

وارون سازی نامقید غیرخطی داده های مغناطیسی با استفاده از الگوریتم زیرمسئله ناحیه اعتماد

روح الله فریدی¹ و رضا قناتی^{2*}

¹ دانش آموخته کارشناسی ارشد، موسسه ژئوفیزیک دانشگاه تهران، تهران، ایران

² استادیار موسسه ژئوفیزیک دانشگاه تهران، تهران، ایران

(تاریخ دریافت: 1398/12/16، تاریخ پذیرش: 1399/06/18)

چکیده

مقاله حاضر به وارون سازی نامقید غیرخطی داده های مغناطیسی به کمک الگوریتم منطقه مورد اعتماد می پردازد. روش های معمول وارون سازی مبتنی بر ماتریس تغییرات و ماتریس هسین، در صورت انتخاب نامناسب مقدار اولیه، به کمینه های محلی و در نتیجه، تخمین مدلی دور از واقعیت زمین منجر می شوند. برای غلبه بر این مشکل، روش منطقه مورد اعتماد پیشنهاد می شود که خواص همگرایی بسیار مناسبی دارد. در این الگوریتم، اطلاعات گردآوری شده درباره تابع هدف، برای ساختن یک مدل ساده تر از آن استفاده می شود. در این روش، محدود کردن مدل به ناحیه اطراف نقطه کنونی، سبب می شود مدل در آن ناحیه، رفتاری شبیه به تابع هدف داشته باشد؛ از این رو به جای کمینه سازی تابع هدف می توان مدل را در یک ناحیه کمینه کرد. در این مقاله، الگوریتم منطقه مورد اعتماد با روش لونبرگ - مارکوارت مقایسه می شود که از یک الگوریتم جستجوی خطی بهره می برد. برای بهینه سازی توابع استاندارد ریاضی - که علاوه بر کمینه سراسری، کمینه های محلی نیز دارند - از الگوریتم مذکور استفاده شده است تا توانایی آن، بررسی و نتایج آن با روش جستجوی خطی نیوتن مقایسه شود. همچنین الگوریتم پیشنهادی برای وارون سازی داده های مصنوعی و واقعی بی هنجاری مغناطیسی با اشکال هندسی گسل، استوانه و صفحه نازک به کار گرفته شده و نتایج آن با نتایج وارون سازی روش لونبرگ - مارکوارت مقایسه شده است. در هر دو حالت، مدل سازی عددی، کارایی و برتری این روش را نسبت به روش لونبرگ - مارکوارت به ترتیب در بهینه سازی و وارون سازی نشان می دهد.

واژه های کلیدی: وارون سازی غیرخطی، روش منطقه مورد اعتماد، روش لونبرگ - مارکوارت، روش جستجوی خطی

1 مقدمه

مغناطیس‌سنجی، روشی ژئوفیزیکی است که در مطالعات اولیه اکتشاف نفت جهت مطالعه سنگ بستر حوضه رسوبی، اکتشاف آهن، مطالعات زمین‌شناسی مهندسی و بررسی‌های باستان‌شناسی کاربرد دارد. در این روش که قدمتی طولانی دارد، بزرگی میدان مغناطیسی یا گرادیان مغناطیسی در هر نقطه برداشت اندازه‌گیری می‌شود. در تفسیر این روش، مسائلی همچون عمق، شکل و اندازه ساختار و مغناطیدگی ارزیابی می‌شود. این تفسیر در حوزه مکان یا فرکانس صورت می‌گیرد (تلفورد و همکاران، 1990). روش‌های کمی و کیفی متعددی برای تفسیر داده‌های میدان مغناطیسی استفاده می‌شوند. روش‌های گرافیکی، روش‌های مشتقات میدان پتانسیل و وارون‌سازی از جمله این روش‌ها هستند (گان، 1997). در میان روش‌های تفسیر داده‌های مغناطیسی، روش‌های وارون به سبب تعیین مشخصات دقیق هندسه ساختار مدل یا پراکندگی خصوصیت مغناطیدگی از ارجحیت بیشتری برخوردارند (نیقیان و همکاران، 2005). مسائل معکوس کاربردهای زیادی در ژئوفیزیک، فیزیک، پزشکی، اقتصاد، پردازش تصاویر و تخمین پارامتر دارند (کابانیخین، 2008). اکثر مسائل معکوس ژئوفیزیکی به سبب یکتا نبودن، حساسیت ماتریس کرنل و در پی آن، حساسیت به نوفه، بدوضع (ill-posed) هستند (تیخونوف و آرسنین، 1977 و پتروف و سیزکوف، 2005). بدوضعی سبب ایجاد جواب‌های غیرواقعی از جواب تخمینی می‌شود. برای رفع این مشکل، از روش‌های منظم‌سازی متعددی مثل روش تیخونوف و روش تجزیه مقادیر تکین قطع شده استفاده می‌شود (منکه، 1984 و آستر و همکاران، 2013). استفاده از روش‌های منظم‌سازی در مسائل غیرخطی با خطی‌سازی مسئله مورد نظر حول یک مقدار اولیه همراه است. حل مسائل غیرخطی بر پایه روش‌های گرادیان در تکرارهای مختلف و با هدف کمینه‌سازی تابع هدف انجام می‌گیرد.

در مسائل غیرخطی برای رسیدن از نقطه‌ای به نقطه دیگر در تکرارهای مختلف، از دو راهبرد جستجوی خطی و منطقه مورد اعتماد استفاده می‌شود. این دو راهبرد معمولاً از ساختار دوبعدی تابع هدف و بسط تیلور استفاده می‌کنند و شرط $f(x_{k+1}) < f(x_k)$ را که شرط کاهش در تابع هدف است، با طول گام (step length) و جهت جستجو (search direction) کنترل می‌کنند. در روش جستجوی خطی، ابتدا جهت جستجو تعیین می‌شود و بعد طول گام، ولی در روش منطقه مورد اعتماد، ابتدا طول گام محدود به شعاع منطقه اعتماد تعیین و سپس جهت جستجو مشخص می‌شود (نوسدال و رایت، 1999). همچنین در روش جستجوی خطی در صورت انتخاب مقادیر اولیه‌ای دور از مقادیر واقعی، فرایند بهینه‌سازی به سمت واگرایی خواهد رفت و در نتیجه، باعث ارائه جواب‌های غیرواقعی از مسئله تحت بررسی می‌شود. جهت اجتناب از این مشکل در الگوریتم منطقه اعتماد، جواب‌های احتمالی در هر تکرار به نقطه تکرار کنونی و جواب آن محدود می‌شود. از دیگر معایب روش جستجوی خطی، واگرایی در مقادیر منفی حسین است. علاوه بر معایب موجود در روش جستجوی خطی، الگوریتم لونبرگ-مارکوارت نیز که بهبود یافته روش نیوتن با معرفی پارامتر میرایی است، در مواجهه با تفرع منفی به روش تندترین شیب نزدیک می‌شود و بسیار کند عمل می‌کند. همچنین امکان تخمینی و نوفه‌دار بودن گام این الگوریتم وجود دارد (برقن، 2004). با اضافه کردن جمله مناسب مرتبه دوم به زیرمسئله ناحیه اعتماد، این مسئله به روش منظم‌سازی تبدیل می‌شود (یوان، 2015). حالت خاصی از روش منطقه مورد اعتماد که ترکیبی از روش سنتی منطقه مورد اعتماد با روش منحنی‌های لگاریتمی است، در منظم‌سازی مسائل بدوضع استفاده شده است که علی‌رغم وجود نوفه زیاد، پایدار خواهد بود (گروزویچ، 2004 و عبدالعظیم، 2013).

مدلی نزدیک به واقعیت زمین ضروری است. با فرض خودپذیری ثابت در داده‌های مغناطیسی، می‌توان به معادلات غیرخطی درباره شکل هندسی رسید.

در ادامه، نظریه روش منطقه مورد اعتماد، فرمول‌بندی و نحوه استفاده از روش پیشنهادی در مسائل کمترین مربعات، در بخش 2 ارائه می‌شود. بخش 3 شامل ارزیابی عملکرد روش پیشنهادی با استفاده از اعمال الگوریتم در کمینه سازی توابع استاندارد ریاضی و سپس کاربست آن روی داده‌های مصنوعی و صحرایی منتج از ساختارهای مغناطیسی با اشکال هندسی صفحه نازک، استوانه افقی و گسل است. همچنین مقایسه‌ای بین عملکرد الگوریتم زیر مسئله ناحیه اعتماد و روش لونبرگ - مارکوارت انجام و در نهایت، در بخش 4 نتایج این مطالعه بررسی می‌شود.

2 مبانی روش منطقه مورد اعتماد

2-1 فرمول‌بندی نظریه روش منطقه مورد اعتماد

شکل کلی یک مسئله بهینه‌سازی مقید به صورت زیر است (نوسدال و رایت، 1999):

$$\min_{x \in \mathbb{R}^{m \times 1}} f(x) \text{ subject to } \begin{cases} c_i(x) = 0 & i \in \theta \\ c_i(x) \geq 0 & i \in \rho \end{cases} \quad (1)$$

که $x \in \mathbb{R}^{m \times 1}$ برداری از پارامترهای مدل با تعداد مؤلفه‌های $m \geq 1$ است. $f: \mathbb{R}^{m \times 1} \rightarrow \mathbb{R}^{m \times 1}$ تابع هدف و c_i توابع قیود وابسته به پارامترهای اسکالر x هستند. پارامترهای θ و ρ مجموعه‌ای برای تعریف قیود مساوی و نامساوی در مسئله هستند. هدف از بهینه‌سازی، کمینه یا بیشینه کردن تابع هدف به ازای مجموعه‌ای از پارامترهای مدل است. مسئله بهینه‌سازی غیرخطی نامقید با بازنویسی مسئله مقید صورت می‌گیرد، به طوری که قیدها و جمله‌های محدودکننده مقادیر x در مسئله وجود ندارند و $f: \mathbb{R}^{m \times 1} \rightarrow \mathbb{R}^{m \times 1}$ تابع حقیقی، هموار و دست کم دو بار مشتق‌پذیر است؛ از این رو یک مسئله بهینه‌سازی نامقید بدون اعمال قیود بر

ایده اصلی الگوریتم منطقه مورد اعتماد را لونبرگ (لونبرگ، 1944) و مارکوارت (مارکوارت، 1963) ارائه کردند و گولدفلد و همکاران (1966) آن را برای کمینه‌سازی برخی مسائل ریاضی پیشنهاد دادند. این روش در مقالات مختلفی از جمله پاول (1975)، فلچر (1980)، گی (1981) و سورنسن (1980) بررسی و توسعه داده شده است. الگوریتم لونبرگ - مارکوارت و نسخه‌های بهبود یافته آن حالت خاصی از روش منطقه مورد اعتماد محسوب می‌شوند. در روش لونبرگ - مارکوارت، پارامتر لونبرگ - مارکوارت یا پارامتر میرایی به جای شعاع منطقه مورد اعتماد تنظیم می‌شود. از جمله مزایای الگوریتم زیر مسئله ناحیه اعتماد، همگرایی قوی (strong convergence)، مقاومت نسبت به نوفه یا بدرفتاری و گیر نکردن در تفرع منفی است. از معایب این روش می‌توان به زمان‌بر بودن حل زیر مسئله به سبب ابعاد بزرگ ماتریس هسین اشاره کرد (کُن و همکاران، 2000). البته در مسائل بزرگ مقیاس، امکان استفاده از تقریب ماتریس هسین جهت افزایش سرعت فرایند وارون‌سازی وجود دارد. به سبب مزایای این روش، از آن در حل دستگاه‌های غیرخطی (Solving systems of non-linear equations) برنامه‌ریزی غیرخطی (non-linear programming) و بهینه‌سازی توابع غیر محدب (concave) استفاده می‌شود. ایده استفاده از روش منطقه مورد اعتماد در حل مسئله معکوس را مور و سورنسن (1983) مطرح کردند که در حل مسائل تخمین پارامتر (وانگ و یوان 2001) و مسائل بدوضع غیرخطی (وانگ و یوان، 2005) از آن استفاده شد. در این مقاله از روش منطقه مورد اعتماد در معکوس‌سازی غیرخطی بی‌هنجاری مغناطیسی ناشی از ساختارهای هندسی مشخص استفاده می‌شود. همانند هر روش ژئوفیزیکی، تفسیر داده‌های مغناطیسی معمولاً دچار یکتا نبودن می‌شود و اشکال مختلف هندسی، پاسخ‌های مغناطیسی یکسانی ایجاد می‌کنند؛ لذا وجود اطلاعات اولیه برای به دست آوردن

مقادیر پارامترهای مدل به شکل زیر تعریف می‌شود (نوسدال و رایت، 1999):

$$\min_{x \in \mathbb{R}^{m \times 1}} f(x) \quad (2)$$

برای حل مسئله بهینه‌سازی نامقید مذکور، روش‌های تکراری متعددی وجود دارند و جواب این مسئله در شروط ضروری مرتبه اول و دوم و شرط مناسب مرتبه دوم صدق می‌کند (کاروش، 1939؛ کان و تاکر، 1951 و بوید و واندرببرگ، 2004). در روش تکراری منطقه مورد اعتماد، جهت جستجوی p_k در اطراف نقطه کنونی به صورت زیر ساخته می‌شود:

$$x_0 \in \mathbb{R}^{m \times 1} \quad x_{k+1} = x_k + p_k, \quad k = 0, 1, \dots \quad (3)$$

همچنین ناحیه حول نقطه تکرار کنونی x_k و بیشترین طول گام Δ_k با کمک رابطه زیر تعریف می‌شود:

$$S_k := \{x \in \mathbb{R}^{m \times 1} \mid \|x - x_k\| \leq \Delta_k\} \quad (4)$$

برای محاسبه جهت جستجو، ابتدا زیرمسئله ناحیه مورد اعتماد حل می‌شود [رابطه (5)]:

$$\min_{d \in \mathbb{R}^m} \Psi_k(p) \quad (5)$$

$$s. t. \quad \|p\| \leq \Delta_k. \quad (6)$$

که $\Psi_k(p)$ تابع مدلی است که تابع هدف $f(x_k + p)$ را در نزدیکی نقطه تکرار کنونی x_k تخمین می‌زند. $\| \cdot \|$ نرم در فضای $\mathbb{R}^{m \times 1}$ است و $\Delta_k > 0$ شعاع منطقه مورد اعتماد است.

در حل زیرمسئله ناحیه اعتماد، معمولاً از ساختار درجه دوم بسط تیلور تابع هدف استفاده می‌شود که دقت زیاد و تنها یک کمینه محلی غیرمطلق دارد (یوان، 2015) و به همراه نرم اقلیدسی L_2 قید منطقه مورد اعتماد، زیرمسئله ناحیه اعتماد استاندارد را تولید می‌کند:

$$\min \Psi_k(p) = f_k + g_k^T p + \frac{1}{2} p^T B_k p \quad (7)$$

$s. t. \quad \|p\| \leq \Delta_k$
که $B_k = \nabla^2 f(x_k)$ بردار گرادیان و $f_k = f(x_k)$ ماتریس هسین است.

حل معادله (7) به تخمینی از p با شرایط زیر منجر می‌شود:

$$(B_k + \lambda I)p = -g_k \quad (8)$$

$$(B_k + \lambda I) \geq 0 \quad \text{مثبت معین}$$

$$\lambda \geq 0$$

$$\lambda(\Delta_k - \|p^*\|) = 0.$$

که λ پارامتر میرایی و I ماتریس همانی را نشان می‌دهد. رسیدن به جواب واقعی در صورت وجود ماتریس هسین بزرگ مقیاس بسیار دشوار خواهد بود؛ لذا برای رفع چنین مشکلی از جواب تخمینی برای رسیدن به p استفاده می‌شود. جواب تخمینی از روش‌های داگلگ (Dogleg)، کوشی (Cauchy) و زیرفضای دوبعدی (two-dimensional sub-problem) به دست می‌آید. جواب تخمینی و مدل آن، نقطه تکرار بعدی را مشخص می‌کند (یوان، 2000).

یکی از نکات کلیدی در حل زیرمسئله ناحیه اعتماد، انتخاب شعاع ناحیه اعتماد در هر تکرار است. این انتخاب بر اساس تطابق بین مدل تخمینی Ψ_k و تابع هدف f در x_k است. معیار تطابق مدل تخمینی با مسئله واقعی که نسبت کاهش (Reduction ratio) نامیده می‌شود، از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\rho_k = \frac{Ared_k}{Pred_k} \quad (9)$$

$Ared_k$ نسبت کاهش واقعی در تابع هدف f و $Pred_k$ نسبت کاهش تخمینی (Predicted reduction ratio) در مدل تخمینی Ψ_k است:

$$Pred_k = \Psi_k(0) - \Psi_k(p_k) \quad (10)$$

$$Ared_k = f(x_k) - f(x_k + p_k) \quad (11)$$

نسبت کاهش، معیار مقبولیت جهت جستجو و ارتقاءدهنده شعاع منطقه مورد اعتماد است. اگر محاسبات، نشان‌دهنده همخوانی مدل تخمینی با مسئله واقعی باشد، شعاع ناحیه مورد اعتماد افزایش و در غیر این صورت کاهش می‌یابد.

2017). از دیگر برتری های روش منطقه مورد اعتماد بر روش های جستجوی خطی و لونبرگ - مارکوارت، توانایی بهتر در مواجهه با تقعر منفی است. در مواجهه با تقعر منفی، الگوریتم نیوتن دچار واگرایی می شود، الگوریتم لونبرگ - مارکوارت شبیه الگوریتم تندترین شیب، بسیار کند عمل می کند و احتمال تخمینی و نوفه دار بودن گام هم وجود دارد و الگوریتم منطقه مورد اعتماد، با گام بلندی از تقعر منفی گذر می کند و با سرعت زیادی به مسیر مورد نظر می رسد. همچنین این روش، عملکرد بهتر را در مسائلی نشان می دهد که کمینه های نسبی فراوانی وجود دارد و تقعر، بسیار عوض می شود یا نقطه شروع مسئله بهینه سازی بسیار دورتر از نقطه کمینه سراسری است.

برای ارتقای پارامتر λ الگوریتم لونبرگ - مارکوارت می توان از ρ_k استفاده کرد (فان، 2003):

$$\lambda_{k+1} = \begin{cases} \lambda_k / 4 & \rho_k \geq \eta_2 \\ \lambda_k & \eta_1 \leq \rho_k < \eta_2 \\ 4 \lambda_k & \rho_k < \eta_1 \end{cases} \quad (13)$$

به کارگیری ρ_k در الگوریتم لونبرگ - مارکوارت، مشکلات این روش را از بین می برد. این مشکلات شامل مربوط نبودن پارامتر λ به شرایط مسئله و پارامترهای آن، واضح نبودن تغییرات پارامتر λ و افزایش پارامتر λ در صورت مقبول نبودن گام p است. البته این روش به تغییرات ناچیز مقادیر ρ_k حساس نیست و پرش هایی در محدوده $\lambda_k / \lambda_{k+1}$ بین مقادیر η_1 و η_2 مشاهده می شود (فان، 2003). برای اصلاح این نقص، یامشیتا و فوکوشیما (2001)، دان و همکاران (2002) و فان و پان (2006) روش هایی را ارائه کرده اند که مشکل را حل کرده است.

تکرار تا جایی انجام می شود که شروط الگوریتم محقق شود. مراحل مختلف الگوریتم ناحیه مورد اعتماد در الگوریتم 1 نشان داده شده است. در این الگوریتم مقادیر η_1, η_2, γ_1 و γ_2 بر اساس مقاله وانگ و ما (2009) به ترتیب 0/95، 0/995، 1/5 و 2 انتخاب شده اند.

با فرض اینکه نرم دوم Δ ، جواب الگوریتم لونبرگ - مارکوارت [معادله (8)] و p جواب معادله کمترین مربعات خطی زیر باشد، روش لونبرگ - مارکوارت حالت خاصی از روش منطقه مورد اعتماد است:

$$\begin{aligned} & \text{minimize } \frac{1}{2} \|g_k p + \Psi_k(p)\|_2^2 \\ & \text{subject to } \|p\|_2 \leq \Delta \end{aligned} \quad (12)$$

تفاوت روش منطقه مورد اعتماد با روش لونبرگ - مارکوارت در تغییر شعاع Δ در هر تکرار است؛ یعنی در روش لونبرگ - مارکوارت، شعاع Δ به صورت غیرمستقیم و با کمک پارامتر λ تغییر داده می شود (برقن، 2004). می توان نسبت ρ_k در معادله (9) را همانند روش منطقه مورد اعتماد در الگوریتم لونبرگ - مارکوارت تعریف کرد. در این حالت الگوریتم بهبود یافته رفتاری مشابه ترکیب الگوریتم لونبرگ - مارکوارت و منطقه مورد اعتماد خواهد داشت؛ یعنی اگر تخمین جهت جستجوی p موفقیت آمیز و ρ_k رضایت بخش باشند، p پذیرفته می شود و پارامتر λ کاهش می یابد و در غیر این صورت، p رد می شود و λ افزایش می یابد (شان، 2008). هنگامی که ρ_k نزدیک به یک و p پذیرفتنی باشد، λ به صفر میل می کند و مشابه روش نیوتن، با سرعت نمایی به جواب می رسد. اگر p بزرگ و $\rho_k < 0$ باشد، مقدار λ بسیار بزرگ می شود و الگوریتم لونبرگ - مارکوارت مشابه الگوریتم تندترین شیب می شود و با سرعت خطی به جواب می رسد (گاوین،

Algorithm 1: Trust-Region Algorithm

1. **initialize:** Choose an initial point x_0 , Choose Δ_{max} , an initial radius $\Delta_0 \in (0, \Delta_{max})$, given constants parameters: $0 \leq \varepsilon, 0 < \eta_1 \leq \eta_2, 0 < \gamma_1 \leq 1 < \gamma_2$, set $k = 0$

While $\|g_k\| \leq \varepsilon$ stop.

2. Solve the trust-region sub-problem (2)

3. Compute ρ_k using (3)

4. Then

$$x_{k+1} = \begin{cases} x_k + s_k & \text{if } \rho_k > \eta \\ x_k, & \text{otherwise} \end{cases}$$

5. Update the trust-region radius

$$\Delta_{k+1} = \begin{cases} \min(\gamma_2 \Delta_k, \Delta_{max}) & \rho_k \geq \eta_2 \\ \Delta_k & \eta_1 \leq \rho_k < \eta_2 \\ \gamma_1 \Delta_k & \rho_k < \eta_1 \end{cases}$$

Step 4: stopping criteria evaluation

بنابراین الگوریتم ناحیه اعتماد بر اساس کمینه‌سازی تابع هدف معادله (14) به صورت زیر نمایش داده می‌شود:

$$\min_{p \in \mathbb{R}^m} \psi_k(p) := (grad(\Psi^k), p) + \frac{1}{2} (\widetilde{Hess}(\Psi^k)p, p) \quad (19)$$

subject to $\|p\| \leq \Delta_k$

که $grad(\Psi^k)$ گرادیان Ψ در تکرار k و $\widetilde{Hess}(\Psi^k)$ هسین Ψ در تکرار k است. $\nabla F(m)^T \nabla F(m)$ زیرمسئله 5 از الگوریتم لونبرگ-مارکوارت و تغییر تکراری پارامتر ξ_k در الگوریتم 2 است و به صورت زیر حل می‌شود:

$$\begin{aligned} (\nabla F(m_k))^T \nabla F(m_k) + \xi_k I) p &= \\ -\nabla F(m_k)^T * (F(m_k) - y_\delta), & \quad (20) \\ m_{k+1} &= m_k + p, \end{aligned}$$

پارامتر ξ_k در معادله (20) به کمک اصل استنتاجی مورزوف در الگوریتم لونبرگ-مارکوارت و روش منطقه مورد اعتماد تغییر می‌یابد (هانکه، 1997). مشابه کاری که با معادله (8) انجام شد، با فرض اینکه p جواب معادله زیر باشد، الگوریتم لونبرگ-مارکوارت حالت خاصی از الگوریتم منطقه مورد اعتماد است:

$$\min_{\varepsilon \in \mathbb{R}^m} \|F(m_k) + \nabla F(m_k)^T p\|_2^2 \quad (21)$$

$$\text{s. t. } \|p\|_2 \leq \Delta_k \quad (22)$$

2-2 به کارگیری روش منطقه مورد اعتماد در مسئله کمترین مربعات

شکل مسئله کمترین مربعات به صورت زیر است:

$$\min_{m \in \mathbb{R}^m} \Psi(m) := \|F(m) - y_\delta\|^2 \rightarrow \quad (14)$$

$F \in \mathbb{R}^{m \times n}, m \in \mathbb{R}^{n \times 1}, y_\delta \in \mathbb{R}^{m \times 1}$

که F عملگر پیشروی غیرخطی، m پارامترهای مدل و y_δ داده مشاهده‌ای است. با بسط مرتبه دوم تابع هدف فوق به کمک سری تیلور داریم:

$$\begin{aligned} J(m + \xi) &\approx J(m^k) + (grad(J^k, \xi)) \\ &+ \frac{1}{2} (Hess(J^k)\xi, \xi) \end{aligned} \quad (15)$$

که در آن:

$$grad(J)(x) = \nabla F(m)^T (F(m) - y_\delta) \quad (16)$$

$$Hess(J)(x) = \nabla F(m)^T \nabla F(m) + \nabla^2 F(m)^T (F(m) - y_\delta) \quad (17)$$

این نکته شایان ذکر است که محاسبه جمله دوم ماتریس هسین در مسائل بزرگ مقیاس ژئوفیزیکی نادیده گرفته می‌شود و تقریبی از مقدار ماتریس هسین تنها به کمک جمله اول ارائه می‌شود:

$$\widetilde{Hess}(J)(x) = \nabla F(m)^T \nabla F(m) \quad (18)$$

معین باشد و همگرایی را تضمین کند. سپس نسبت کاهش همانند معادله (9) محاسبه می‌شود. بقیه گام‌ها مطابق الگوریتم منطقه مورد اعتماد خواهد بود.

الگوریتم منطقه مورد اعتماد در حل مسائل بدوابع غیرخطی نیازمند دو حلقه تکرار است: حلقه خارجی شامل تخمین جهت جستجوی ξ_k و شعاع منطقه مورد اعتماد Δ_k همراه با ارزیابی گرادیان $grad(J^k)$ و تعیین ماتریس هسین $Hess(J^k)$ است و حلقه داخلی شامل تخمین پارامتر میرایی α_k به کمک اجرای الگوریتم 2 می‌شود.

3 مثال‌های عددی

یکی از اصول بهینه‌سازی، ارزیابی الگوریتم‌های به کاررفته است. قدرت الگوریتم در به کارگیری آن در کدهای کامپیوتری و ارزیابی کردن آن در مجموعه‌ای از توابع استاندارد ریاضی با ویژگی‌ها و خواص متفاوت است. در صحت‌سنجی الگوریتم، مباحثی همچون قدرت، کارایی و اطمینان مطرح است و الگوریتم بهینه‌سازی باید همگرایی مناسبی داشته باشد (آندری، 2008). از طرفی، مقایسه الگوریتم مورد نظر با دیگر روش‌های استاندارد برای صحت‌سنجی ضروری است؛ از این رو در این بخش ابتدا عملکرد روش پیشنهادی جهت کمینه‌سازی توابع ریاضی استاندارد ارزیابی می‌شود که شامل کمینه‌های محلی باشند. سپس توانایی الگوریتم زیرمسئله ناحیه اعتماد جهت وارون‌سازی داده‌های مصنوعی و واقعی منتج از ساختارهای هندسی مختلف سنجیده می‌شود.

برای تغییر پارامتر ξ_k در روش منطقه مورد اعتماد، با در نظر گرفتن معادلات (8) و (20) و با دو فرض

$$\begin{aligned} T_k &= \nabla F(m_k), \\ g_k &= -\nabla F(m_k)^T * (y - F(m_k)) \end{aligned}$$

معادلات زیر را خواهیم داشت:

$$(T_k^T T_k + \alpha_k I) \xi_k = -g_k \quad (23)$$

$$\alpha_k (\Delta_k - \|\xi_k\|) = 0 \quad \text{یا} \quad \Delta_k = \|\xi_k\| \quad (24)$$

معادله (24) یک مسئله یک‌بعدی جهت پیدا کردن ریشه متغیر α_k است (نوسدال و رایت، 1999). برای حل این معادله از تابع Γ_k استفاده می‌شود:

$$\Gamma_k(\xi_k) := \frac{1}{\|\xi_k, \alpha_k\|} - \frac{1}{\Delta_k} = 0 \quad (25)$$

این تابع به تابعی خطی نزدیک است و با استفاده از روش نیوتن و محاسبه مشتقات اول و دوم می‌توان α_k را حساب کرد.

$$\alpha_+ = \alpha_k - \frac{\|\xi_k, \alpha_k\|^3}{g_k^T (T_k^T T_k + \alpha_k I)^{-3} g_k \left[\frac{1}{\|\xi_k, \alpha_k\|} - \frac{1}{\Delta_k} \right]} \quad (26)$$

با در نظر گرفتن تابع نامحدب و صعودی $\Gamma_k(\alpha_k)$ و مقدار اولیه $\alpha_k > 0$ به نحوی که $\Gamma_k(\alpha_k) < 0$ باشد، روش نیوتن به جواب $\Gamma_k(\alpha_k) = 0$ همگرا خواهد بود. نمایشی از نحوه محاسبه α_k در الگوریتم 2 به صورت شبه کد ارائه شده است. در این الگوریتم $R^T R$ روش تجزیه چولسکی (Cholesky decomposition) از ماتریس $T_k^T T_k + \alpha_k I$ است طوری که $R \in R^{n \times n}$ و بالامثلثی است. همچنین مقدار α_k باید به گونه‌ای باشد که $T_k^T T_k + \alpha_k I$ مثبت

Algorithm 2: An iterative process to calculate ξ_k in equation (6)

1. Initialize: set an initial value α_+
 2. While $\|\alpha_+ - \alpha_k\| \leq tol$
 3. Solve: $\nabla F(m_k)^T \nabla F(m_k) + \alpha_k I = R^T R$
 4. Solve $R^T R p_{k, \alpha_k} = -\nabla F(m_k)^T * (F(m_k) - y_\delta)$
 5. Solve: $R^T \omega = \xi_{k, \alpha_k}$
 6. Let: $\alpha_+ := \alpha_k - \left(\frac{\|p_{k, \alpha_k}\|}{\|\omega\|} \right)^2 \left(1 - \frac{\|p_{k, \alpha_k}\|}{\|\Delta_k\|} \right)$
 Note: ($R^T R$ is the Cholesky factorization of the matrix $(\nabla F(m_k)^T \nabla F(m_k) + \alpha_k I)$)

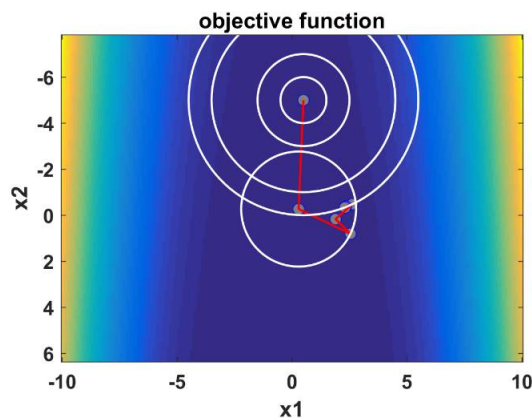
1-3 توابع استاندارد ریاضی

در ریاضیات برای بررسی عملکرد یک الگوریتم و نحوه رفتار آن در فرایند بهینه‌سازی از توابع استاندارد با ویژگی‌های مشخص استفاده می‌شود. با توجه به اینکه یکی از معیارهای قدرت الگوریتم، تشخیص کمینه سراسری از کمینه‌های محلی است، تابع استاندارد باید شامل کمینه‌های محلی و کمینه‌های سراسری باشد تا این مسئله را تضمین کند که الگوریتم مورد بحث، درگیر کمینه‌های محلی نمی‌شود.

اولین تابعی که یک نقطه کمینه دارد به شکل زیر بیان می‌شود (هدف در مثال زیر، بررسی سرعت همگرایی الگوریتم پیشنهادی نسبت به روش نیوتن است):

$$F = -10x^2 + 10y^2 + 4 \sin(xy) - 2x + x^4 \quad (27)$$

در این تابع، کمینه سراسری در نقطه $(x_1, x_2) = (2/3, -0/3)$ قرار دارد. بهینه‌سازی با الگوریتم زیرمسئله ناحیه اعتماد و روش نیوتن برای یافتن کمینه سراسری انجام می‌گیرد. در هر دو الگوریتم نقطه شروع در مختصات $(-5, 0/5)$ قرار داده می‌شود. الگوریتم پیشنهادی بعد از 9 تکرار به نقطه بهینه همگرا می‌شود، درحالی که روش نیوتن با 19 تکرار به نقطه کمینه سراسری می‌رسد. شکل 1 مسیر رسیدن به نقطه بهینه را با الگوریتم منطقه مورد اعتماد نشان می‌دهد.



شکل 1. مسیر رسیدن الگوریتم منطقه مورد اعتماد به نقطه بهینه در مختصات $(2/3, 0/3)$.

برای مقایسه بهتر الگوریتم پیشنهادی با روش‌های معمول، از تابع روزنبروک (Rosenbrock) استفاده می‌شود که شامل یک کمینه محلی و یک کمینه سراسری است. تابع روزنبروک به شکل زیر است:

$$f(x, y) = (a - x)^2 + b(y - x^2)^2 \quad (28)$$

مقادیر ثابت $b = 100$ و $a = 1$ هستند. نقطه کمینه نسبی در $(-1, 4)$ و نقطه کمینه مطلق در $(1, 1)$ قرار دارد. بهینه‌سازی از نقطه $(x = 3, y = 1)$ شروع می‌شود و الگوریتم پیشنهادی با 248 تکرار به کمینه مطلق می‌رسد، درحالی که الگوریتم نیوتن با 1475 تکرار همگرا می‌شود. مسیر کلی رسیدن به کمینه نهایی در شکل 2- الف و مسیر انتخابی رسیدن دو الگوریتم به نقطه کمینه مطلق از نقطه‌ای نزدیک به $1/412$ در شکل 2- ب نشان داده شده است. همان‌طور که مشخص است، الگوریتم مذکور با گیرافتادگی‌های کمتر و مسیر انتخابی بهتری به کمینه مطلق می‌رسد.

2-3 داده‌های مغناطیسی مصنوعی

بی‌هنجاری شدت کل مغناطیسی یک صفحه نازک که تحت تأثیر بی‌هنجاری منطقه‌ای A و بی‌هنجاری اولیه باقی‌مانده B در نقطه مشاهده‌ای M در طول محور X قرار گرفته است، به صورت رابطه زیر است (قناتی و همکاران، 2017):

$$P(X) = F \frac{(X - \zeta) \sin \varphi + Z \cos \varphi}{(X - \zeta)^2 + Z^2 + AX + B} \quad (29)$$

مطابق شکل 3- الف، X فاصله از نقطه اندازه‌گیری M از نقطه مرجع و اولیه R است. O نقطه شروع مختصات در مرکز بی‌هنجاری، Z عمق از بالای بی‌هنجاری و ζ فاصله از مرکز O نقطه مرجع است. F ضریب بزرگی است و با رابطه $F = 2KT\beta(1 - \cos I_0^2 \cos \alpha^2)$ تعریف می‌شود. K که تباین خودپذیری مغناطیسی است، مقدار ثابتی فرض می‌شود و امکان محاسبه تغییرات آن وجود ندارد. T شدت میدان مغناطیسی زمین، β ضخامت صفحه نازک، I_0 زاویه میل مغناطیسی زمین و α زاویه سمت جسم مدفون با قطب

$$P(X) = F \left(\frac{(Z^2 - (X - \zeta)^2) \cos \varphi + 2(X - \zeta)Z}{((X - \zeta)^2 + Z^2)^2} \right) + AX + B \quad (30)$$

که مشابه صفحه نازک، ضریب بزرگی و مقادیر وابسته آن به صورت زیر تعریف می شوند:

$$F = \frac{2\pi r^2 k T^* \sin I_0^*}{\sin I_0^*}$$

$$\varphi = 2I_0^* - 180^\circ$$

$$I_0^* = \tan^{-1} \left(\frac{\tan I_0}{\sin \alpha} \right)$$

$$T^* = T \left(\frac{\sin I_0}{\sin I_0^*} \right)$$

که T^* نسبت مؤثر قطبیدگی مغناطیده در صفحه قائم عمود بر امتداد بی هنجاری است.

بی هنجاری مغناطیسی یک گسل، انتگرالی از صفحات نازک است. استنلی (1977) و آتچوتا و همکاران (1980) نشان دادند بی هنجاری مغناطیسی یک صفحه نازک برابر با اولین مشتق افقی بی هنجاری مغناطیسی ناشی از گسل است:

$$P(X) = 0.5F \sin \varphi \ln(X^2 - 2X\zeta + \zeta^2 + Z^2) + F \cos \varphi \tan^{-1} \left(\frac{X - \zeta}{Z} \right) + 0.5AX^2 + BX \quad (31)$$

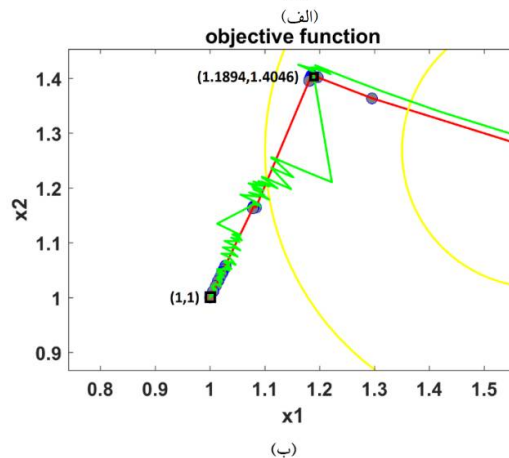
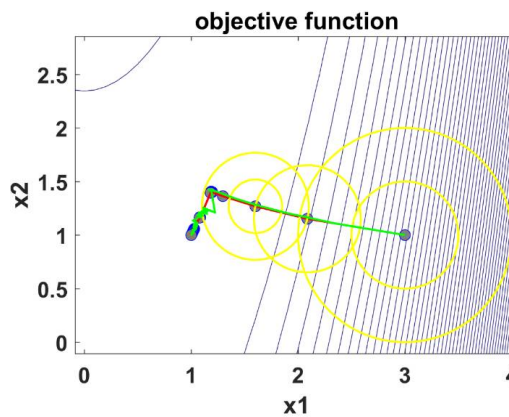
که ضریب بزرگی آن با رابطه

$F = 2KT\beta(1 - \cos 2I_0 \cos 2\alpha)$ تعریف می شود. دیگر پارامترهای مربوط به F پیش از این توضیح داده شده اند. پارامترهای بی هنجاری مغناطیسی در جدول 1 تعریف شده است.

جدول 1. پارامترهای بی هنجاری مغناطیسی.

نماد	شرح پارامتر
F	ضریب بزرگی
X	فاصله نقطه اندازه گیری M از نقطه مرجع R
Z	فاصله از سطح زمین تا بالای بی هنجاری
ζ	فاصله از نقطه مبدأ O تا نقطه مرجع R
A	بی هنجاری منطقه ای
B	بی هنجاری اولیه باقی مانده
φ	زاویه

مغناطیسی در جهت ساعتگرد است. تعریف پارامتر φ به صورت $\varphi = 2I_0^* - \delta - 90^\circ$ است $-45^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ$ که I_0^* زاویه مؤثر میل مغناطیس قطبیده در صفحه قائم عمود بر امتداد ساختاری است و با رابطه $I_0^* = \tan^{-1}(\tan I_0 / \sin \alpha)$ تعریف می شود. δ زاویه شیب صفحه است که از 0 تا 180 تغییر می کند.

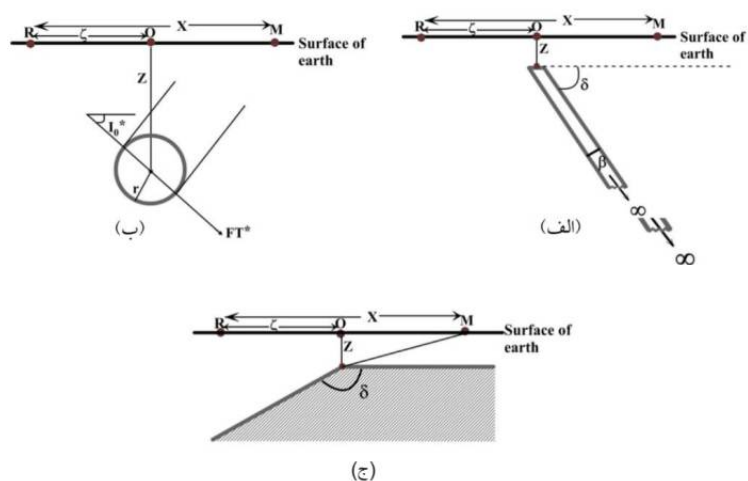


شکل 2. (الف) مسیر الگوریتم نیوتن (منحنی سبز) و الگوریتم منطقه مورد اعتماد (منحنی قرمز) برای رسیدن به نقطه کمینه (ب) مسیر جزئی تر شده که مقایسه بهتر روش نیوتن و منطقه مورد اعتماد را ممکن می کند.

بی هنجاری مغناطیسی یک استوانه افقی متأثر از بی هنجاری منطقه ای A و بی هنجاری اولیه باقی مانده B در نقطه مشاهده ای M در طول محور X به شکل زیر است (پراکاس راثو و همکاران، 1986):

از آنجاکه انتخاب مقدار اولیه اهمیت زیادی در مسائل غیرخطی دارد و با توجه به اینکه پارامترهای هریک از بی‌هنجاری‌های مغناطیسی از لحاظ جنس و ماهیت متفاوت از یکدیگر هستند؛ برای ورودی الگوریتم وارون‌سازی، به روشی برای یک تخمین اولیه از این پارامترها نیاز است. در اینجا از ایده استفاده‌شده در مقاله قناتی و همکاران (2017) و (2015) برای تخمین مقدار اولیه قبل از فرایند بهینه‌سازی استفاده می‌شود. این روش معادلات مربوط به هر شکل هندسی را خطی می‌کند و با دادن مقادیر اولیه مناسب، به‌دست‌آوردن مقادیر مناسب نهایی را تسهیل خواهد کرد. شکل‌های 3- الف، ب و ج به‌ترتیب پارامترهای بی‌هنجاری

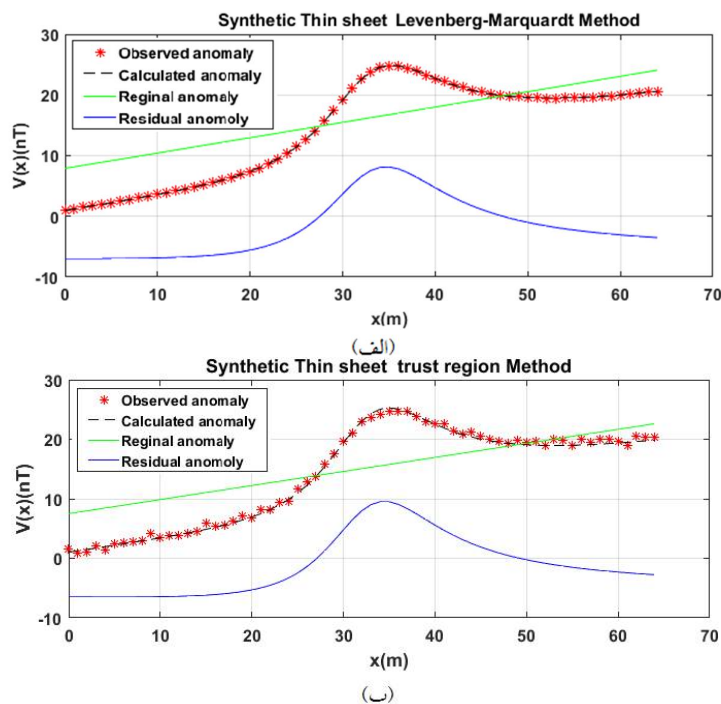
صفحه نازک، استوانه و گسل را نشان می‌دهند. جدول 2 پارامترهای مدل مصنوعی صفحه نازک و مقادیر معکوس‌سازی‌شده آنها را نشان می‌دهد. برای ایجاد داده مصنوعی، فاصله برداشت برابر 1 متر، طول مقطع 64 متر و مقدار نوفه برابر پنج درصد با توزیع گاوسی انتخاب شد. برای بررسی صحت الگوریتم، نتایج الگوریتم لونبرگ - مارکوارت هم در جدول 2 ارائه شده است. شکل 4- الف منحنی معکوس‌سازی لونبرگ - مارکوارت و شکل 4- ب منحنی معکوس‌سازی منطقه مورد اعتماد را نشان می‌دهد. الگوریتم منطقه مورد اعتماد با 8 تکرار و لونبرگ - مارکوارت با 14 تکرار همگرا شدند.



شکل 3. اشکال هندسی ساده و مشخصات آنها (الف) صفحه نازک (ب) استوانه افقی (ج) گسل.

جدول 2. جواب‌های عددی بی‌هنجاری مغناطیسی مصنوعی ناشی از صفحه نازک با 5 درصد نوفه گاوسی با استفاده از الگوریتم منطقه مورد اعتماد و لونبرگ - مارکوارت با 10 بار تکرار مستقل.

پارامترهای مغناطیسی	مقادیر پارامترهای مورد نظر	مقادیر اولیه	الگوریتم منطقه مورد اعتماد	الگوریتم لونبرگ - مارکوارت
F	120/57	101/34	$1/224 \pm 119/990$	$0/199 \pm 120/594$
Z	32/5	28/82	$0/057 \pm 32/487$	$0/014 \pm 32/506$
φ	0/6	0/520	$0/016 \pm 0/524$	$0/002 \pm 0/52271$
Z	8	7/104	$0/085 \pm 7/956$	$8/002 \pm 0/016$
A	0/25	0/21	$0/002 \pm 0/248$	$0/25 \pm 2/685 \times 10^{-4}$
B	2	1/73	$0/044 \pm 1/99$	$1/993 \pm 0/009$



شکل 4. منحنی معکوس‌سازی (الف) لونبرگ - مارکوارت (ب) منطقه مورد اعتماد برای صفحه نازک مصنوعی.

افزایش نوفه تا میزان 20 درصد خطای دو روش زیاد می‌شود و پارامترهای مدل واگرا می‌شوند. معیار واگرایی، شکل حاصل از معکوس‌سازی است. با 100 بار تکرار در هر دو روش، روش منطقه مورد اعتماد 25 بار و روش لونبرگ - مارکوارت 48 بار دچار واگرایی می‌شود که به معنای این است که روش منطقه مورد اعتماد در معکوس‌سازی داده‌ها از کارایی بیشتری برخوردار است.

جدول 3 پارامترهای مدل مصنوعی استوانه و مقادیر معکوس‌سازی شده آنها را نشان می‌دهد. فاصله برداشت، 1 متر و طول مقطع، 100 متر انتخاب شد. الگوریتم منطقه مورد اعتماد با 12 تکرار و الگوریتم لونبرگ - مارکوارت با 37 تکرار به همگرایی رسید. شکل 5- الف منحنی معکوس‌سازی لونبرگ - مارکوارت و شکل 5- ب منحنی معکوس‌سازی منطقه مورد اعتماد را نشان می‌دهد. با

جدول 3. جواب‌های عددی بی‌هنجاری مغناطیسی مصنوعی ناشی از استوانه افقی با 5 درصد نوفه گاوسی با استفاده از الگوریتم منطقه مورد اعتماد و لونبرگ - مارکوارت با 10 بار تکرار مستقل.

پارامترهای مغناطیسی	مقادیر پارامترهای مورد نظر	مقادیر اولیه	الگوریتم منطقه مورد اعتماد	الگوریتم لونبرگ - مارکوارت
			پارامترهای تخمینی با 5 درصد نوفه گاوسی	پارامترهای تخمینی با 5 درصد نوفه گاوسی
F	272739/06	209155/16	$421/57 \pm 272721/97$	$10^{-4} \times 1 \pm 272739/06$
Z	50	49/9	$0/01 \pm 49/994$	$10^{-4} \times 1 \pm 50$
φ	0	0	0	0
Z	10	5/17	$0/01 \pm 9/998$	$10^{-4} \times 1 \pm 10$
A	0/05	0/07	$0/07 \pm 0/031$	$10^{-4} \times 1 \pm 0/05$
B	0/1	-0/16	$0/02 \pm 0/034$	$10^{-4} \times 1 \pm 0/1$

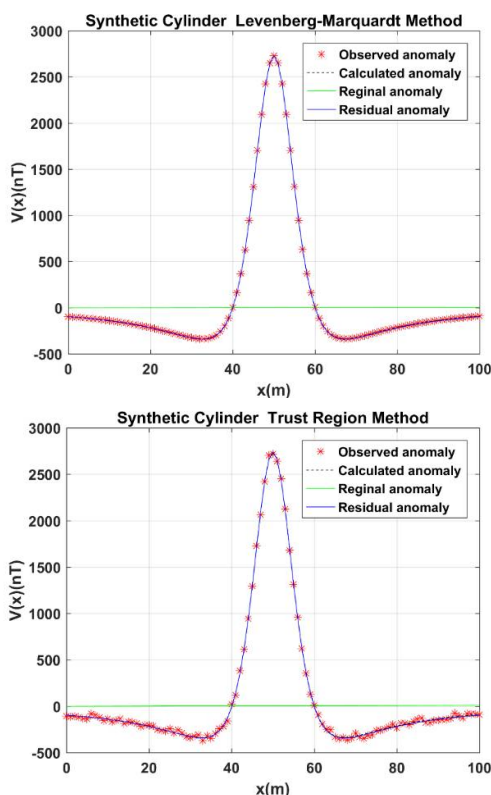
جدول 4. جواب‌های عددی بی‌هنجاری مغناطیسی مصنوعی ناشی از گسل با 5 درصد نوفه گاوسی با استفاده از الگوریتم منطقه مورد اعتماد و لونبرگ-مارکوارت با 10 بار تکرار مستقل.

پارامترهای مغناطیسی	مقادیر پارامترهای مورد نظر	مقادیر اولیه	الگوریتم منطقه مورد اعتماد	الگوریتم لونبرگ-مارکوارت
			پارامترهای تخمینی با 5 درصد نوفه گاوسی	پارامترهای تخمینی با 5 درصد نوفه گاوسی
F	225	229/76	$0/516 \pm 224/544$	$0/089 \pm 224/582$
Z	32	49/9	$0/012 \pm 31/982$	$0/003 \pm 31/465$
φ	-60	0	$0/222 \pm -59/528$	$0/02 \pm -59/75$
Z	4	5/17	$0/009 \pm 3/991$	$0/003 \pm 3/993$
A	0/01	0/07	$0/0012 \pm 0/0087$	$10^{-4} \times 1/791 \pm 0/008$
B	0/1	-0/16	$0/031 \pm 0/124$	$0/006 \pm 0/132$

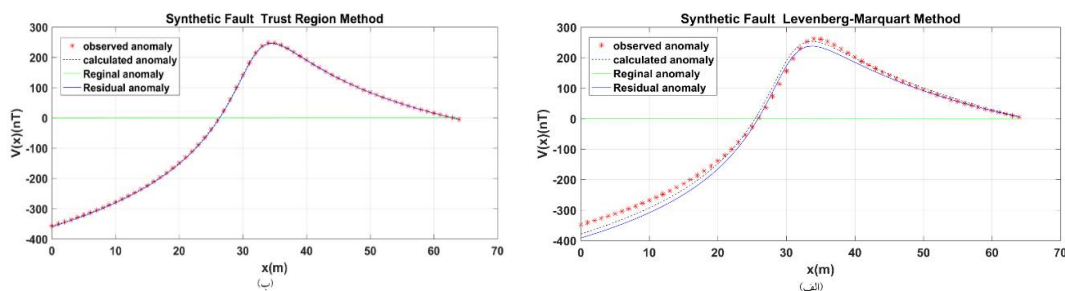
جدول 4 پارامترهای مدل گسل مصنوعی و مقادیر معکوس‌سازی‌شده آنها را نشان می‌دهد. فاصله برداشت 1 متر، طول مقطع 64 متر و مقدار نوفه هم پنج درصد با توزیع گاوسی انتخاب شده است. شکل 6-الف منحنی معکوس‌سازی لونبرگ-مارکوارت و شکل 6-ب منحنی معکوس‌سازی منطقه مورد اعتماد را نشان می‌دهد. الگوریتم منطقه مورد اعتماد با 18 تکرار و الگوریتم لونبرگ-مارکوارت با 37 تکرار به همگرایی رسید.

3-3 داده‌های واقعی

بعد از ارزیابی الگوریتم منطقه مورد اعتماد روی بی‌هنجاری‌های مصنوعی، در این بخش روش پیشنهادی برای داده‌های واقعی پیاده می‌شود. این داده‌ها مربوط به منطقه معدنی پیم (Pima) در آمریکاست. این منطقه نقش بزرگی در تولید فلزاتی مثل مس، مولیبدن، قلع، روی، نقره و طلا در آمریکا دارد. با استفاده از اطلاعات اولیه و زمین‌شناسی این نتیجه به‌دست‌آمد که شکل بی‌هنجاری مغناطیسی انتخاب‌شده به‌صورت دایک است. داده‌ها به‌صورت یک شبکه متشکل از مقاطعی با طول 728 متر با فاصله برداشت 25 متری در 31 نقطه اندازه‌گیری شده است. مانند آنچه که در مدل‌های مصنوعی انجام شد، ابتدا تخمینی از مدل اولیه زده می‌شود و سپس پارامترهای مدل با دو روش لونبرگ-مارکوارت و منطقه مورد اعتماد برگردان



شکل 5. منحنی معکوس‌سازی (الف) لونبرگ-مارکوارت (ب) منطقه مورد اعتماد برای استوانه افقی مصنوعی.



شکل 6. منحنی معکوس‌سازی (الف) لونبرگ - مارکوارت (ب) منطقه مورد اعتماد برای گسل مصنوعی.

جدول 5. نتایج مدل‌سازی معکوس معدن مس پیمبا با استفاده از الگوریتم منطقه مورد اعتماد و لونبرگ - مارکوارت.

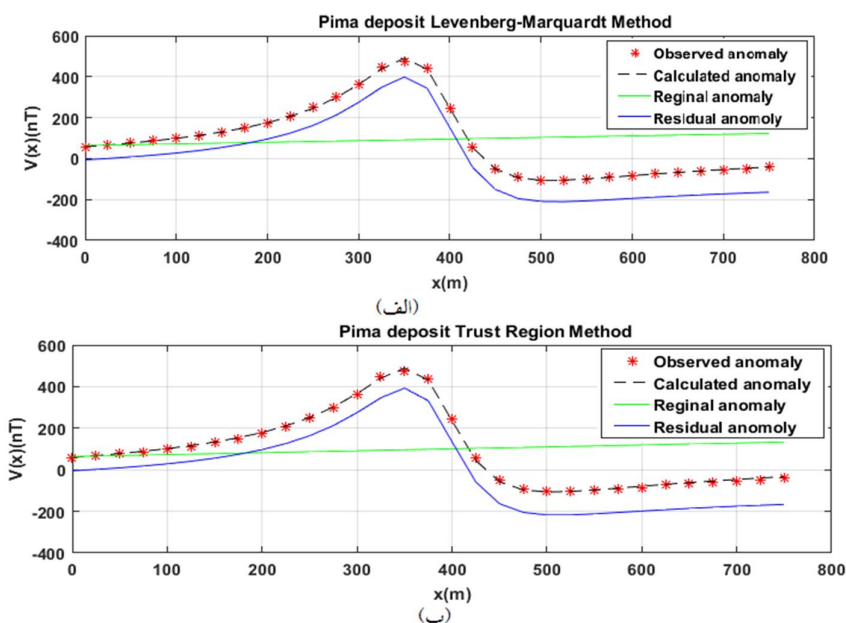
پارامترهای مغناطیسی	الگوریتم منطقه مورد اعتماد	الگوریتم لونبرگ - مارکوارت
F	39031/02	39031/01
ζ	384/329	384/32
φ	-0/905	-0/99
Z	64/3	63/87
A	0/0785	0/117
B	-29/782	-29/79

نتایج وارون‌سازی با استفاده از الگوریتم‌های لونبرگ - مارکوارت و منطقه مورد اعتماد به ترتیب در شکل‌های 7- الف و ب نمایش داده شده است. بر اساس نتایج نگاره حفاری در منطقه مورد نظر، بی‌هنجاری در عمق حدود 64/1 متری دیده شده است (راجو، 2003). جدول 6 به مقایسه مقادیر حاصل از روش منطقه مورد اعتماد و روش لونبرگ - مارکوارت و دیگر روش‌های اعمال‌شده در

مقالات قبلی روی داده‌های معدن پیمبا می‌پردازد. این روش - ها شامل منحنی‌های استاندارد (گای، 1963)، معکوس - سازی کمترین مربعات (عبدالرحمن و شرف‌الدین، 1996 و راجو، 2003)، کمینه‌سازی تابع مناسب (تلاس و اسفاهانی، 2011) و الگوریتم ازدحام ذرات (ایکینسی، 2016) هستند. با مقایسه نتایج کارهای قبلی و تخمین‌های نتیجه شده از الگوریتم پیشنهادی مشخص می‌شود که

جدول 6. مقایسه پارامترهای به‌دست‌آمده در روش منطقه مورد اعتماد، روش لونبرگ - مارکوارت و دیگر روش‌ها برای معدن پیمبا.

روش	پارامتر	F	ζ	φ	Z	A	B
لونبرگ - مارکوارت		39031/02	384/331	-51/938	63/8	0/0788	-29/783
منطقه مورد اعتماد		39031/024	384/49	-51/90	64/3	0/079	-29/72
حفاری		—	—	—	64/1	—	—
گای (1963)		—	—	-50	70	—	—
عبدالرحمن و شرف‌الدین (1996)		39369	—	-53	66	—	—
تلاس و اسفاهانی (2011)		41154	—	-47/58	71/25	—	—
راجو (2003)		—	—	-51	76/80	—	—
ایکینسی (2016)		39267/31	—	-50/76	68/29	—	—

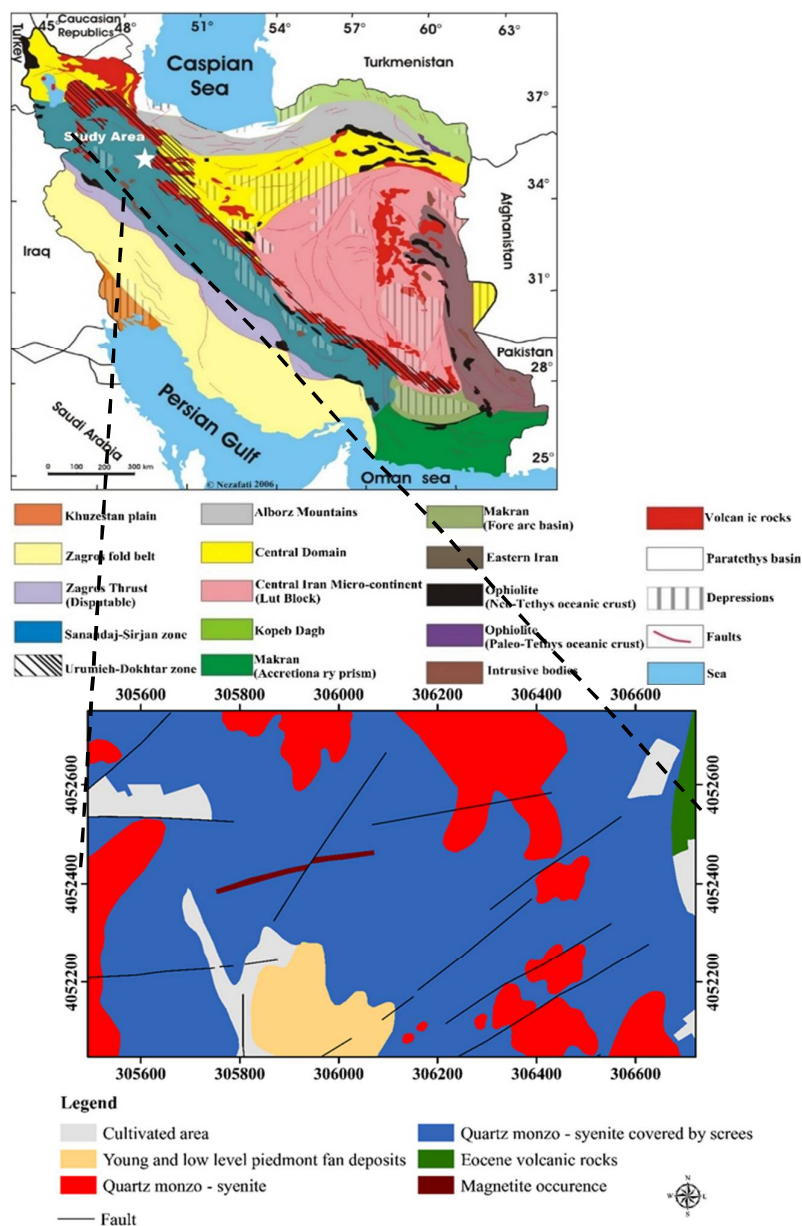


شکل 7. منحنی معکوس سازی (الف) لونبرگ - مارکوارت (ب) منطقه مورد اعتماد برای معدن مس پیمنا.

الگوریتم منطقه مورد اعتماد، نسبت به روش های دیگر برآورد بهتری از عمق بی هنجاری دارد.

داده واقعی دوم مربوط به معدن آهن مروارید زنجان است. این معدن در رشته کوه های طارم، در مجاورت دشت زنجان و 25 کیلومتری جنوب شرقی این شهرستان واقع شده است. شکل 8 مکان جغرافیایی و نقشه زمین شناسی همراه با کانی زایی منطقه را نشان می دهد. کانی زایی به صورت رگه ای، استوک و رک و برش هیدروترمالی است. بیشتر رگه ها موازی هستند و هندسه گسل ها در شکل کانی زایی مؤثر بوده است. پاراژنرها شامل مگنتیت، آپاتیت، پیریت، کالکوپیریت و کانی های ثانویه ای مثل هماتیت، مالاکیت، آزوریت و گوتیت هستند و کانی زایی عناصر خاکی کمیاب هم دیده می شود. کریستال های آپاتیت در اندازه های چند میلی متری و بزرگتر از 20 سانتی متری دیده می شوند. بر اساس مطالعات زمین شناسی و کانه نگاری، دگرسانی ها در منطقه مورد مطالعه

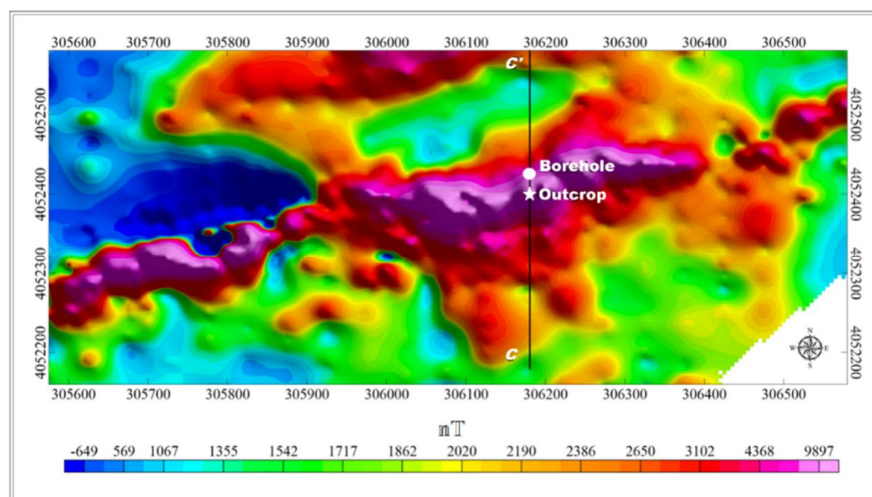
آرژلیکی (ایلیت، کائولینیت و مونت موریلونیت)، سرسیتی شدن، سیلیسی شدن، پتاسیک شدن، تورمالین شدن، اپیدوتی شدن، آکتینولیت شدن و کربناتی رخ داده است (عزیزی و همکاران، 2009 و مظاهری و همکاران، 2010). با توجه به مدل میدان مرجع ژئومغناطیسی بین المللی (IGRF)، مؤلفه های مغناطیسی منطقه شامل میدان مغناطیسی 47400 نانوتسلا، زاویه میل 54 درجه و زاویه انحراف 4/5 درجه است. جهت افزایش کیفیت داده ها و قبل از اجرای الگوریتم معکوس سازی، برای حذف نوفه و تعدیل اثر توپوگرافی عمق های پایین تر، از فیلتر ادامه فراسو استفاده شد. شکل 8 نقشه بی هنجاری باقی مانده را نشان می دهد که از تفریق میدان IGRF از میدان کل اندازه گیری شده به دست می آید. امتداد کانسار در راستای شرقی - غربی است و الگوریتم های معکوس سازی برای داده به دست آمده از مقطع CC' عمود بر امتداد بی هنجاری اجرا می شود که اطلاعات حفاری آن موجود است. این مقطع با طول 400



شکل 8. مکان و موقعیت منطقه مورد مطالعه (علامت ستاره) در نقشه زمین‌شناسی ایران (بالا) و نمای کلی از نقشه زمین‌شناسی منطقه مورد مطالعه (پایین).

جدول 7. نتایج معکوس‌سازی داده‌های مروارید زنجان با استفاده از الگوریتم منطقه مورد اعتماد و لونبرگ - مارکوارت.

پارامترهای مغناطیسی	الگوریتم منطقه مورد اعتماد	الگوریتم لونبرگ - مارکوارت
F	68215/116	104498/5
ζ	225/178	225/65
φ	0/3711	0/436
Z	2/436	2/6
A	4/136	3/28
B	1367/042	1306/91



شکل 9. نقشه بی‌هنجاری باقی‌مانده و محل قرارگیری مقطع CC' برای وارون‌سازی.

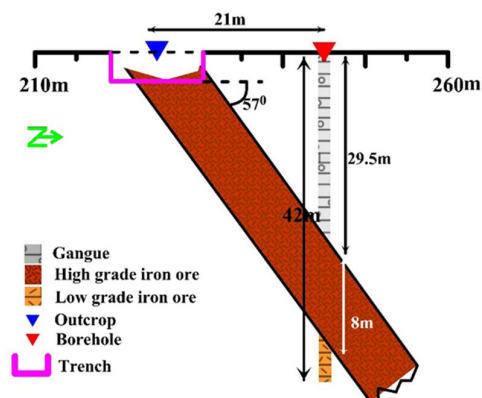
2 تکرار و روش لونیبرگ - مارکوارت با 4 تکرار به جواب می‌رسد. جدول 7 به مقایسه این دو روش پرداخته است و داده صحرایی مربوط به مقطع انتخاب‌شده همراه با نتایج وارون‌سازی با استفاده از الگوریتم‌های لونیبرگ - مارکوارت و منطقه مورد اعتماد به ترتیب در شکل‌های 11-10 الف و ب نمایش داده شده است. با رجوع به نتایج جدول 7 و اطلاعات حفاری از کانسار که در عمق 2 متری قرار دارد، مشخص می‌شود که اجرای روش پیشنهادی (عمق 2/4 متری) نسبت به الگوریتم لونیبرگ - مارکوارت (عمق 2/6 متری)، به تخمین بهتری از عمق بی‌هنجاری منجر شده است.

4 نتیجه‌گیری

این مقاله به بررسی استفاده از الگوریتم منطقه مورد اعتماد در معکوس‌سازی پارامترهای مدل‌های مغناطیسی ساده شامل صفحه نازک، استوانه افقی و گسل می‌پردازد. الگوریتم منطقه مورد اعتماد، کاربرد فراوانی در مسائل بهینه‌سازی نامقید دارد و در این مقاله به مقایسه این روش با روش جستجوی خطی از منظر چارچوب اولیه و جهت جستجو و طول گام پرداخته شده است. همچنین الگوریتم

متر و فاصله نقطه برداشت 10 متر در شکل 9 مشخص شده است.

مقطع ساده‌شده زمین‌شناسی و نقطه حفاری مغزه‌گیری اکتشافی در شکل 10 دیده می‌شود. براساس اطلاعات مغزه، بعد از یک لایه سطحی به عمق 29/5 متر، یک لایه پرعیار آهن به ضخامت 8 متر و یک لایه کم‌عیار آهن در زیر لایه پرعیار وجود دارد.



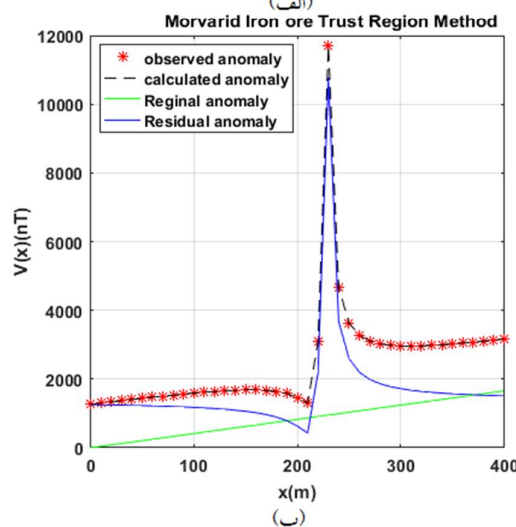
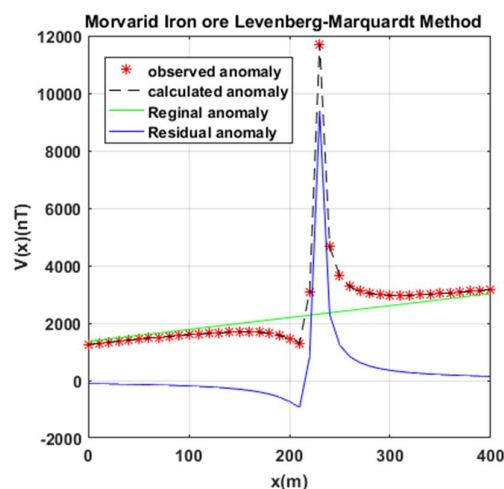
شکل 10. مقطع زمین‌شناسی، موقعیت حفاری، ترانشه حفر شده و رخنمونی از بی‌هنجاری در عمق 2 متری.

وارون‌سازی این معدن به دو روش منطقه مورد اعتماد و لونیبرگ - مارکوارت انجام شد. روش منطقه مورد اعتماد با

مورد اعتماد تغییر دهد. همچنین الگوریتم منطقه مورد اعتماد که در معکوس سازی داده های مصنوعی معادلات اشکال هندسی ساده و داده های واقعی معدن مس پرفیری پیم و معدن آهن آپاتیت دار زنجان به کار گرفته شد و نتایج آن با الگوریتم لونبرگ-مارکوارت از منظر تکرار و همگرایی مقایسه شد، همگرایی و کارایی مطلوب تری را نشان داد.

منابع

- Abdelazeem, M. M., 2013, Solving ill-posed magnetic inverse problem using a parameterized trust-region sub-problem: Contributions to Geophysics and Geodesy, **43**(2), 99-123.
- Abdelrahman, E. M., and Sharafeldin, S. M., 1996, An iterative least-squares approach to depth determination from residual magnetic anomalies due to thin dikes: Applied Geophysics, **34**, 213-220.
- Andrei, N., 2008, An unconstrained optimization test functions collection: Advanced Modeling and Optimization, **10**(1), 147-161.
- Aster, R. C., Borchers, B., and Thurber, C. H., 2013, Parameter Estimation and Inverse Problems: Elsevier, Amsterdam.
- Atchuta, R. D., Ram Babu, H. V., and Sanker Narayan, P. V., 1980, Relationship of magnetic anomalies due to subsurface features and the interpretation of sloping contacts: Geophysics, **25**, 32-36.
- Azizi, H., Mehrabi, B., and Akbarpour, A., 2009, Genesis of Tertiary magnetite-apatite deposits, Southeast of Zanjan, Iran: Resource Geology, **59**(4), 330-341.
- Berghen, F. V., 2004, CONDOR: a constrained, non-linear, derivative-free parallel optimizer for continuous, high computing load, noisy objective functions: PhD. thesis, Universite Libre de Bruxelles, Faculte des Sciences Appliquees.
- Boyd, S., and Vandenberghe, L., 2004, Convex Optimization: Cambridge.
- Conn, A., Gould, N., and Toint, P., 2000, Trust Region Methods: Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia PA.
- Dan, H., Yamashita, N., and Fukushima, M., 2002, Convergence properties of the inexact Levenberg-Marquardt method under local



شکل 11. منحنی معکوس سازی (الف) لونبرگ - مارکوارت (ب) منطقه مورد اعتماد برای معدن آهن مروارید.

منطقه مورد اعتماد از منظر تعداد تکرار در بهینه سازی توابع استاندارد ریاضی با پرکاربردترین روش جستجوی خطی یعنی روش نیوتن مقایسه شد و نشان داده شد که الگوریتم منطقه مورد اعتماد سریع تر و کاراتر است. همچنین اثبات شد که الگوریتم لونبرگ-مارکوارت حالت خاصی از الگوریتم منطقه مورد اعتماد است. برای به کارگیری این روش در مسائل کمترین مربعات و مسائل معکوس به تعریف الگوریتمی نیاز است که پارامتر میرایی روش لونبرگ-مارکوارت را بسته به شرایط الگوریتم منطقه

- error bound: Optimization Methods and Software, **17**(4), 605–626.
- Ekinci, Y. L., 2016, MATLAB-based algorithm to estimate depths of isolated thin dike-like sources using higher-order horizontal derivatives of magnetic anomalies: SpringerPlus, **5**(1).
- Fan, J. Y., 2003, A modified Levenberg-Marquardt algorithm for singular system of nonlinear equations: Computational Mathematics, **21**(5), 625–636.
- Fan, J., and Pan, J., 2006, Convergence properties of a self-adaptive Levenberg-Marquardt algorithm under local error bound condition: Computational Optimization and Applications, **34**(1), 47–62.
- Fletcher, R., 1980, Practical Methods of Optimization, Volume 1: Unconstrained Optimization: John Wiley & Sons.
- Gavin, H. P., 2017, The Levenberg-Marquardt method for nonlinear least squares curve-fitting problems: Department of Civil and Environmental Engineering, Duke University.
- Gay, D. M., 1981, Computing optimal locally constrained steps: SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing, **2**(2), 186–197.
- Gay, P., 1963, Standard curves for interpretation of magnetic anomalies over long tabular bodies: Geophysics, **28**, 161–200.
- Ghanati, R., Ghari, H. A., and Fatehi, M., 2017, Regularized nonlinear inversion of magnetic anomalies of simple geometric models using Occam's method: an application to the Morvarid iron-apatite deposit Iran: Acta Geodaetica et Geophysica, **52**(4), 555–580.
- Ghanati, R., Ghari, H. A., Mirzaei, M., and Hafizi, M. K., 2015, Nonlinear inverse modeling of magnetic anomalies due to thin sheets and cylinders using Occam's method: in 8th congress of the Balkan geophysical society, Chania, Greece.
- Goldfeld, S. M., Quandt, R. E., and Trotter, H. F., 1966, Maximization by quadratic hill-climbing: Econometrica, **34**, 541–551.
- Grodzevich, O., 2004, Regularization using Parameterized Trust Region Sub-problem: M.Sc. thesis in mathematics, University of Waterloo, Ontario, Canada.
- Gunn, P. J., 1997, Quantitative methods for interpreting aeromagnetic data: a subjective review: AGSO Journal of Australian Geology and Geophysics, **17**(2), 105–113.
- Hanke, M., 1997, A regularizing Levenberg-Marquardt scheme, with applications to inverse groundwater filtration problems: Inverse Problems, **13**(1), 79–95.
- Kabanikhin, S. I., 2008, Definitions and examples of inverse and ill-posed problems: Journal of Inverse and Ill-Posed Problems, **16**, 317–357.
- Karush, W., 1939, Minima of Functions of Several Variables with Inequalities as Side Constraints: M.Sc. Dissertation, Department of Mathematics, University of Chicago, Chicago, Illinois.
- Kuhn, H. W., Tucker, A. W., 1951, Nonlinear programming: Proceedings of 2nd Berkeley Symposium, Berkeley: University of California Press, 481–492.
- Levenberg, K., 1944, A Method for the Solution of Certain Non-Linear Problems in Least Squares: Quarterly of Applied Mathematics, **2** (2), 164–168.
- Marquardt, D., 1963, An Algorithm for Least-Squares Estimation of Nonlinear Parameters, SIAM Journal on Applied Mathematics: **11** (2): 431–441.
- Martinez, J. M., 1994, Local minimizers of quadratic functions on Euclidean balls and spheres: SIAM Journal of Optimization, **4**(1), 159–176.
- Mazaheri, M. S., Ghaderi, M., and Karimpour, M. H., 2010, Aliabad-Morvarid iron-apatite deposit, a Kiruna type example in Iran: 1st International Applied Geological Congress, Department of Geology at Islamic Azad University, Mashhad Branch, Iran.
- Menke, W., 1984, Geophysical Data Analysis: Discrete Inverse Theory: Academic Press, Cambridge.
- More, J. J., and Sorensen, D. C., 1983, Computing a trust region step: SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing, **4**(3), 553–572.
- Nabighian, M. N., Grauch, V. J. S., Hansen, R. O., LaFehr, T. R., Li, Y., Peirce, J. W., Phillips, J. D., and Ruder, M. E., 2005, The historical development of the magnetic method in exploration: Geophysics, **70**(6), 33–61.
- Nocedal, J., and Wright, S. J., 1999, Numerical Optimization: Springer series in operations research edition.
- Petrov, Y. P., and Sizikov, V. S., 2005, Well-Posed, Ill-Posed, and Intermediate Problems with Applications: Berlin, Boston: De Gruyter.
- Powell, M. J. D., 1975, Convergence properties of a class of minimization algorithms: in Nonlinear Programming 2, O. L. Mangasarian, R. R. Myer, and S. M. Robinsons, Eds., Academic Press, New York, 1–27.
- Prakas Rao, T. K. S., Subrahmanyam, M., and Srikrishna Murthy, A., 1986, Nomograms for

- direct interpretation of magnetic anomalies due to long horizontal cylinders: *Geophysics*, **51**(11), 2150–2159.
- Raju, D. C. V., 2003, LIMAT: a computer program for least-squares inversion of magnetic anomalies over long tabular bodies: *Computer and Geoscience*, **29**, 91–98.
- Shan, Sh., 2008, A Levenberg-Marquardt Method For Large-Scale Bound-Constrained Nonlinear Least-Squares Master of Science thesis: The Faculty of Graduate Studies (Computer Science), The University of British Columbia.
- Sorensen, D. C., 1980, Newton's method with a model trust region modification: *SIAM Journal on Numerical Analysis*, **19**(2), 409–426.
- Stanley, J. M., 1977, Simplified gravity and magnetic interpretation of contact and dyke-like structures: *Bulletin of the Australian Society of Exploration Geophysicists*, **8**(3), 60–64.
- Telford, W. M., Geldart, L. P., and Sheriff, R. E., 1990, *Applied Geophysics*, 2nd Edition: Cambridge University Press, Cambridge.
- Tikhonov, A. N., and Arsenin, V. Y., 1977, *Solutions of Ill-Posed Problems*: Winston and Sons, Washington DC.
- Tlas, M., and Asfahani, J., 2011, Fair function minimization for interpretation of magnetic anomalies due to thin dikes, spheres and faults: *Applied Geophysics*, **75**(1), 237–243.
- Wang, Y., and Ma, Sh., 2009, A fast subspace method for image deburring: *Applied Mathematics and Computation*, **215**, 2359–2377.
- Wang, Y., and Yuan, Y., 2001, A trust region method for solving distribute parameter identification problems: *Journal of Computational Mathematics*, **21**(6), 759–772.
- Wang, Y., and Yuan, Y., 2005, Convergence and regularity of trust region methods for nonlinear ill-posed inverse problems: *Inverse Problems*, **21**(3), 821–838.
- Yamashita, N., and Fukushima, M., 2001, On the rate of convergence of the Levenberg-Marquardt method: *Computing (Suppl.)*, **15**, 239–249.
- Yuan, Y., 2000, A review of trust region algorithms for optimization: in: Ball, J. M., Hunt, J. C. R. (eds.) *ICIAM 99, Proceedings of the Fourth International Congress on Industrial and Applied Mathematics*, 271–282, Oxford University Press, Oxford.
- Yuan, Y., 2015, Recent advances in trust region algorithms: *Mathematical Programming*, **151**(1), 249–281.

Nonlinear Unconstrained Inversion of Geomagnetic Data Using Sub-Problem Trust-Region Algorithm

Rouhollah Faridi¹ and Reza Ghanati^{2*}

¹M.Sc. Graduated, Institute of Geophysics, University of Tehran, Tehran, Iran

²Assistant Professor, Institute of Geophysics, University of Tehran, Tehran, Iran

(Received: 06 March 2020, Accepted: 08 September 2020)

Summary

This paper presents the application of the trust-region algorithm to an unconstrained non-linear inversion of magnetic data. Inversion of geophysical data aims at getting physical attributes or model parameters. Geophysical inverse problems can be generally solved using two approaches: global search methods and gradient-based methods. The global search methods approach a global optimum while the gradient-based methods approach a local optimum point. However, the cost of global search method is higher with a huge number of the model parameters. In gradient-based methods, which are based on Jacobian and Hessian matrix, choosing improper initial values may lead to local minimums, and consequently, estimation of a subsurface model which may be far from the reality of the earth. To overcome this issue, the trust-region algorithm is proposed. The proposed method possesses a high convergence rate and it crosses local minimums and its numerical computations are much less compared to global algorithms.

To catch the new iteration in nonlinear problems, the line search and trust-region strategies are utilized. Both of these strategies usually employ the quadratic structure of the objective function and the Taylor expansion. They control descent condition with the step length and the search direction. The trust-region algorithm has proved to be more efficient and has better convergent properties especially for ill-posed inverse problems in comparison to the line search strategy. It has a potential to cover the global minimum under certain conditions. In trust-region method, an approximate model is constructed near the current iteration and the solution of the approximation model is taken as the next iteration. Compared to the line search algorithm, the trust-region method only trusts the approximate model in a region near the current iterate. This is reasonable, because for general non-linear functions, local approximate model scan only fits the original function locally. The region that the approximate model is trusted is called the trust-region. In the line search method, the search direction is first determined followed by the step length, while in the trust-region algorithm the step length is limited to the radius of trust-region followed by the determination of the search direction. Due to its strong convergence properties and robustness, trust-region methods have been studied in many disciplines.

Similar to every geophysical approach, interpretation of geomagnetic data is along with non-uniqueness and identical magnetic responses could be produced by different geometric shapes, thus the existence of initial information based on geological data is mandatory to achieve the model near to the reality of earth. The assumption of stable magnetic susceptibility makes it possible to achieve nonlinear equations of simple shapes. In this paper, we used the trust-region algorithm to solve nonlinear inverse potential field problems stemmed from simple-shape anomalies. First, an algorithm that adjoins the trust-region method to least squares problems is presented. Then, to verify the efficiency of the proposed methods, some synthetic and real numerical experiments are provided. Comparing the results derived from the trust-region method and those of the Levenberg-Marquardt, we can discover that the proposed strategy outperforms the Levenberg-Marquardt algorithm in terms of the rate of convergence and accuracy. The paper is structured as follow: In section 2, the theory of the trust-region algorithm as well as an algorithm that links the trust-region algorithm to least-squares problems is presented. Section 3 consists of the verification of the performance of the trust-region algorithm in minimization of two standard mathematical benchmarks and synthetic and real magnetic data derived from simple-shape anomalies such as thin sheet, horizontal cylinder, and faults. Section 4 summarizes the results of this study.

Keywords: Nonlinear inversion, Trust-region algorithm, Levenberg-Marquardt method, Linear search method

*Corresponding author:

rghanati@ut.ac.ir