comparison of different solutions of the Bursa–Wolf model and of the 3D, 7-parameter datum transformation: Acta Geodaetica et Geophysica, **51**, 245-256.

پیوست الف

محاسبه درایه‌های ماتریس‌های J و B

برای محاسبه درایه‌های ماتریس B مشتقات زیر باید محاسبه شوند:

$$\frac{\partial x}{\partial a} = \frac{\cos\phi\cos\lambda}{(1-f(2-f)\sin\phi^2)^{1/2}} = \frac{\cos\phi\cos\lambda}{(1-e^2\sin\phi^2)^{1/2}} = \frac{N\cos\phi\cos\lambda}{a} \qquad \text{(الف-۱)}$$

در تقریب کروی:

$$\cos\phi\cos\lambda \qquad \text{(الف-۲)}$$

$$\frac{\partial y}{\partial a} = \frac{\cos\phi\sin\lambda}{(1-f(2-f)\sin\phi^2)^{1/2}} = \frac{\cos\phi\sin\lambda}{(1-e^2\sin\phi^2)^{1/2}} = \frac{N\cos\phi\sin\lambda}{a} \qquad \text{(الف-۳)}$$

در تقریب کروی:

$$\cos\phi\sin\lambda \qquad \text{(الف-۴)}$$

$$\frac{\partial z}{\partial a} = \frac{(1-f)^2\sin\phi}{(1-f(2-f)\sin\phi^2)^{1/2}} = \frac{(1-f)^2\sin\phi}{(1-e^2\sin\phi^2)^{1/2}} = \frac{N(1-f)^2\sin\phi}{a} \qquad \text{(الف-۵)}$$

در تقریب کروی:

$$\sin\phi \qquad \text{(الف-۶)}$$

$$\frac{\partial x}{\partial f} = \frac{1}{2}a\cos\phi\cos\lambda\,(1\quad f(2\quad f)\sin\phi^2)^{-3/2}(\quad(2\quad 2f)\sin\phi^2\,) = \frac{a\cos\phi\cos\lambda\,(1-f)\sin\phi^2}{(1-e^2\sin\phi^2)^{3/2}} \qquad \text{(الف-۷)}$$

می‌دانیم شعاع انحنای نصف‌النهار برابر است با:

$$M = \frac{a(1-f)^2}{(1-e^2\sin\phi^2)^{3/2}} \qquad \text{(الف-۸)}$$

در رابطه بالا داریم: M با جایگذاری

$$\frac{\partial x}{\partial f} = \frac{M\sin\phi^2}{1-f}\cos\phi\cos\lambda \qquad \text{(الف-۹)}$$

در تقریب کروی:

$$a\sin^2\phi\cos\phi\cos\lambda \qquad \text{(الف-۱۰)}$$

و همچنین خواهیم داشت:

$$\frac{\partial y}{\partial f} = \frac{1}{2}a\cos\phi\sin\lambda\,(1\quad f(2\quad f)\sin\phi^2)^{-3/2}(\quad(2\quad 2f)\sin\phi^2\,) = \frac{a\cos\phi\sin\lambda\,(1-f)\sin\phi^2}{(1-e^2\sin\phi^2)^{3/2}} = \frac{M\sin\phi^2}{1-f}\cos\phi\sin\lambda \qquad \text{(الف-۱۱)}$$

در تقریب کروی:

$$a\sin^2\phi\cos\phi\sin\lambda \qquad \text{(الف-۱۲)}$$

از حساب دیفرانسیل و انتگرال به خاطر داریم:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\frac{du}{dt} - u\frac{dv}{dt}}{v^2} \qquad \text{(الف-۱۳)}$$

$$\frac{dz}{df} = \frac{(1-f(2-f)\sin^2\phi)^{1/2}(-2a\sin\phi\,(1-f)) - a(1-f)^2\sin\phi\,(-(1-f(2-f)\sin^2\phi\,)^{-1/2}(1-f)\sin^2\phi)}{1-f(2-f)\sin^2\phi} = \frac{-2a\sin\phi\,(1-f)(1-e^2\sin^2\phi)^{1/2} + a(1-e^2)\sin\phi(1-e^2\sin^2\phi)^{-1/2}(1-f)\sin^2\phi)}{1-e^2\sin^2\phi} = \frac{-2a\sin\phi\,(1-f)}{(1-e^2\sin^2\phi)^{1/2}} + \frac{a(1-e^2)\sin^3\phi\,(1-f)}{(1-e^2\sin^2\phi)^{3/2}} = \quad 2N\sin\phi\,(1\quad f) + M\sin^2\phi\,(1\quad f) \qquad \text{(الف-۱۴)}$$

در تقریب کروی:

$$a(\sin^2\phi\quad 2)\sin\phi \qquad \text{(الف-۱۵)}$$

نیازمند محاسبه مشتقات زیر هستیم:Iهمچنین برای محاسبه درایه‌های ماتریس

$$\frac{\partial x}{\partial \phi} = \frac{(1-e^2\sin^2\phi)^{1/2}(-a\sin\phi\cos\lambda) - a\cos\phi\cos\lambda\,(-(1-e^2\sin^2\phi)^{-1/2}e^2\sin\phi\cos\phi)}{1-e^2\sin^2\phi}\, h\sin\phi\cos\lambda$$

$$= \frac{-a\sin\phi\cos\lambda}{(1-e^2\sin^2\phi)^{1/2}} + \frac{a\cos\phi\cos\lambda\, e^2\sin\phi\cos\phi}{(1-e^2\sin^2\phi)^{3/2}}\, h\sin\phi\cos\lambda$$

$$= N\sin\phi\cos\lambda + N\cos\phi\cos\lambda\,\frac{e^2\cos^2\phi}{1-e^2\sin^2\phi}\, h\sin\phi\cos\lambda$$

$$= N\sin\phi\cos\lambda\,\underbrace{\left(1 \quad \frac{e^2\cos^2\phi}{1-e^2\sin^2\phi}\right)}_{E}\, h\sin\phi\cos\lambda \qquad \text{(الف-۱۶)}$$

برابر است با: E

$$E = \frac{1-e^2\sin^2\phi - e^2\cos^2\phi}{1-e^2\sin^2\phi} = \frac{1-e^2(\sin^2\phi+\cos^2\phi)}{1-e^2\sin^2\phi} = \frac{1-e^2}{1-e^2\sin^2\phi} = \frac{M}{N} \qquad \text{(الف-۱۷)}$$

در رابطه (الف-۱۶) داریم:Eبا جایگذاری

$$\frac{\partial x}{\partial \phi} = (M+h)\sin\phi\cos\lambda \qquad \text{(الف-۱۸)}$$

در تقریب کروی:

$$a\sin\phi\cos\lambda \qquad \text{(الف-۱۹)}$$

و همچنین خواهیم داشت:

$$\frac{\partial y}{\partial \phi} = \frac{(1-e^2\sin^2\phi)^{1/2}(-a\sin\phi\sin\lambda) - a\cos\phi\sin\lambda\,(-(1-e^2\sin^2\phi)^{-1/2}e^2\sin\phi\cos\phi)}{1-e^2\sin^2\phi}\, h\sin\phi\sin\lambda$$

$$= \frac{-a\sin\phi\sin\lambda}{(1-e^2\sin^2\phi)^{1/2}} + \frac{a\cos\phi\sin\lambda\, e^2\sin\phi\cos\phi}{(1-e^2\sin^2\phi)^{3/2}}\, h\sin\phi\sin\lambda$$

$$= N\sin\phi\sin\lambda + N\cos\phi\sin\lambda\,\frac{e^2\cos^2\phi}{1-e^2\sin^2\phi}\, h\sin\phi\sin\lambda$$

$$= N\sin\phi\sin\lambda\,\underbrace{\left(1 \quad \frac{e^2\cos^2\phi}{1-e^2\sin^2\phi}\right)}_{E}\, h\sin\phi\sin\lambda$$

$$= (M+h)\sin\phi\sin\lambda \qquad \text{(الف-۲۰)}$$

در تقریب کروی:

$$a\sin\phi\sin\lambda \qquad \text{(الف-۲۱)}$$

$$\frac{\partial z}{\partial \phi} = \frac{(1-e^2\sin^2\phi)^{1/2}a(1-e^2)\cos\phi - a(1-e^2)\sin\phi\,((1-e^2\sin^2\phi)^{-1/2}e^2\sin\phi\cos\phi)}{1-e^2\sin^2\phi} + h\cos\phi$$

$$= \frac{a(1-e^2)\cos\phi}{(1-e^2\sin^2\phi)^{1/2}}\,\frac{1-e^2\sin^2\phi}{1-e^2\sin^2\phi} + \frac{a(1-e^2)\cos\phi}{(1-e^2\sin^2\phi)^{3/2}}\,e^2\sin^2\phi + h\cos\phi$$

$$= M\cos\phi\,(1 \quad e^2\sin^2\phi) + M\cos\phi\, e^2\sin^2\phi + h\cos\phi = (M+h)\cos\phi \qquad \text{(الف-۲۲)}$$

در تقریب کروی:

$$a\cos\phi \qquad \text{(الف-۲۳)}$$

$$\frac{\partial x}{\partial \lambda} = \frac{(1-e^2\sin^2\phi)^{1/2}(-a\cos\phi\sin\lambda)}{1-e^2\sin^2\phi}\, h\cos\phi\sin\lambda = \underbrace{\frac{-a}{(1-e^2\sin^2\phi)^{1/2}}}_{-M}\cos\phi\sin\lambda\, h\cos\phi\sin\lambda = (M+h)\cos\phi\sin\lambda \qquad \text{(الف-۲۴)}$$

در تقریب کروی:

$$a\cos\phi\sin\lambda \qquad \text{(الف-۲۵)}$$

$$\frac{\partial y}{\partial \lambda} = \frac{(1-e^2\sin^2\phi)^{1/2}(a\cos\phi\cos\lambda)}{1-e^2\sin^2\phi} + h\cos\phi\cos\lambda = \underbrace{\frac{a}{(1-e^2\sin^2\phi)^{1/2}}}_{M}\cos\phi\cos\lambda + h\cos\phi\cos\lambda = (M+h)\cos\phi\cos\lambda \qquad \text{(الف-۲۶)}$$

در تقریب کروی:

$$a\cos\phi\cos\lambda \qquad \text{(الف-۲۷)}$$

$$\frac{\partial z}{\partial \lambda} = 0 \qquad \text{(الف-۲۸)}$$

و همچنین داریم:

$$\frac{\partial x}{\partial h} = \cos\phi\cos\lambda \qquad \text{(الف-۲۹)}$$

$$\frac{\partial y}{\partial h} = \cos\phi\sin\lambda \qquad \text{(الف-۳۰)}$$

$$\frac{\partial z}{\partial h} = \sin\phi \qquad \text{(الف-۳۱)}$$

پیوست ب

محاسبه درایه‌های ماتریس طرح در دو حالت کروی و بیضوی

درایه‌های ماتریس طرح کروی:

A : spherical

$$A_{11} = \frac{-\cos\lambda\sin\phi}{a} \qquad \text{(ب-۱)}$$

$$A_{12} = \frac{-\sin\lambda\sin\phi}{a} \qquad \text{(ب-۲)}$$

$$A_{13} = \frac{\cos\phi}{a} \qquad \text{(ب-۳)}$$

$$A_{14} = \sin\lambda \qquad \text{(ب-۴)}$$

$$A_{15} = \cos\lambda \qquad \text{(ب-۵)}$$

$A_{16} = 0$ (ب-۶)

$A_{17} = \frac{\cos\phi \sin\phi}{a} \quad \frac{\cos^2\lambda \sin\phi \cos\phi}{a} \quad \frac{\sin^2\lambda \sin\phi \cos\phi}{a}$ (ب-۷)

$A_{18} = (\sin^2\phi \quad 2)\sin\phi\cos\phi$
$\cos\phi \sin^2\lambda \sin^3\phi \quad \cos\phi\cos^2\lambda\sin^3\phi$ (ب-۸)

$A_{21} = \frac{-\sin\lambda}{a\cos\phi}$ (ب-۹)

$A_{22} = \frac{\cos\lambda}{a\cos\phi}$ (ب-۱۰)

$A_{23} = 0$ (ب-۱۱)

$A_{24} = \frac{\cos\lambda\sin\phi}{\cos\phi}$ (ب-۱۲)

$A_{25} = \frac{\sin\lambda\sin\phi}{\cos\phi}$ (ب-۱۳)

$A_{26} = \quad 1$ (ب-۱۴)

$A_{27} = 0$ (ب-۱۵)

$A_{28} = 0$ (ب-۱۶)

$A_{31} = \cos\lambda\cos\phi$ (ب-۱۷)

$A_{32} = \sin\lambda\cos\phi$ (ب-۱۸)

$A_{33} = \sin\phi$ (ب-۱۹)

$A_{34} = 0$ (ب-۲۰)

$A_{35} = 0$ (ب-۲۱)

$A_{36} = 0$ (ب-۲۲)

$A_{37} = \quad 1$ (ب-۲۳)

$A_{38} = \quad a\sin^2\phi$ (ب-۲۴)

درایه‌های ماتریس طرح بیضوی:

A : ellipsoidal

$A_{11} = \frac{-\cos\lambda\sin\phi}{N+h}$ (ب-۲۵)

$A_{12} = \frac{-\sin\lambda\sin\phi}{N+h}$ (ب-۲۶)

$A_{13} = \frac{\cos\phi}{N+h}$ (ب-۲۷)

$A_{14} = \frac{-a\sin\lambda}{N+h}$ (ب-۲۸)

$A_{15} = \frac{a\cos\lambda}{N+h}$ (ب-۲۹)

$A_{16} = 0$ (ب-۳۰)

$A_{17} = \frac{N\,e\sin\phi\cos\phi}{a(N+h)}$ (ب-۳۱)

$A_{18} = \frac{-(\cos\phi\sin\phi\,(N(f-1)+M/(f-1)))}{M+h}$ (ب-۳۲)

$A_{21} = \frac{-\sin\lambda}{(M+h)\cos\phi}$ (ب-۳۳)

$A_{22} = \frac{\cos\lambda}{(M+h)\cos\phi}$ (ب-۳۴)

$A_{23} = 0$ (ب-۳۵)

$A_{24} = \frac{a\cos\lambda\sin\phi}{(M+h)\cos\phi}$ (ب-۳۶)

$A_{25} = \frac{a\sin\lambda\sin\phi}{(M+h)\cos\phi}$ (ب-۳۷)

$A_{26} = \frac{-a}{(M+h)}$ (ب-۳۸)

$A_{27} = 0$ (ب-۳۹)

$A_{28} = 0$ (ب-۴۰)

$A_{31} = \cos\lambda\cos\phi$ (ب-۴۱)

$A_{32} = \sin\lambda\cos\phi$ (ب-۴۲)

$A_{33} = \sin\phi$ (ب-۴۳)

$A_{34} = 0$ (ب-۴۴)

$A_{35} = 0$ (ب-۴۵)

$A_{36} = 0$ (ب-۴۶)

$A_{37} = \frac{-a}{N}$ (ب-۴۷)

$A_{38} = \quad N\sin^2\phi\,(f \quad 1)$ (ب-۴۸)

A New Approach for Datum Transformation Based on Ellipsoidal Approximation and Simultaneous Estimation of the Height Correcting Surface Parameters

Mohammad Ali Sharifi[1*] and Mohammad Mahdi Kariminejad[2]
Associate Professor, School of Surveying and Geospatial Engineering, college of Engineering, University of Tehran, Iran
MSc student of Geodesy, School of Surveying and Geospatial Engineering, college of Engineering, University of Tehran,Iran

(Received: 03 February 2020, Accepted: 25 May 2020)

Summary

The problem of datum transformation; determination of parameters for transferring curvilinear coordinate from one ellipsoid to another, is one of the main problems in geometrical geodesy. The problem draws the attentions of many researchers due to its role in the integration of all types of data in the geospatial database framework. Although the problem is one of the oldest geometrical problems by its nature, it is still challenging because of the newly introduced Earth gravitational models and precise global coordinate measurements using the global positioning systems. Different methods have been introduced by many famous geodesists like Molodensky (1962), Vanicek (1986) and others.

In this paper, we developed a full mathematical model for determination of datum transformation parameters based on ellipsoidal approximation. It is theoretically and numerically compared with the previously developed model with spherical approximation. For small area, both models lead to the same accuracy while we expect to achieve higher with the ellipsoidal approximation in wider area.

Moreover, lack of ellipsoidal height in the old data sets is one of the main obstacles for the implementation of the classical transformation schemes. Herein, we introduced two methods for solving this problem. The Earth Gravitational Models (EGMs) which were wieldy available in the new century, thanks to the Earth gravity field's dedicated missions, were employed to get an estimate of the geoidal heights of the data point with enough accuracy. Alternatively, the idea of the widely used polynomial approximating correcting surface was considered to model the geoid height at the area of computation. The numerical results showed that the second alternative was most helpful. Higher accuracy and better fitness in terms of statistical goodness of fit criteria were the outcomes of the implementation of the polynomial approximating correcting surface.

In order to show the performance of the ellipsoidal approximation as well as the idea of polynomial correcting surface, 150 points were selected in the Nigeria. The curvilinear coordinates of the data points were given both in the CLARCK-1880 (local old coordinates) and the World Geodetic System 1984 (WGS84) as the global new coordinates. The old coordinates of the data points were geodetic latitudes, geodetic longitudes and orthometric heights where the new coordinate set is fully geodetic components. A quadratic polynomial mathematical model was employed to approximate the geoid surface in the country. The achieved results showed its reasonable accuracy.

Keywords: Curvilinear coordinates transformation, differential technique, Molodensky method, ellipsoidal approximation, height component, orthometric height

*Corresponding author: sharifi@ut.ac.ir