

اثر چینش باد در سطح زمین و وردایست بر ناپایداری کژ فشار

علی محمدی^۱ و علیرضا محب‌الحجه^{۲*}

^۱ دانشگاه علوم دریایی امام خمینی (ره) نوشهر، مازندران، ایران
^۲ مؤسسه ژئوفیزیک دانشگاه تهران، ایران

(تاریخ دریافت: ۱۳۹۰/۱۱/۱، تاریخ پذیرش: ۱۳۹۱/۱۲/۲۲)

چکیده

با فرض یکنواختی تاوایی پتانسیلی زمین‌گرد، چینش باد روی مرز زیرین (سطح زمین) و مرز زیرین (وردایست) به منزله عوامل رخداد ناپایداری جریان‌های جوی به دست می‌آیند. در مدل‌های کلاسیک ناپایداری کژ فشار (مدل‌های چارنی و ایدی) چینش باد با ارتفاع ثابت در نظر گرفته می‌شود و از این رو نقش نایکسانی چینش باد روی سطح زمین و سطح وردایست عاملی مهم برای رشد امواج جوی در نظر گرفته نمی‌شود. در حالت تاوایی یکنواخت، طبق قضیه چارنی-استرن-پدلاسکی شرط لازم برای ناپایداری، هم‌علامت بودن چینش باد روی مرزهای زیرین و زبرین است. در پژوهش حاضر نشان داده می‌شود که نسبت چینش باد در مرزهای زیرین و زبرین در رخداد ناپایداری موثر است و چنانچه این نسبت از مقداری آستانه‌ای کمتر و از مقداری حدی بیشتر شود، امواج جوی پایدار باقی می‌مانند و رشد نمی‌کنند.

بر اساس مدل ایدی طول موج‌های کوچک‌تر از $2/4$ برابر شعاع دگرشکلی راسبی پایدارند ولی در پژوهش حاضر روشن می‌شود که در این حالت نیز امواج، به شرط آنکه چینش باد در وردایست کوچک‌تر از چینش باد روی سطح زمین شود، رشد می‌کنند.

واژه‌های کلیدی: تاوایی پتانسیلی زمین‌گردوار، مدل شبه‌زمین‌گرد، ناپایداری کژ فشار، چینش باد، مدل ایدی، وردایست

The Earth surface and the tropopause wind shear effects on baroclinic instability

Ali Mohammadi¹ and Alireza Mohebalhojeh^{2*}

¹Imam-Khomeini Marine University, Noshahr, Iran

²Institute of Geophysics, University of Tehran, Iran

(Received: 21 January 2012, accepted: 12 March 2013)

Summary

The behavior of the oceans and the atmosphere in mid-latitudes may be considered as a small departure from the background rotation of the Earth as a solid body. This provides

*Corresponding author:

amoheb@ut.ac.ir

*نگارنده رابط:

a ground for the quasigeostrophic (QG) approximation, which is obtained by a formal expansion of the primitive equations in Rossby number that measures the intensity of such departures from the background rotation. The resulting equations, though much simpler than the full set, are still complex enough that it is not always clear what they imply about the nature of their solutions. Therefore, further simplifications have been sought in particular contexts, looking for more tractable models. A model of this kind constructed based on the assumption of a uniform interior QG potential vorticity is discussed in this paper. A further simplification may be obtained by assuming uniform stratification in the atmosphere/ocean. This model has been proposed for explaining some aspects of instability in the atmosphere by Charney and Eady and is used in this paper for studying some effects of wind shear on baroclinic instability.

In the Eady model, the wind shear on the lower (ground surface) and upper (tropopause surface) boundaries plays a determining role in the occurrence of instability. However, in the classic form of the baroclinic instability theory of Charney and Eady, wind shear is considered constant with height, and therefore the effect of variations in wind shear on the ground and tropopause surfaces are not covered. According to the Charney–Stern–Pedlosky theorem, with uniform interior potential vorticity, for instability to occur, the wind shear at the upper and lower boundaries must be of the same sign. This theorem provides the necessary condition for instability but gives no further information on the effect of the wind shear at the two boundaries.

Then here, the objective is to assess the effects of the wind shear on Eady-like models, that is, models with uniform interior QG potential vorticity. After examining a quadratic vertical zonal wind profile for the basic state as a special case, the arbitrary variation of the wind shear at the two boundaries is studied in an Eady-like model. It is shown that for each wavenumber, there are upper and lower bounds, respectively denoted by γ_1 and γ_2 , for the ratio of the tropopause wind shear \bar{u}_{zH} to the earth's surface wind shear \bar{u}_{z0} , beyond which instability cannot occur. That is, for instability the ratio must be in the interval

$$\gamma_1 > \frac{\bar{u}_{zH}}{\bar{u}_{z0}} > \gamma_2$$

which serves as an additional necessary condition for instability. Considering all the wavenumbers, the lowest value for γ_2 is found to be 0.3. With nondimensional wavenumbers $k^* = (2\pi/L)L_R$ in which L and L_R are respectively the dimensional wavelength and Rossby deformation radius, for $k^* > 2.4$, instability occurs provided that the wind shear at the lower boundary is greater than that at the upper boundary. For k^* between 1 and 1.4, γ_1 tends to infinity which means that for instability there is no restriction on the magnitude of the wind shear at the upper boundary.

Keywords: Quasigeostrophic potential vorticity, quasigeostrophic model, baroclinic instability, wind shear, Eady model, tropopause

۱ مقدمه

توازن زمین گرد هنگامی که مقیاس افقی حرکت بزرگ و عدد بی بُعد راسبی کوچک باشد معتبر است. معادلاتی که این شرایط در آنها لحاظ شده است معادلات شبه‌زمین گرد نامیده می‌شوند و دارای کاربردی وسیع در مباحث نظری هواشناسی و اقیانوس‌شناسی هستند. در حالت خاصی از کاربرد معادلات شبه‌زمین گرد، تاوایی پتانسیلی و بسامد شناوری در نواحی داخلی وردسپهر یکنواخت فرض می‌شود. روی سطح زمین و وردایست حرکت قائم صفر است لذا حرکت افقی در سطح زمین را می‌توان با معادلات دو بُعدی بررسی کرد. در این پژوهش مدل شبه‌زمین گرد با فرض یکنواختی تاوایی پتانسیلی زمین گرد برای بررسی ناپایداری کژ فشار مورد تحقیق قرار می‌گیرد. مدل ایدی (ایدی ۱۹۴۹) یکی از مدل‌های اولیه ناپایداری کژ فشار است که ایدی با ساده‌سازی‌هایی روی معادلات بسط به فاصله اندکی از مدل چارنی (۱۹۴۷) عرضه کرد. ساده‌سازی‌های صورت گرفته در مدل ایدی شامل استفاده از مدل شبه‌زمین گرد روی صفحه f همراه با تقریب بوسینسک، به معنای چگالی ثابت با ارتفاع، است که آن را از مدل چارنی متمایز می‌کند. حالت اولیه با یک شارش مداری دارای چینش قائم یکنواخت سرعت و بسامد برانت-وایسالای ثابت با ارتفاع ساخته می‌شود. تفاوت اساسی مدل ایدی با مدل چارنی، صفر بودن تغییرات نصف‌النهاری تاوایی پتانسیلی زمین گرد حالت پایه $(\partial \bar{q} / \partial y)$ است. این امر نتیجه‌ای از ساده‌سازی‌های صورت گرفته در مدل ایدی است.

گرین (۱۹۶۰) با وارد کردن عامل β ، گرادیان نصف‌النهاری پارامتر کوریولیس، نتایج ایدی را توسعه داده است. مسئله مورد بررسی گرین در اصل همان مدل چارنی (۱۹۴۷) ولی با استفاده از تقریب بوسینسک است.

برخلاف چارنی، گرین توانست با روش عددی و استفاده از روش تفاضل متناهی، نواحی ایجاد ناپایداری را حل کند. در مدل گرین مانند مدل ایدی از دو مرز در سطح زمین و وردایست استفاده شده است.

چارنی و استرن (۱۹۶۲) و پدلاسکی (۱۹۶۴) روش ساختند که برای رشد امواج جوئی لازم است گرادیان نصف‌النهاری تاوایی پتانسیلی حالت پایه حداقل یکی از شرایط زیر را داشته باشد

الف) تغییر علامت در نواحی داخلی وردسپهر

ب) هم‌علامت بودن با چینش باد در مرز زیرین (سطح زمین)

پ) داشتن علامت مخالف با چینش باد در مرز زیرین (وردایست)

و با فرض صفر بودن گرادیان نصف‌النهاری تاوایی پتانسیلی حالت پایه شرط لازم برای رشد امواج جوئی به هم‌علامت بودن چینش باد در مرزهای زیرین و زیرین تبدیل می‌شود.

برای رخدادهای ناپایداری، لیندزن (۱۹۹۳) وجود طول موج آستانه، یعنی طول موجی که به‌ازای مقادیر بزرگ‌تر از آن ناپایداری رخ می‌دهد، را نتیجه مستقیم صفر بودن گرادیان نصف‌النهاری تاوایی پتانسیلی حالت پایه در مدل ایدی می‌داند. او استدلال می‌کند که شکل‌گیری ناپایداری، به ارتفاع تراز وردایست بستگی دارد و با افزایش ارتفاع تراز واردیست طول موج آستانه افزایش می‌یابد. لیندزن (۱۹۹۴) اثر β بر مدل ایدی را بررسی کرد. به‌رغم وجود اثر β ، او با فرض تاوایی پتانسیلی یکنواخت و استفاده از تابع‌های بسط بازه طول موج‌های ناپایدار را به‌دست آورد. لیندزن برخلاف مدل ایدی حد طول موج رشد امواج جوئی را به‌دست آورد و نشان داد که ناپایداری در بازه‌ای محدود از طول موج‌های امواج رخ می‌دهد. هارنیک و

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x}\right) q' + \frac{\partial \bar{q}}{\partial y} \frac{\partial \psi'}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

$$q' = \nabla^2 \psi' + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial z} \left(\varepsilon \rho_0 \frac{\partial \psi'}{\partial z} \right) \quad (2)$$

$$\frac{\partial \bar{q}}{\partial y} = \beta \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial z} \left(\varepsilon \rho_0 \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right), \quad (3)$$

در معادله‌های فوق q' و \bar{q} به ترتیب پریشیدگی و حالت پایه تاوایی پتانسیلی زمین‌گرد، β گرادیان نصف‌النهاری پارامتر کوریولیس، \bar{u} سرعت مداری حالت پایه، ψ' پریشیدگی تابع جریان، $\varepsilon = f^2_0 / N^2$ و N بسامد برانت-وایسالا است. ساده‌سازی‌های مدل ایدی عبارت‌اند از:

۱- ثابت بودن چگالی حالت پایه (تقریب بوسینسک)

۲- صفحه f ثابت ($\beta = 0$)

۳- ثابت بودن چینش قائم باد $\Lambda \frac{\partial \bar{u}}{\partial z}$

۴- سطوح مرزی در H و $z = 0$

علی‌رغم آن که به‌نظر می‌آید این ساده‌سازی‌ها مدلی نامناسب برای جو باشند، اما نتایج ارزشمندی از آنها برای بررسی ناپایداری کژفشار به‌دست می‌آید. با اعمال این فرض‌ها به رابطه (۱)، معادله زیر به‌دست می‌آید:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x}\right) \left(\nabla^2 \psi' + \varepsilon \frac{\partial^2 \psi'}{\partial z^2} \right) = 0, \quad (4)$$

که معمولاً با استفاده از شرایط مرز سخت در سطوح زیرین و زیرین در H ، $z = 0$ روی معادله انرژی ترمودینامیکی، یعنی

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x}\right) \frac{\partial \psi'}{\partial z} - \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \frac{\partial \psi'}{\partial x} = 0, \quad (5)$$

حل می‌شود. برای این منظور، تابع زیر را در حکم جواب در رابطه‌های بالا جای‌گزین می‌کنیم:

$$\psi'(x, y, z, t) = \phi(z) e^{i(kx + ly - ct)}, \quad (6)$$

$\phi(z)$ تابع ساختار در راستای قائم، k عدد موج در راستای مداری، l عدد موج در راستای نصف‌النهاری و c

لیندن (۱۹۹۸) مسئله ناپایداری را با استفاده از نمایه‌های واقعی‌تر $\partial \bar{q} / \partial y$ ، دما و چینش باد حل و با حالت کلاسیک ایدی و گرین مقایسه کردند. آنها نشان دادند که شرایط واقعی و اثرات پوشش سپهر، آستانه طول موج ناپایداری را تغییر می‌دهد.

اگر (۲۰۰۹) مدل ایدی را با در نظر گرفتن سرعت قائم تفسیر و معادله انرژی ترمودینامیکی را به دو بخش شامل فرارفت افقی و قائم دمای پتانسیلی تقسیم کرد. او روشن ساخت که در رخداد ناپایداری، نقش فرارفت افقی دمای پتانسیلی مهم‌تر از فرارفت قائم آن است و علت حضور نداشتن چینش باد در شرط ناپایداری ایدی را حضور آن در دو جمله فرارفت افقی و قائم دمای پتانسیلی عنوان کرد.

مقاله حاضر به اثر چینش باد در دو سطح زمین و وردیست در مدل‌های از نوع ایدی، یعنی مدل‌هایی که ویژگی اصلی مدل ایدی مبنی بر یکنواختی تاوایی پتانسیلی را دربردارند و یک یا چند ساده‌سازی دیگر مدل ایدی را برمی‌دارند، می‌پردازد. برای این منظور اثر چینش باد در نظر گرفتن یک نمایه مربعی با چینش‌های دلخواه در دو مرز بررسی و با شرط لازم چارنی-استرن-پدلاسکی برای ناپایداری مقایسه می‌شود.

۲ اثر چینش باد

۱-۲ مدل ایدی

هر دو مدل ایدی و چارنی بر مبنای معادله خطی شده تاوایی پتانسیلی زمین‌گردوار استوارند (برای جزئیات بیشتر رجوع شود به پدلاسکی، ۱۹۸۷؛ هولتن، ۲۰۰۴؛ ولیس، ۲۰۰۶) که با استفاده از مختصه قائم لگاریتم فشار به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

۲-۲ نمایه مربعی قائم باد

مدل ایدی منطبق بر حالتی است که در آن تغییرات سرعت باد با ارتفاع ثابت و افزایشی است. به منظور انطباق بیشتر مدل با جو واقعی نمایه قائم باد را از درجه دوم فرض می‌کنیم تا تراز باد بیشینه در آن وارد شود

$$\bar{u}(z) = az^2 + bz + c, \quad (14)$$

با استفاده از شرط $\bar{u}(0) = 0$ ، ثابت $c = 0$ به دست می‌آید. با در نظر گرفتن تراز باد بیشینه در ارتفاع h از سطح زمین $(\partial \bar{u}(z=h)/\partial z = 0)$ روابط زیر به دست می‌آید:

$$\bar{u}(z) = b \left(-\frac{z^2}{2h} + z \right) \\ \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = b \left(-\frac{z}{h} + 1 \right), \quad (15)$$

با در نظر گرفتن مقدار ثابتی برای N ، تولید حالت پایه‌ای با توزیع یکنواخت تاوایی پتانسیلی نظیر مدل ایدی، با وارد کردن پارامتر β و استفاده از $\alpha = \beta/(2\varepsilon)$ و $b = -\beta\varepsilon/h$ در نمایه مربعی (۱۴) امکان‌پذیر است. به این ترتیب انتخاب تراز باد بیشینه، نمایه مربعی را تعیین می‌کند. جای‌گذاری رابطه سرعت باد و تغییرات آن با ارتفاع در مرز زیرین (وردایست) می‌دهد:

$$\bar{u}(z=H) = b \left(-\frac{H^2}{2h} + H \right) = bH \left(-\frac{H}{2h} + 1 \right) = bHm \\ \frac{\partial \bar{u}(z=H)}{\partial z} = b \left(-\frac{H}{h} + 1 \right) = bn, \quad (16)$$

با مقایسه نمایه باد در مدل ایدی و نمایه درجه دوم داده شده مشاهده می‌شود که فقط ضرایب m و n به روابط اضافه شده‌اند و با توجه به اینکه این دو ضریب نیز برحسب نسبت H/h هستند لذا مسئله ایدی حالتی خاص از نمایه درجه دوم باد با ارتفاع است که در آن $h = \infty$ و $m = n = 1$ است.

با قرار دادن مقطع باد درجه دوم در معادله انرژی در مرزهای زیرین و زبرین و حل مسئله به روال مسئله ایدی،

سرعت فاز مختلط است. با قرار دادن جواب (۶) در معادله (۴) رابطه زیر

$$d^2 \phi / dz^2 - \alpha^2 \phi = 0, \quad (7)$$

به‌ازای $\alpha^2 = (k^2 + l^2)/\varepsilon$ به دست می‌آید. توجه شود که α در واقع عدد موج کلی بهنجار شده است. با قرار دادن جواب (۶) در رابطه (۵)، شرایط مرزی به صورت زیر به دست می‌آید:

$$(\Lambda z - c) \frac{\partial \phi}{\partial z} - \Lambda \phi = 0, \quad (8)$$

جواب عمومی معادله (۷) را می‌توان به یکی از دو شکل

$$\phi(z) = A \sinh(\alpha z) + B \cosh(\alpha z), \quad (9)$$

$$\phi(z) = A e^{\alpha z} + B e^{-\alpha z}, \quad (10)$$

نوشت که با جای‌گذاری در رابطه (۸) روی مرزهای $z=0, H$ داریم:

$$-c\alpha A - B\Lambda = 0 \\ \alpha(\Lambda H - c)(A \cosh(\alpha H) + B \sinh(\alpha H)) \\ - \Lambda(A \sinh(\alpha H) + B \cosh(\alpha H)) = 0 \quad (11)$$

شرط وجود جواب غیربدهی، صفر بودن دترمینان ضرایب A و B است که منجر به یک معادله درجه دوم برای سرعت فاز مختلط c با جواب زیر

$$c = \frac{\Lambda H}{2} \pm \frac{\Lambda H}{2} \left[1 - \frac{4}{\alpha H} \operatorname{cotgh}(\alpha H) + \frac{4}{\alpha^2 H^2} \right]^{1/2} \quad (12)$$

می‌شود. به‌ازای مقدار منفی زیر رادیکال، c مختلط می‌شود و جواب رشدیابنده به معنای ناپایداری حالت پایه است. از مساوی صفر قرار دادن عبارت زیر رادیکال، معادله غیرخطی زیر برای مقادیر α که به‌ازای آنها جواب رشدیابنده است، به دست می‌آید

$$1 - \frac{4}{\alpha H} \operatorname{cotgh}(\alpha H) + \frac{4}{\alpha^2 H^2} = 0, \quad (13)$$

حل عددی رابطه بالا نشان می‌دهد که شرط ناپایداری آن است که $\alpha H < 2.3994$ باشد.

در امواج است و همین حالت به‌ازای $h < H$ نیز برقرار است. این نتیجه با شرط ناپایداری چارنی-استرن-پدلاسکی (پدلاسکی، ۱۹۸۷؛ ویس، ۲۰۰۶) منطبق است. مطابق این شرط در حالت تاوایی پتانسیلی یکنواخت ناپایداری هنگامی رخ می‌دهد که تغییرات سرعت باد با ارتفاع در مرزهای زیرین و زبرین هم‌علامت باشند.

راه دیگر برای تولید حالت پایه‌ای با توزیع یکنواخت تاوایی پتانسیلی نظیر مدل ایدی بدون وارد کردن پارامتر β ، در نظر گرفتن تغییر N با z به قسمی است که

$$\frac{\partial \bar{q}}{\partial y} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{f_0^2}{N^2} \rho_0 \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right) = 0, \quad (19)$$

برای برآورده شدن آن لازم است که N^2 به صورت

$$N^2 = \frac{1}{\lambda_N} \frac{\partial u}{\partial z}, \quad (20)$$

با z تغییر کند که در آن λ_N مقدار ثابتی است. در این حالت جواب $q' = 0$ برای معادله (۱) به انضمام شرایط

معادله درجه دوم زیر برای سرعت فاز مختلط به دست می‌آید:

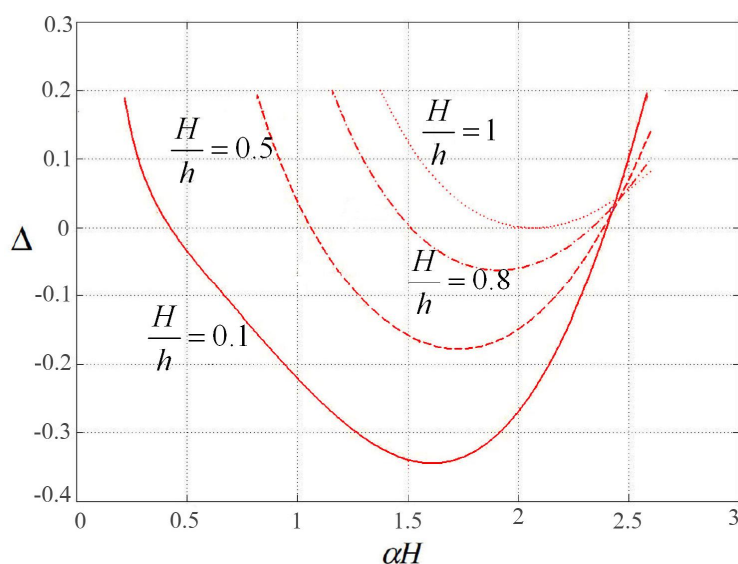
$$c^2 \alpha^2 + c \left(-\alpha^2 b H m + (n-1) b \alpha \cotgh \alpha H \right) - b^2 n + b^2 \alpha H m \cotgh \alpha H = 0, \quad (17)$$

به‌ازای مقادیر منفی Δ

$$\Delta = \left(-\alpha H m + (n-1) \cotgh \alpha H \right)^2 + 4(n + \alpha H m \cotgh \alpha H), \quad (18)$$

در معادله درجه دوم (۱۷)، c مختلط می‌شود و معادله‌ای غیرخطی برای مقادیر α مربوط به جواب‌های رشدیابنده به دست می‌آید (شکل ۱).

در جواب (۱۸)، ضرایب m و n ظاهر شده‌اند و با توجه به اینکه ضرایب به نسبت H/h بستگی دارند، حل عددی (۱۸) نشان می‌دهد که جواب‌های رشدیابنده فقط وقتی وجود دارند که $h > H$ شود. به‌ازای $h = H$ هیچ‌گونه جواب رشدیابنده‌ای وجود ندارد. لذا انطباق تراز باد بیشینه روی وردایست به معنای شکل نگرفتن ناپایداری



شکل ۱. نمودار رابطه (۱۷) که به‌ازای مقادیر متفاوت H/h رسم شده است.

که h ارتفاع تراز باد بیشینه برای مقطع مربعی، z_1 ارتفاع تراز دلخواه برابر با $4000m$ ، H ارتفاع تراز وردایست و a دامنه پریشیدگی برابر با $5ms^{-1}$ است. برای مقطع مربعی، یعنی بدون افزودن پریشیدگی، تغییرات N^2 با z و حل عددی معادله (۲۱) برای بخش‌های حقیقی و موهومی سرعت فاز در شکل ۳ آورده شده است. با افزودن پریشیدگی به دامنه فوق، چینش باد در سطح زمین و در نتیجه شرط مرزی زیرین تغییر می‌کند و طبق نتایج داده شده در شکل ۴، بخش موهومی سرعت فاز بسیار کوچک (در حدود 10^{-16}) و به معنای نبود ناپایداری است. حذف ناپایداری علی‌رغم آن صورت می‌گیرد که همچنان معیار چارنی-استرن-پدلاسکی در حکم شرط لازم برای ناپایداری برقرار است. بنابراین علاوه بر هم‌علامت بودن تغییرات سرعت در دو مرز زیرین و زیرین، عامل دیگری در ایجاد یا حذف ناپایداری دخالت دارد.

مرزی منجر به معادلات زیر برای تابع ساختار قائم می‌شود

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{N^2} \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) - k^2 \phi = 0$$

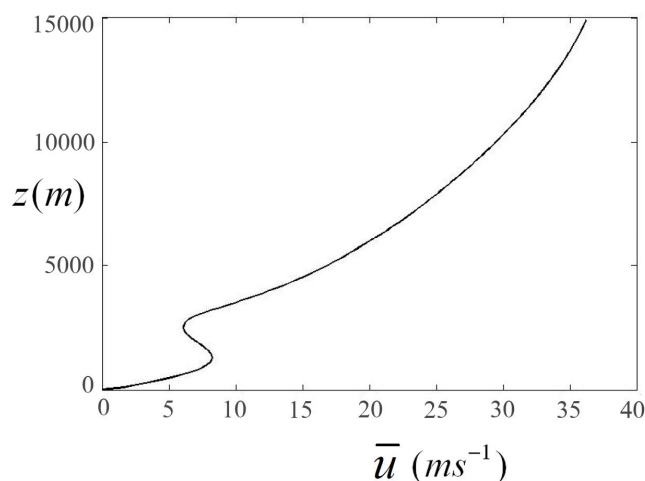
$$\frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \phi = 0, \quad z = 0, H \quad (21)$$

که به روش عددی عرضه شده در پیوست، بر مبنای کار هارنیک و لیندزن (۱۹۹۸) حل می‌شوند. حل عددی معادله (۲۱) برای بخش‌های حقیقی و موهومی سرعت فاز در شکل ۳ آورده شده است.

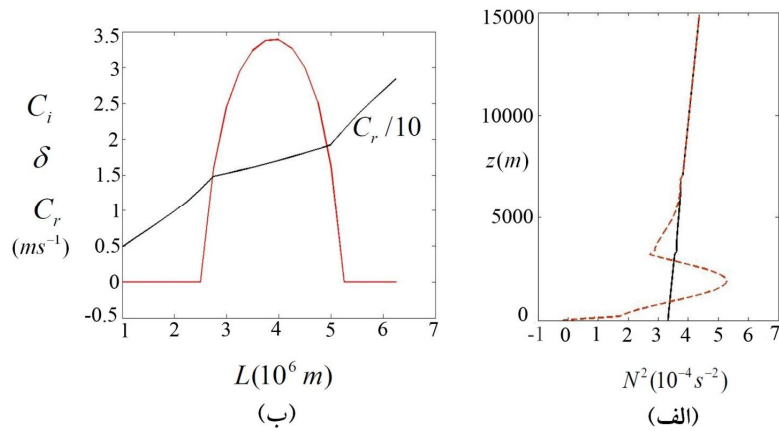
۳-۲ نمایه قائم باد غیرمربعی

در اینجا نمایه‌ای مربعی برای باد حالت پایه در نظر می‌گیریم و با وارد کردن یک پریشیدگی در قسمت زیرین حوزه آن را تبدیل به نمایه‌ای غیرمربعی می‌کنیم. نمایه باد حالت پایه حاصل (شکل ۲) به صورت زیر است:

$$\bar{u}(z) = \begin{cases} a \sin\left(\frac{2\pi z}{z_1}\right) + 0.004 \left(-\frac{z^2}{2h} + z \right) & 0 < z < z_1 \\ 0.004 \left(-\frac{z^2}{2h} + z \right) & z_1 < z < H \end{cases}$$



شکل ۲. نمایه قائم باد مورد استفاده در ارزیابی عددی نتایج قسمت ۳-۲.



شکل ۳. (الف) مقطع قائم بسامد شناوری برانت و ایسالا برای نمایه قائم باد مربعی (خط سیاه پُر) و نمایه قائم باد غیر مربعی (خط چین سرخ) مورد استفاده در قسمت ۲-۳؛ (ب) قسمت موهومی (خط سرخ) و حقیقی سرعت فاز (خط سیاه) برای نمایه قائم مربعی.

با قرار دادن جواب (۶) در معادله انرژی (۵) رابطه زیر

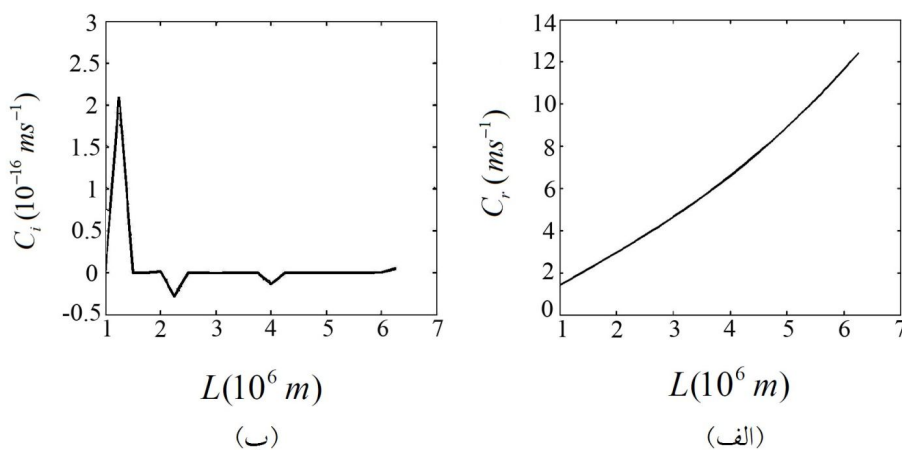
به دست می‌آید

$$(\bar{u} - c) \frac{d\phi}{dz} - \bar{u}_z \phi = 0, \quad (23)$$

که \bar{u}_z چینش قائم باد است. با فرض دلبخواه بودن تغییرات سرعت باد در لایه وردایست \bar{u}_{ZH} و سطح زمین $\bar{u}_Z = 0$ ، معادله (۲۱) روی سطوح مزبور به شکل زیر در می‌آید:

۲-۴ چینش دلبخواه باد در ترازهای زیرین و زیرین

به منظور بررسی رخدادهای ناپایداری با توجه به هم‌علامت بودن چینش باد در دو مرز زیرین و زیرین (برآورده کردن شرط چارنی-استرن-پدلاسکی) مسئله ایدی با فرض دلبخواه بودن چینش باد در مرزهای پایین و بالا حل می‌شود.



شکل ۴. قسمت حقیقی (الف) و قسمت موهومی (ب) سرعت فاز. به مقادیر بسیار کوچک از مرتبه 10^{-16} قسمت موهومی توجه شود.

$$\pm \frac{2\sqrt{(\alpha H \cotgh \alpha H - 1)(\cotgh^2 \alpha H - 1)}}{(\alpha H - \cotgh \alpha H)^2}, \quad (30)$$

دو مقدار برای γ به دست آمده است که به ترتیب مشخص کننده مرزهای ناپایداری هستند. با استفاده از روابط (۲۷) و (۲۹) شرط رخداد ناپایداری به صورت زیر به دست می آید:

$$\gamma_1 > \frac{\bar{u}_{zH}}{u_{z0}} > \gamma_2, \quad (31)$$

در شکل ۵ خطوط با ضریب زاویه γ_1 و γ_2 رسم شده و قسمت‌هایی که Δ منفی است به رنگ خاکستری در آمده است. خطوط هم‌مقدار $\Delta < 0$ به صورت هذلولوی‌اند. با استفاده از رابطه (۳۰) معادله خطی که از راس این هذلولوی‌ها عبور می‌کند به صورت زیر است.

$$\bar{u}_{zH} = \frac{\coth^2 \alpha H + \alpha H \cdot \coth \alpha H - 2}{(\alpha H - \coth \alpha H)^2} \cdot \bar{u}_{z0}, \quad (32)$$

به منظور ساده‌سازی تحلیل نتایج، فرض می‌شود که موج‌ها فقط در راستای مداری گسترش داشته باشند ($l=0$). با این فرض مقدار αH به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\alpha H = \frac{kNH}{f_0} = kL_R = \frac{2\pi}{L} L = k^*, \quad (33)$$

در رابطه فوق L_R شعاع دگرشکلی راسی و k^* عدد موج بی‌بعد است که در ادامه به اختصار عدد موج نامیده و با نماد K نشان داده می‌شود.

در مسئله ایدی چینش باد ثابت فرض می‌شود و مقدار تغییرات سرعت باد با ارتفاع در مرز زیرین و زیرین با هم برابر و مقداری ثابت است ($\bar{u}_{zH} = \bar{u}_{z0} = \Lambda$). لذا بررسی ناپایداری حول خط $\bar{u}_{zH} = \bar{u}_{z0}$ منجر به مسئله ایدی می‌شود. براساس رابطه (۲۶) امواج جوی هنگامی رشد می‌کنند که $\Delta < 0$ شود. حل معادله Δ در شکل‌های ۵ و ۶ نشان داده شده است. در شکل ۵-الف $K=1.2$ است و خط γ_1 (حد فوقانی ناحیه ناپایدار) روی خط $\bar{u}_{z0} = 0$ منطبق شده است. با توجه به اینکه ضریب زاویه خط

$$c \frac{d\phi}{dz} + \bar{u}_{z0} \phi = 0, \quad z = 0 \quad (24)$$

$$(\bar{u}_{zH} H - c) \frac{d\phi}{dz} - \bar{u}_{zH} \phi = 0, \quad z = H \quad (25)$$

با قرار دادن جواب (۱۰) در معادله‌های (۲۴) و (۲۵) و برابر صفر قرار دادن دترمینان ضرایب A و B در معادله‌های حاصل، معادله درجه دومی بر حسب سرعت فاز c با جواب زیر به دست می‌آید:

$$c = \frac{\bar{u}_{zH} H}{2} - \frac{(\bar{u}_{zH} - \bar{u}_{z0}) \cotgh \alpha H}{2\alpha} \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2}, \quad (26)$$

$$\Delta = \left[-\alpha H \bar{u}_{zH} + (\bar{u}_{zH} - \bar{u}_{z0}) \cotgh \alpha H \right]^2 - 4\bar{u}_{zH} \bar{u}_{z0} [\alpha H \cotgh \alpha H - 1]$$

جواب‌های رشدیافته به ازای $\Delta < 0$ (بخش مختلط سرعت فاز) به دست می‌آیند. نتایج حل عددی Δ در شکل‌های ۵ و ۶ نشان داده شده است. مطابق شکل‌ها ناحیه رخداد ناپایداری محدود به خطوطی است که از مرکز عبور می‌کنند. معادله دسته خطوط مار بر مرکز

$$\bar{u}_{zH} = \gamma \bar{u}_{z0}, \quad (27)$$

است که با جای‌گزین کردن در رابطه Δ و تعیین پارامتر γ ، می‌توان خطوط معرف مرزهای منطقه ناپایداری به ازای $\Delta = 0$ را به دست آورد:

$$\left[-\alpha H \gamma \bar{u}_{z0} + (\gamma \bar{u}_{z0} - \bar{u}_{z0}) \cotgh \alpha H \right]^2 - 4\gamma (\bar{u}_{z0})^2 [\alpha H \cotgh \alpha H - 1] = 0 \quad (28)$$

با مرتب کردن آن، معادله درجه دوم زیر برای γ به دست می‌آید:

$$\left(\alpha^2 H^2 + \coth^2 \alpha H - 2\alpha H \cotgh \alpha H \right) \gamma^2 + (-2\cotgh^2 \alpha H - 2\alpha H \cotgh \alpha H + 4) \gamma + \cotgh^2 \alpha H = 0 \quad (29)$$

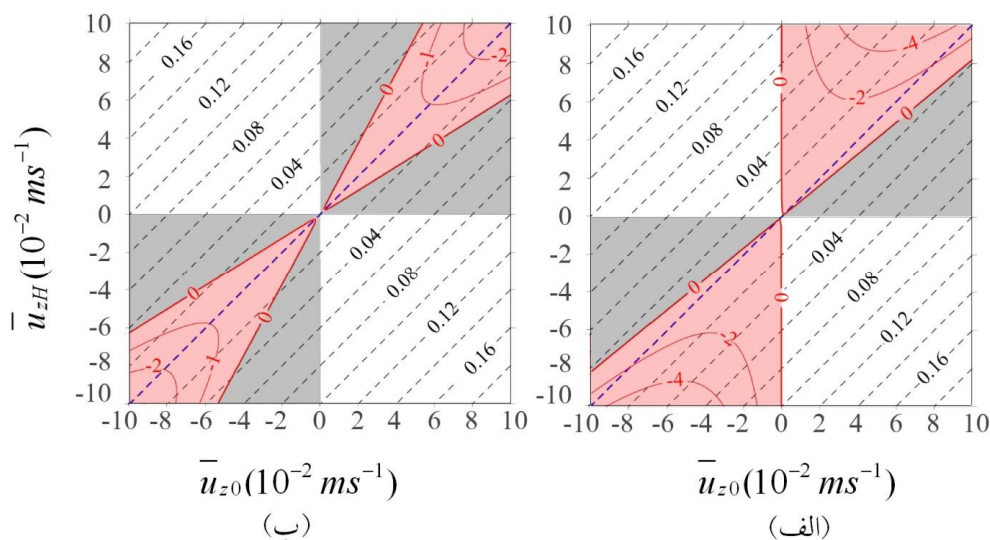
از حل معادله بالا جواب‌های زیر به دست می‌آید:

$$\gamma_{1,2} = \frac{\cotgh^2 \alpha H + \alpha H \cotgh \alpha H - 2}{(\alpha H - \cotgh \alpha H)^2}$$

(شکل ۶-ج). در اینجا دیده می‌شود که به‌ازای مقادیر $K > 2.4$ برخلاف مسئله ایدی، همچنان ناحیه‌ای برای ناپایداری امواج خارج از حول خط $\bar{u}_{zH} = \bar{u}_{z0}$ وجود دارد. در شکل ۶-د عدد موج به ۴ افزایش یافته است و ناحیه ناپایداری امواج بسیار کوچک شده است.

برطبق قضیه چارنی-استرن-پدلاسکی شرط لازم برای ناپایداری با فرض یکنواختی تاوایی پتانسیلی آن است که چیش باد در مرزهای زیرین و زیرین هم‌علامت باشند. در شکل ۶-ب دیده می‌شود در ناحیه هم‌علامت چیش باد در مرزهای زیرین و زیرین ناپایداری اتفاق نیفتاده است (ناحیه با رنگ خاکستری روشن). لذا با توجه به اینکه ناحیه امواج رشدیابنده فقط در جایی وجود دارد که چیش باد در مرزهای زیرین و زیرین هم‌علامت است

$\bar{u}_{z0} = 0$ بی‌نهایت است برای رخداد ناپایداری هیچ محدودیتی در بزرگ‌تر بودن \bar{u}_{zH} از \bar{u}_{z0} وجود ندارد ولی چیش باد در مرز بالایی نمی‌تواند کمتر از 0.81 چیش باد در مرز پایین شود ($\gamma_2 = 0.81$). به‌ازای $K = 2$ منطقه رخداد ناپایداری حول خط $\bar{u}_{zH} = \bar{u}_{z0}$ قرار گرفته است (شکل ۶-ب) در شکل ۶-الف مقدار $K = 2.3$ است و خط $\bar{u}_{zH} = \bar{u}_{z0}$ به خط $\Delta = 0$ نزدیک شده است و به‌ازای $K = 2.4$ که آستانه رخداد ناپایداری در مدل ایدی است خط‌های مزبور روی هم منطبق شده‌اند (شکل ۶-ب). این نتیجه موردانتظار است زیرا در مسئله ایدی به‌ازای عددهای موج بزرگ‌تر از $2/4$ ناپایداری رخ نمی‌دهد و همان‌طور که در اینجا نیز نشان داده شد هنگامی که $K > 2.4$ شود خط $\bar{u}_{zH} = \bar{u}_{z0}$ در ناحیه پایداری قرار دارد. با افزایش مقدار K به $K = 3$ منطقه رخداد ناپایداری از خط $\bar{u}_{zH} = \bar{u}_{z0}$ فاصله می‌گیرد

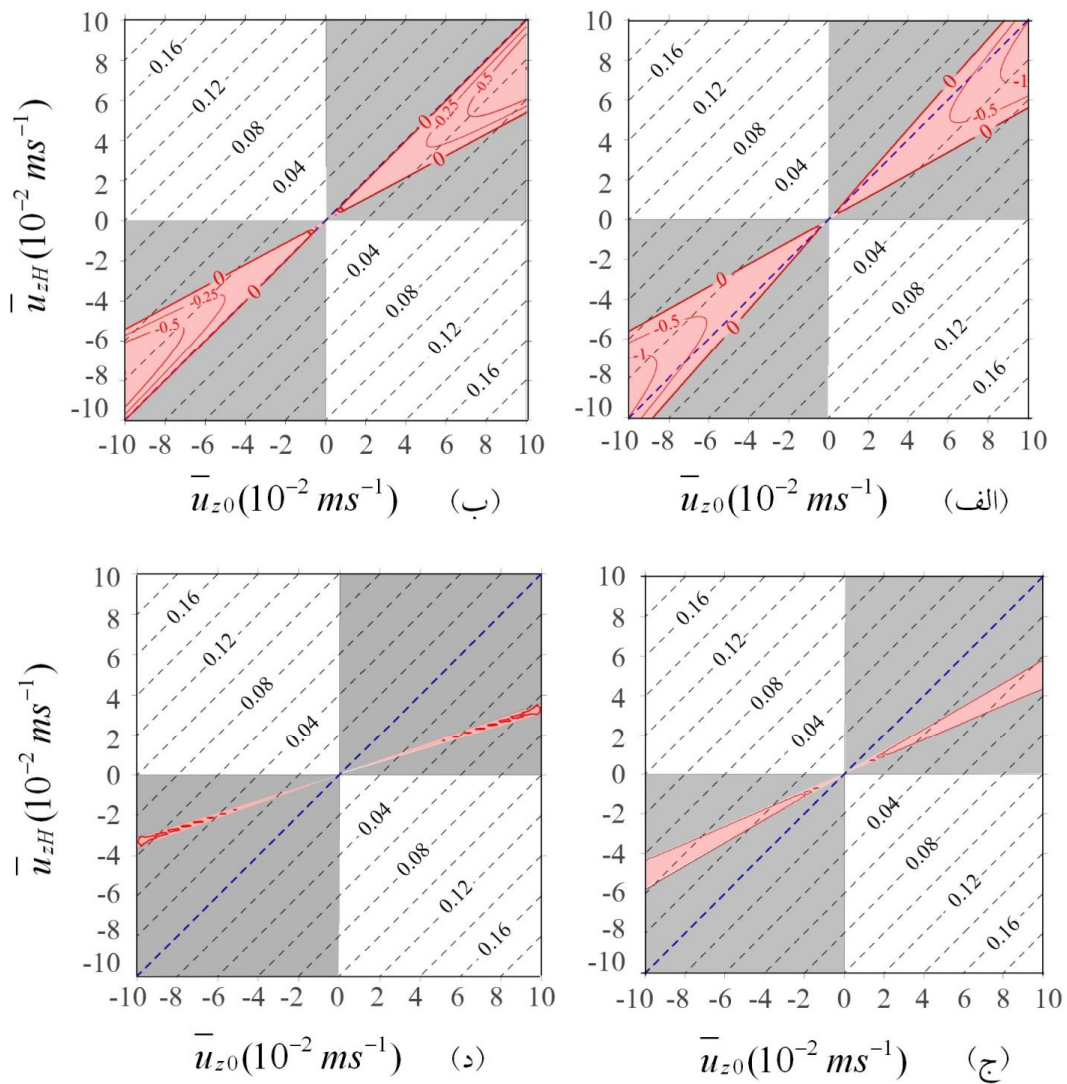


شکل ۵. ناحیه رخداد ناپایداری (سرخ) برحسب چیش در دو مرز زیرین و زیرین برای عدد موج بی‌بُعد (الف) $K = 1.2$ و (ب) $K = 2$. قسمت خاکستری برای متمایز کردن ناحیه‌ای پایدار است که شرط لازم برای ناپایداری طبق قضیه چارنی-استرن-پدلاسکی را برآورده می‌کند. خطوط هم‌مقدار تفاضل چیش باد در مرزهای زیرین و زیرین با خط چین نمایش داده شده است. خط چین آبی، خط هم‌اختلاف صفر باد روی مرزهای زیرین و زیرین (مدل ایدی) است.

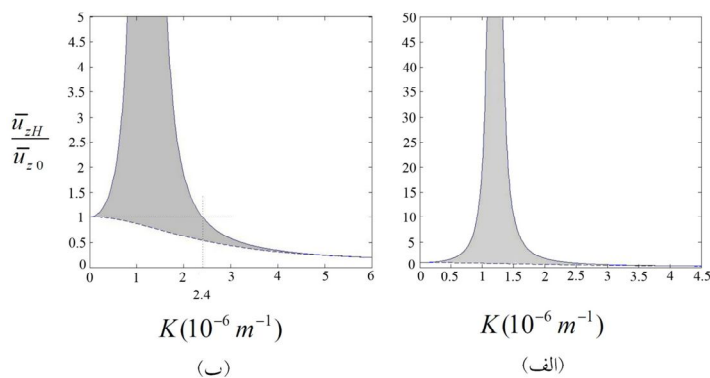
باید مثبت باشد و هیچ‌گاه کمتر از $0/3$ نشود. به‌علاوه هرگاه عدد موج بزرگ‌تر از $2/4$ شود، ناپایداری هنگامی رخ می‌دهد که مقدار چینش باد در مرز بالا کمتر از مرز پایینی شود، در صورتی که برابر نظریه

می‌توان نتیجه گرفت که علاوه بر شرط هم‌علامت بودن چینش‌ها، برای رشد موج‌های جوئی لازم است رابطه (۳۱) نیز برقرار باشد.

نتیجه حل رابطه (۳۱) در شکل ۷ نشان داده شده است و مشاهده می‌شود برای رخداد ناپایداری نسبت $\bar{u}_{zH}/\bar{u}_{z0}$



شکل ۶. مانند شکل ۵ ولی برای (الف) $K = 2.3$ ، (ب) $K = 2.4$ ، (ج) $K = 3$ و (د) $K = 4$.



شکل ۷. (الف) رنگ خاکستری نشانگر ناحیه رخداد ناپایداری در صفحه عدد موج-نسبت چینش و (ب) بزرگ شده بخش پایینی شکل (الف) است.

نسبت چینش باد در وردایست به چینش باد در سطح زمین باید بین γ_1 و γ_2 باشد. با در نظر گرفتن همه طول موج‌ها، پایین‌ترین مقدار γ_2 برابر با 0.3 به دست آمد. برای عدد موج بدون بُعد $k^* = 2\pi L/L_R$ ، وقتی $k^* > 2.4$ است، برای رخداد ناپایداری لازم است که چینش در مرز زیرین بزرگ‌تر از چینش در مرز زیرین باشد. سرانجام نشان داده شد که برای k^* بین 1.0 و 1.4، برای رخداد ناپایداری، محدودیتی روی بزرگی چینش باد در مرز زیرین وجود ندارد.

منابع

- Charney, J. G., 1947, The dynamics of long waves in a baroclinic westerly current: *J. Meteor.*, **4**, 135–163.
- Charney, J. G., and Stern, M. E., 1962, On the instability of internal baroclinic jets in a rotating atmosphere: *J. Atmos. Sci.*, **19**, 159–172.
- Eady, E. T., 1949, Long waves and cyclone waves: *Tellus*, **1**, 33–52.
- Egger, J., 2009, Baroclinic instability in the Eady model: Interpretations: *J. Atmos. Sci.*, **66**, 1856–1859.
- Green, J. S. A., 1960, A problem in baroclinic stability: *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **86**, 237–251.

ایدی به‌ازای عددهای موج بزرگ‌تر از $2/4$ امواج پایدارند. مطابق شکل ۷، هرگاه $1.4 > K > 1$ باشد محدودیتی در بزرگی نسبت چینش باد در مرز زیرین به چینش باد در مرز زیرین وجود ندارد. ولی برای رخداد ناپایداری چینش باد در مرز زیرین نباید از $0.76\bar{u}_{z=0}$ کمتر شود.

۳ نتیجه‌گیری

در این مقاله اثر چینش باد با فرض یکنواختی تاوایی پتانسیلی در ناپایداری کزفشار مورد بررسی قرار گرفت. روشن شد که شرط هم‌علامت بودن چینش باد در مرزهای زیرین و زیرین در رخداد ناپایداری با فرض تاوایی پتانسیلی یکنواخت لازم ولی ناکافی است.

پس از بررسی نمایه قائم مربعی برای باد زناری، وردش دلبخواه چینش باد در دو مرز زیرین (سطح زمین) و زیرین (وردایست) در مدلی از نوع ایدی بررسی شد. نشان داده شد که برای هر عدد موج، کران‌های بالا γ_1 و پایین γ_2 برای نسبت چینش باد در وردایست به چینش باد در سطح زمین وجود دارد که خارج از آنها ناپایداری نمی‌تواند رخ دهد. به عبارت دیگر، برای رخداد ناپایداری،

رابطه‌های زیر به دست می‌آید:

$$(A_{j+1} + A_j)\psi_{j+1} + (2\Delta^2 B_j - (A_{j+1} + 2A_j + A_{j-1}))\psi_j + (A_j + A_{j-1})\psi_{j-1} = 0 \quad (پ-۵)$$

$$\psi_2 + 2\Delta b\psi_1 - \psi_0 = 0 \quad (پ-۶)$$

$$\psi_{N+1} + 2\Delta a\psi_N - \psi_{N-1} = 0 \quad (پ-۷)$$

در اینجا Δ فاصله بین نقاط شبکه‌ای و $N+1$ تعداد ترازها از سطح زمین تا وردایست، $h = H/N$ است و ترازهای $j = N+1$ و $j = 0$ سطوح فرضی خارج از حوزه مورد بررسی‌اند. در کار فعلی ۱۰۰ تراز در نظر گرفته شده است. با در نظر گرفتن رابطه زیر

$$\psi_{j+1} = \alpha_j \psi_j, \quad (پ-۸)$$

و استفاده از معادله (پ-۸)، ψ_{j+1} از (پ-۵) حذف می‌شود و معادله بازگشتی زیر به دست می‌آید

$$\alpha_{j-1} = \frac{(A_j + A_{j-1})}{A_{j+1} + 2A_j + A_{j-1} - 2\Delta^2 B_j - (A_{j+1} + A_j)\alpha_j}, \quad (پ-۹)$$

سپس با استفاده از معادله (پ-۷) و حذف ψ_{N+1} از (پ-۵) مقدار α_{N-1} به صورت زیر درمی‌آید:

$$\alpha_{N-1} = \frac{(A_{N+1} + 2A_N + A_{N-1})}{2\Delta^2 B_N - (A_{N+1} + 2A_N + A_{N-1}) - 2\Delta a(A_{N+1} + A_N)}, \quad (پ-۱۰)$$

لذا برای هر c دلخواه با استفاده از (پ-۸) و (پ-۹) می‌توان همه ضرایب α_j را محاسبه کرد. با حذف ψ_0 از رابطه‌های (پ-۵) و (پ-۶) رابطه زیر به دست می‌آید.

$$\psi_2 = \frac{(A_2 + 2A_1 + A_0) - 2\Delta^2 B_1 - 2b\Delta(A_2 + A_1)}{(A_2 + 2A_1 + A_0)} \psi_1 \quad (پ-۱۱)$$

برای مقادیر A_0 و A_{N+1} از برون‌یابی $A_0 = 2A_1 - A_2$ و $A_{N+1} = 2A_N - A_{N-1}$ استفاده می‌شود. با توجه به رابطه (پ-۹) داریم:

- Harnik, N., and Lindzen, R. S., 1998, The effect of basic-state potential vorticity gradients on the growth of baroclinic waves and the height of the tropopause: *J. Atmos. Sci.*, **55**, 344–360.
- Holton, J. R. 2004, *An Introduction to Dynamic Meteorology*. 4th ed., New York, Academic Press.
- Lindzen, R. S., 1993, Baroclinic neutrality and the tropopause: *J. Atmos. Sci.*, **50**, 1148–1151.
- Lindzen, R. S., 1994, The Eady problem for a basic state with zero PV gradient but $\beta \neq 0$: *J. Atmos. Sci.*, **51**, 3221–3226.
- Pedlosky, J., 1964, The stability of currents in the atmosphere and the oceans. Part I: *J. Atmos. Sci.*, **27**, 201–219.
- Pedlosky, J., 1987, *Geophysical Fluid Dynamics*: Springer-Verlag, 710pp.
- Vallis G. K., 2006, *Atmospheric and Oceanic Fluid Dynamics*: Cambridge University Press, 770 pp.

پیوست پ

روش عددی

در این پیوست روش حل معادله (۲۱) برای یافتن مقادیر c براساس کار هارنیک و لیندزن (۱۹۹۸) عرضه می‌شود. از آنجاکه این روش عددی مطابق با فرضیه‌های منطبق بر بخش ۲–۳ تغییر یافته است، شرح کامل آن در این پیوست آورده می‌شود. معادله (۲۱) و شرایط مرزی آن را در سطح زمین و تراز وردایست می‌توان به صورت کلی زیر نوشت:

$$\frac{\partial(A(z)\psi_z)}{\partial z} + B(z, c)\psi = 0, \quad (پ-۱)$$

$$\psi_z + a(c)\psi = 0 \quad z = H \quad (پ-۲)$$

$$\psi_z + b(c)\psi = 0 \quad z = 0 \quad (پ-۳)$$

با گسسته‌سازی روابط (پ-۱) تا (پ-۳) به روش تفاضل منتهای مرکزی و استفاده از نیم‌ترازها به شکل

$$(A\psi_z)_{zj} = \frac{(A\psi_z)_{j+1/2} - (A\psi_z)_{j-1/2}}{\Delta} \quad (پ-۴)$$

$$A_{j+1/2} = \frac{A_{j+1} + A_j}{2}$$

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)_{j+1/2} = \frac{\psi_{j+1} - \psi_j}{\Delta},$$

$$\psi_2 = \alpha_1 \psi_1, \quad (\text{پ-۱۲})$$

که ضریب α_0 با استفاده از رابطه بازگشتی (پ-۸) محاسبه می‌شود. سرانجام با استفاده از رابطه‌های (پ-۱۱) و (پ-۱۲)، مقدار بحرانی c برای رخداد ناپایداری با حل معادله زیر تعیین می‌شود:

$$\alpha_1 - \frac{(A_2 + 2A_1 + A_0) - 2\Delta^2 B_1 - 2a\Delta(A_2 + A_1)}{(A_2 + 2A_1 + A_0)} = 0 \quad (\text{پ-۱۳})$$