

## بازسازی داده‌های لرزه‌ای با استفاده از یک مدل خودبازگشتی چندمرحله‌ای

یحیی مرادی چالشتری<sup>۱</sup> و حمیدرضا سیاه‌کوهی<sup>۲\*</sup>

<sup>۱</sup>شرکت دانا انرژی کیش، تهران، ایران  
<sup>۲</sup>موسسه ژئوفیزیک، دانشگاه تهران، ایران

(تاریخ دریافت: ۱۳۸۹/۶/۲۸، تاریخ پذیرش: ۱۳۹۱/۹/۲۸)

### چکیده

هدف از لرزه‌نگاری در واقع برداشت داده، پردازش آنها و درنهایت به‌دست آوردن یک تصویر قابل تفسیر از لایه‌های زیر سطح زمین است. در مرحله نمونه‌برداری گاهی به‌علت بعضی مشکلات از جمله نقص در عملکرد دستگاه‌های نمونه‌برداری، توپوگرافی نامناسب منطقه و محدودیت‌های محیطی نظیر ارتعاش کابل‌ها ممکن است بعضی از اطلاعات ثبت نشود (به‌بیان‌دیگر، نمونه‌برداری مکانی یکنواخت صورت نگیرد). یکنواخت ساختن نمونه‌برداری مکانی یا بازگرداندن و بازسازی اطلاعات از دست رفته می‌تواند با استفاده از روش‌های درون‌یابی و بازسازی داده‌ها صورت پذیرد. در این مقاله روشی برای بازسازی درلرزه‌های از دست رفته در ثبت‌های لرزه‌ای معرفی شده است. این روش دارای الگوریتمی دومرحله‌ای است. ابتدا قسمت بسامد کم و الیاس نشده داده‌ها به‌روش نرم وزن‌دار کمینه بازسازی می‌شود و سپس با استفاده از مدل خودبازگشتی، ضرایب فیلترهای پیشگویی برای همهٔ بسامدها از قسمت بسامد کم داده‌ها محاسبه می‌شود. درنهایت از این ضرایب فیلترهای پیشگویی برای بازسازی داده‌های از دست رفته بهره گرفته می‌شود. نتایج اعمال الگوریتم روی داده‌های لرزه‌ای مصنوعی و واقعی کارایی این روش را تأیید می‌کند.

واژه‌های کلیدی: بازسازی داده، درون‌یابی، نرم وزن‌دار کمینه، مدل خودبازگشتی، فیلترهای پیشگویی

## Seismic data reconstruction using a multi-step auto-regressive method

Yahya Moradi Chaleshtori<sup>1</sup> and Hamid Reza Siahkoobi<sup>2\*</sup>

<sup>1</sup>DANA Energy Kish Company, Tehran, Iran  
<sup>2</sup>Institute of Geophysics, University of Tehran, Iran

(Received: 19 September 2010, accepted: 18 December 2012)

### Summary

The main purpose of exploration seismology is data gathering, data processing, and finally obtaining an interpretable image of subsurface layers. Sometimes, because of problems such as undesirable area topography, instrument defects, and environmental constraints, we have data with missing spatial samples. Reconstruction and recovery of the missing data can be carried out using interpolation and reconstruction methods. There are many reconstruction and interpolation methods. One of the most useful methods to reconstruct missing data is the auto-regressive model. This method refers to the techniques that model the evolution of a signal as a function of its past/future samples

\*Corresponding author:

hamid@ut.ac.ir

\*نگارنده رابط:

(Lau et al., 2002; Takalo et al., 2005). Also, it has a wide range of applications in signal processing including noise suppression (Canales, 1984), parametric spectral analysis (Marple, 1987), and signal interpolation and reconstruction (Sacchi and Ulrych, 1996; Porssani, 1999; Spits, 1991; Naghizade and Sacchi, 2007). The autoregressive reconstruction methods were introduced by Spitz (1991). Spitz (1991) proposed computing prediction filters (autoregressive operators) from low frequencies to predict interpolated traces at high frequencies. This methodology is applicable only if the original seismic section is regularly sampled in space. Conversely, irregularly sampled data can be reconstructed using Fourier methods. In this case, the Fourier coefficients of the irregularly sampled data are retrieved by inverting the inverse Fourier operator with a band limiting and/or a sparsity constraint (Sacchi et al., 1998; Zwartjes and Gisolf, 2006). In this paper, a reconstruction method has been introduced that combines a Fourier-based method and an auto-regressive model to reconstruct the missing data. The method includes a two-stage algorithm. The first step of the proposed algorithm involves the reconstruction of the irregularly missing spatial data on a regular grid at low frequencies using a Fourier-based algorithm called the minimum-weighted norm (Liu and Sacchi, 2004) method. Fourier reconstruction methods are well suited to reconstruct seismic data in the low-frequency (non-aliased) portion of the Fourier spectrum. The reconstruction problem is well-conditioned at low frequencies where only a few wavenumbers are required to honor the data. This makes the problem well-posed; therefore, it is quite easy to obtain a low frequency spatial reconstruction of the data. Seismic data at low frequencies are band-limited in the wavenumber domain. Due to the band-limited nature of the wavenumber spectra at low frequencies, this portion of the data can be reconstructed with high accuracy (Duijndam et al., 1999). Then, prediction filter components are computed for all frequency bands from the low-frequency portion of the reconstructed data using the auto-regressive method. Finally, these prediction filters are used to reconstruct the missing data. The basic equations for computing the prediction filter components (auto-regressive operators) and reconstructing the missing data are as follows:

$$x_n(f) = \sum_{j=1}^L P_j(\alpha f) x_{n-\alpha j}(f), \leftarrow \text{forward} \quad \& \quad x_n^*(f) = \sum_{j=1}^L P_j(\alpha f) x_{n+\alpha j}^*(f), \leftarrow \text{backward}$$

$$n = \alpha L + 1, \dots, N, \quad n = 1, \dots, N - \alpha L,$$

The aforementioned equations show that one can predict the data samples using past/future samples (forward/backward equations). It is important to stress that the technique presented in this paper can only be used to reconstruct data that live on a regular grid with missing observations. The results of the application of the algorithm on both synthetic and real seismic data showed and confirmed the performance of the method.

**Key words:** Data reconstruction, interpolation, minimum weighted norm, auto-regressive model, prediction filters

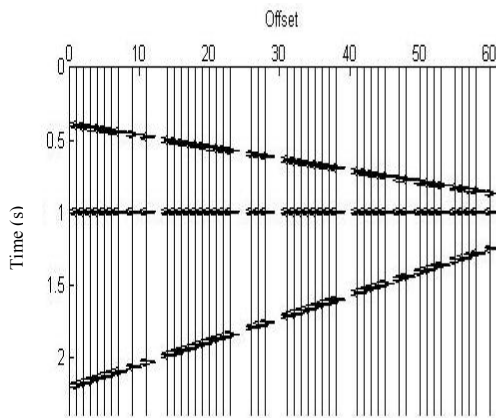
عوامل گوناگون، بعضی داده‌های لرزه‌ای ثبت نشوند و لذا دارای ناپیوستگی‌هایی در داده‌های لرزه‌ای باشیم. از طرفی محدودیت‌های اقتصادی و پرهزینه بودن عملیات داده‌برداری ایجاب می‌کند که برای بازگرداندن اطلاعات از دست رفته، از روش‌های درون‌یابی و بازسازی داده‌ها

#### ۱ مقدمه

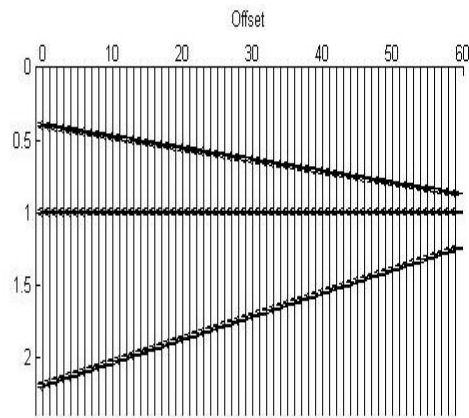
یکی از موانع اصلی در پردازش داده‌های لرزه‌ای، وجود نقص و کم‌وکاستی در داده‌های لرزه‌ای است که مراحل پردازش داده‌ها را با مشکل مواجه می‌کند. این بدان معنی است که در عملیات داده‌برداری ممکن است به‌خاطر

استفاده قرار داد. روش‌های بازسازی خودبازگشتی پیشنهاد شده از سوی اسپیتز (۱۹۹۱) و پورسانی (۱۹۹۹) درونیابی مکانی داده‌های منظم نمونه‌برداری شده و الیاس شده را به خوبی نشان می‌دهد. این روش‌ها اطلاعات بسامد کم را برای بازسازی مولفه‌های بسامد زیاد به کار می‌گیرند. در این مقاله روشی برای بازسازی ردلرزه معرفی می‌شود که ترکیبی از روش بازسازی در حوزه فوریه و مدل خودبازگشتی است. در اینجا راهکاری عرضه می‌شود که از ترکیب روش‌های خطای پیشگویی و روش‌های مبتنی بر حوزه فوریه برای حل مسئله بازسازی داده‌های نامنظم

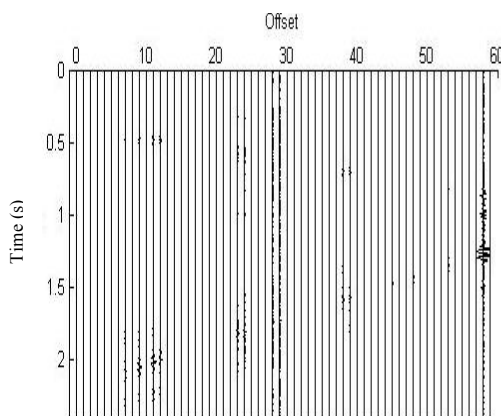
استفاده کنیم. در واقع هدف اصلی بازسازی داده‌های لرزه‌ای، کاهش هزینه‌های عملیات داده‌برداری است. یکی از مفیدترین و کارآمدترین ابزارها، مدل خودبازگشتی است که گستره وسیعی از کاربردها در پردازش سیگنال دارد. این مدل به شیوه‌هایی اشاره دارد که پیش‌بینی سیگنال را به منزله تابعی از نمونه‌های قبل و بعد آن بیان می‌کند. مدل خودبازگشتی را می‌توان در پیشگویی سیگنال، حذف نوفه (کانالس، ۱۹۸۴)، درونیابی (ساشی و اولریچ، ۱۹۹۶؛ دویجن دام، اسکان ویل و هندریک، ۱۹۹۹) و تحلیل طیفی پارامتری (مارپل، ۱۹۸۷) مورد



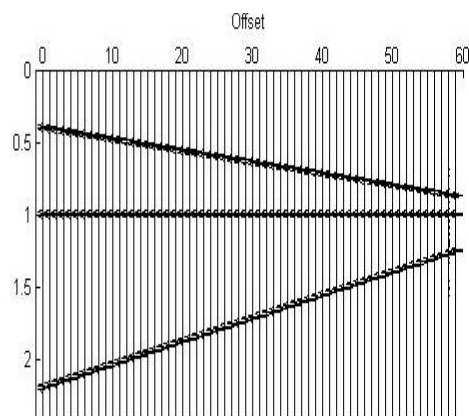
(ب)



(الف)

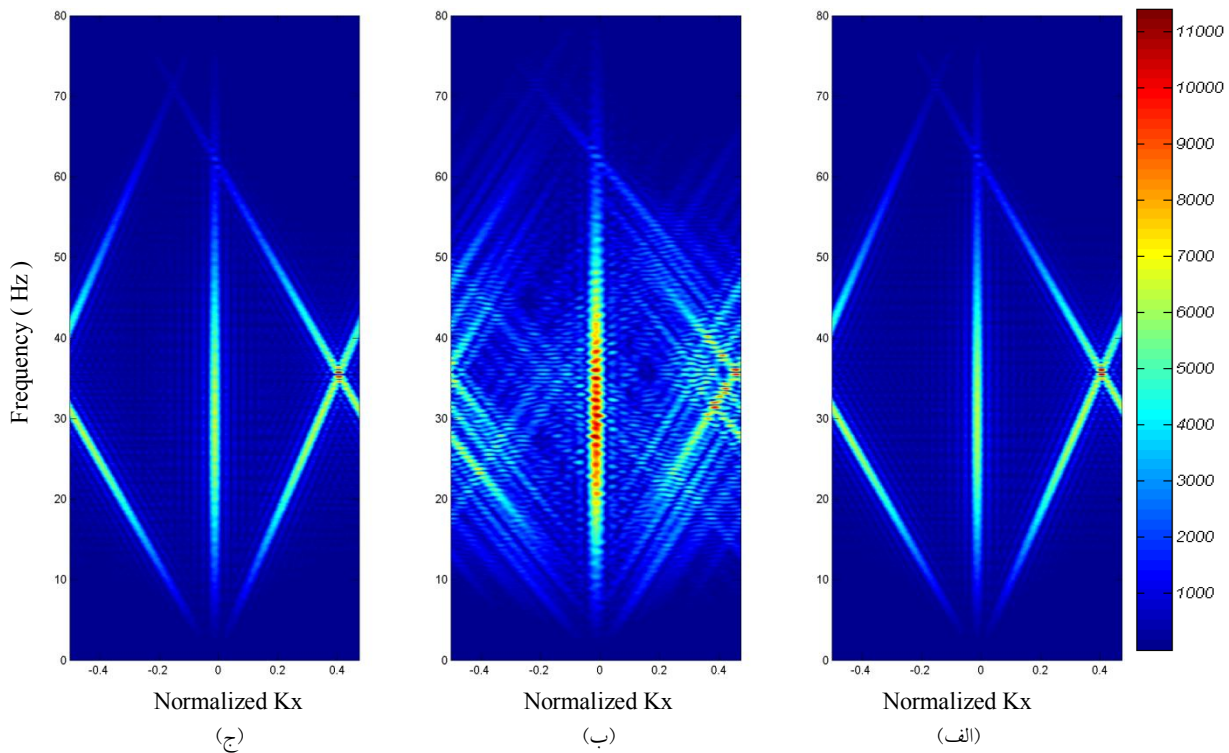


(د)



(ج)

شکل ۱. بازسازی با استفاده از روش MSAR. (الف) داده اصلی، (ب) داده ناقص با حذف ۱۵ ردلرزه از داده اصلی، (ج) داده بازسازی شده و (د) اختلاف بین داده‌های اصلی و داده بازسازی شده.



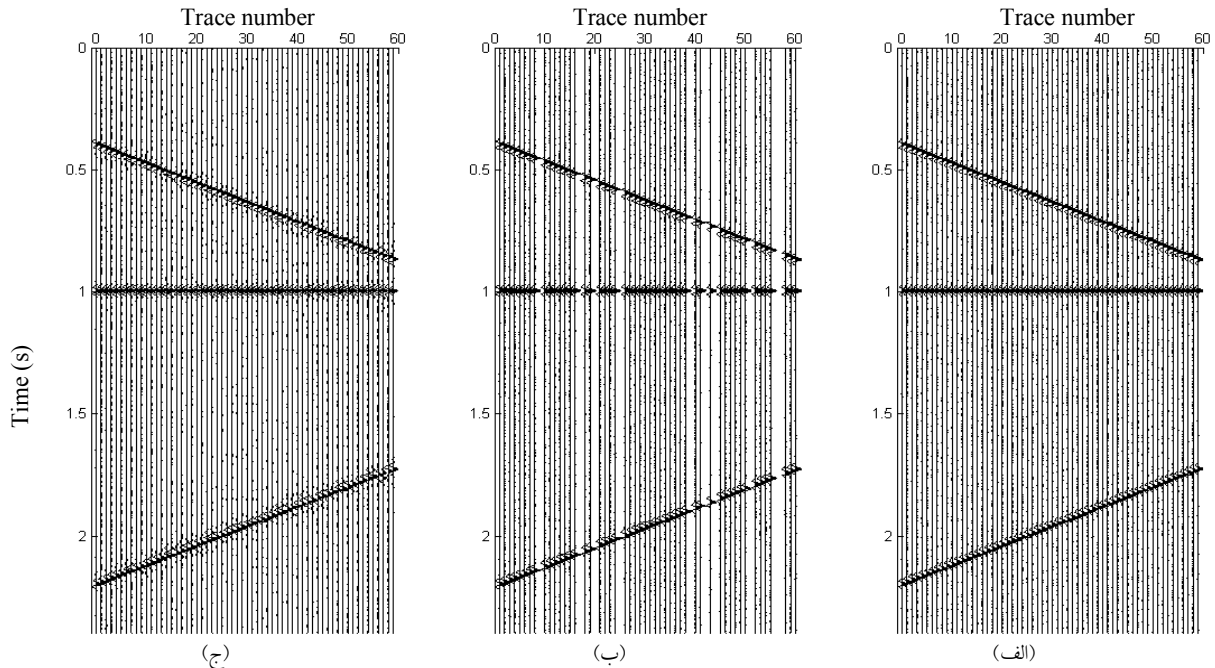
شکل ۲. نمایش حوزه  $f-k$  (الف) داده اصلی، (ب) داده ناقص و (ج) داده بازسازی شده به ترتیب مربوط به شکل ۱-الف، ۱-ب و ۱-ج.

ترکیب‌های متفاوت از گام و بسامد کم، بسامد زیاد مشابهی به دست آید. در این صورت، فیلتر مورد نظر در این بسامد از میانگین‌گیری فیلترهای به دست آمده از ترکیب‌های مشابه به دست می‌آید. در نهایت این فیلترهای پیشگویی محاسبه شده برای بازسازی نمونه‌های مکانی ناپدید شده برای هر بسامد به کار گرفته می‌شوند. این مرحله از کار نیز در حوزه  $f-x$  صورت می‌پذیرد. در حوزه  $f-x$  پدیده‌های خطی در حوزه  $t-x$  به صورت سینوس‌های متناوب شکل می‌گیرند و همین ویژگی باعث می‌شود که بتوان داده‌ها را در این حوزه پیشگویی کرد.

## ۲ بازسازی قسمت الیاس نشده داده‌ها با استفاده از نرم وزن‌دار کمینه

داده‌های لرزه‌ای در بسامد کم در حوزه عدد موج نوار محدود هستند و این کمک خواهد کرد تا مولفه‌های

نمونه‌برداری شده بهره می‌گیرد. مرحله اول این الگوریتم شامل بازسازی داده‌های نامنظم ناپدید شده مکانی بسامد کم با استفاده از یک روش بر پایه فوریه است. روش‌های فوریه برای بازسازی داده بسامد کم طیف فوریه بسیار مناسب هستند. مسئله بازسازی در بسامدهای کم در جایی که برای بازسازی فقط به یک نوار محدود از عدد موج نیاز است، خوش رفتار هستند. بعد از بازسازی داده‌های بسامد کم، با استفاده از یک الگوریتم خودبازگشتی چندمرحله‌ای فیلترهای پیشگویی برای همه بسامدها از قسمت بسامدهای کم بازسازی شده استخراج می‌شوند. این بدان معنی است که با در دست داشتن یک نوار محدود بسامدی می‌توان با استفاده از گام‌های پیش‌رونده به نوارهای بسامدی بزرگ‌تر دست یافت. این راهکار کمک می‌کند تا فیلترهای پیشگویی به‌ازای بسامدهای زیادتر محاسبه شوند. در این حالت ممکن است به‌ازای



شکل ۳. بازسازی با استفاده از روش MSAR در حضور نوفه. (الف) داده اصلی، (ب) داده ناقص با حذف ۱۰ ردلرزه از داده اصلی، (ج) داده بازسازی شده.

که  $p_k^2$  بیانگر وزن‌های طیفی‌اند که دارای محدوده و شکل مشابه با سیگنال هستند. مجموعه اندیس‌های  $\kappa$  محدوده طیفی سیگنال را نشان می‌دهند. ضرایب  $p_k$  برای  $k \in \kappa$  مخالف صفرند. همچنین این ضرایب توان طیفی در اندیس عدد موج  $k$  را به دست می‌دهند. راه حل تابع کمینه با کمینه کردن تابع هزینه یافت می‌شود و تابع هزینه را در حضور نوفه می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$J = \|Tx - y\|^2 + \rho^2 \|x\|_w^2, \quad (2)$$

که  $\rho^2$  یک پارامتر توازنی است. باید توجه داشت که کمینه کردن  $J$  معادل یافتن حل کمترین مربعات یک دستگاه فرامعین از معادلات - است. کمینه کردن رابطه بالا می‌تواند به صورت موثری با استفاده از روش گرادیان مزدوج صورت پذیرد. الگوریتم زمانی که بیشترین تکرار صورت گیرد پایان می‌یابد.

$\|Tx - y\| < tolerance$  &  $tolerance = 10^{-3} - 10^{-5}$   
معمولاً روش گرادیان مزدوج در کمتر از ۱۵ تکرار، همگرا می‌شود.

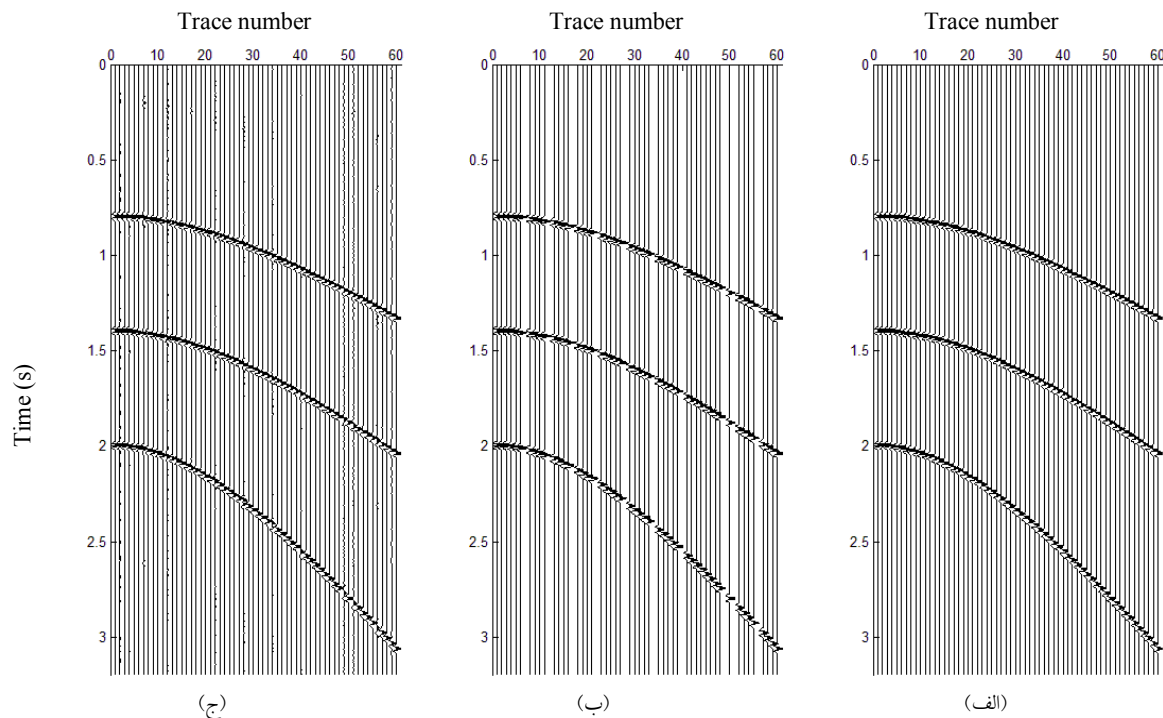
بسامد کم با دقت زیادی با استفاده از روش‌های وارون‌سازی فوریه بازسازی شوند. در ابتدا قسمت بسامد کم داده‌ها با استفاده از یک روش بر پایه فوریه بازسازی می‌شود. این روش با بیان یک مسئله وارون‌سازی به منظور دستیابی به راه حل بهینه مطرح می‌شود. در ابتدا بخشی از داده حاوی بسامد کم ( $f \in [f_{min}, f_{max}]$ ) با استفاده از یک روش بر پایه فوریه بازسازی می‌شود. مسئله بازسازی سیگنال در این حالت با وارون‌سازی، متضمن حل یک دستگاه فرامعین از معادلات است. بنابراین از میان همه راه‌حل‌های ممکن راه‌حلی که تابع مدل را کمینه می‌کند باید انتخاب شود. وارون‌سازی ممکن است به حل مسئله کمینه‌سازی مشروط زیر تحویل یابد:

$$\text{Minimize } \|x\|_w^2 \quad \text{subject to } Tx = y$$

که  $\|x\|_w$  یک معیار وزنی را نشان می‌دهد. معیار حوزه

عدد موج به صورت زیر انتخاب می‌شود:

$$\|x\|_w^2 = \sum_{k \in \kappa} (X_k^* X_k) / p_k^2, \quad (1)$$



شکل ۴. بازسازی پدیده‌های منحنی با استفاده از روش MSAR. (الف) داده اصلی، (ب) داده ناقص شده با حذف ۱۰ ردلرزه از داده اصلی و (ج) داده بازسازی شده.

پیشگویی است. پارامتر  $\alpha = 1, 2, \dots, \alpha_{max}$  فاکتور گام استفاده شده به منظور استخراج فیلتر پیشگویی برای بسامد  $\alpha f$  از بسامد  $f$  است.

پارامتر  $\alpha_{max}$  حد بالای فاکتور گام در روابط (۳) و (۴) است. این پارامتر وابسته به تعداد ردلرزه‌ها  $N$ ، و طول فیلتر پیشگویی  $L$  است. طبق رابطه (۴) پیدا است که حاصل ضرب گام در طول فیلتر ( $\alpha L$ ) نباید از تعداد ردلرزه‌ها بیشتر باشد، یعنی بیشترین مقدار  $\alpha$  باید  $N/L$  باشد. اما این فقط برای تعداد مشخصی از ردلرزه‌ها مقدار درستی برای  $\alpha$  به دست می‌دهد. بنابراین برای به دست آوردن مقدار درست  $\alpha$  باید عبارت  $(L+1)/2$  را از تعداد ردلرزه‌ها کم کرد و برای اینکه مقدار صحیحی از  $\alpha$  به دست آید باید جزء صحیح حاصل شده را محاسبه کرد. بنابراین، این پارامتر به صورت زیر حاصل می‌شود:

### ۳ برآورد فیلترهای پیشگویی با استفاده از MSAR

داده‌های بازسازی شده در نوار بسامدی  $f \in [f_{min}, f_{max}]$  در نظر گرفته می‌شوند. می‌توان نشان داد که پدیده‌های خطی در حوزه  $f-x$  می‌توانند با استفاده از عملگرهای خودبازگشتی چندمرحله‌ای پیشگویی شوند. شکل این عملگرها به صورت زیر است (کانالس، ۱۹۸۴):

$$x_n(f) = \sum_{j=1}^L P_j(\alpha f) x_{n-\alpha j}(f), \quad n = \alpha L + 1, \dots, N, \quad (3)$$

$$x_n^*(f) = \sum_{j=1}^L P_j(\alpha f) x_{n+\alpha j}^*(f), \quad n = 1, \dots, N - \alpha L, \quad (4)$$

که \* بیانگر مزدوج مختلط است. این روابط مربوط به یک نوع خاص از مدل خودبازگشتی هستند که در آن روابط پیش‌رونده (رابطه ۳) و پس‌رونده (رابطه ۴) با گام‌های  $\alpha$  در زمان محاسبه می‌شوند. طول عملگر خودبازگشتی برابر  $L$  است و  $P_j(f)$  معرف فیلتر

است. همچنین اندیس‌های  $u$ ،  $k$  و  $M$  به ترتیب بیانگر داده‌های نامعلوم، داده‌های معلوم و تعداد داده‌های معلوم هستند. ماتریس‌های  $\tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{P}(f'))$  و  $\tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{P}(f'))$  ماتریس‌هایی فقط وابسته بر فیلترهای پیشگویی هستند و سطرهای آنها شامل مولفه‌هایی از فیلترند که به ترتیب در داده‌های نامعلوم و معلوم ضرب می‌شوند و مولفه‌های فیلتر به صورت پیش‌رونده روی سطرها حرکت می‌کنند. میانگین‌گیری از فیلترهای پیشگویی نه تنها مقدار بهینه از فیلتر پیشگویی در آن بسامد است، بلکه به تضعیف نوفه نیز کمک می‌کند. بنابراین، نمونه‌های از دست رفته با استفاده از رابطه زیر حاصل می‌شوند:

$$\mathbf{x}_u(f') = [\tilde{\mathbf{A}}^*(\mathbf{P}(f'))\tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{P}(f')) + \mu\mathbf{I}]^{-1} \times \tilde{\mathbf{A}}^*(\mathbf{P}(f'))\tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{P}(f'))\mathbf{x}_k(f'), \quad (9)$$

که  $\mathbf{x}_k(f')$  و  $\mathbf{x}_u(f')$  به ترتیب بردار داده‌های نامعلوم و معلوم را نشان می‌دهند.  $\mathbf{I}$  ماتریس یکانی و  $\mu$  یک پارامتر منظم‌سازی است که برای پایدار کردن وارون‌سازی در حضور نوفه موردنیاز است.

#### ۵ بازسازی داده‌های مصنوعی و واقعی

در اینجا یک مجموعه داده شامل سه رویداد خطی در نظر گرفته می‌شود. سپس بعضی از ردلرزه‌ها به صورت اتفاقی حذف و در نهایت الگوریتم روی داده‌ها اعمال می‌شود. شکل ۱. الف، ب و ج. ۱. ج به ترتیب داده‌های اصلی، داده‌های ناکامل و داده‌های بازسازی شده را نشان می‌دهند. شکل ۲ حوزه  $f$ - $k$  داده‌های اصلی، ناقص و بازسازی شده را به ترتیب از راست به چپ نشان می‌دهد. شکل ۳ بازسازی در حضور نوفه و شکل‌های ۴. الف و ب، ۵. الف و ب و ۶ به ترتیب داده واقعی اصلی و ناقص، داده بازسازی شده و اختلاف بازسازی و نمایش حوزه  $f$ - $k$  داده واقعی است.

$$\alpha_{max} = \left\lfloor \frac{N - \frac{L+1}{2}}{L} \right\rfloor, \quad (5)$$

که  $\lfloor \cdot \rfloor$  بیانگر جزء صحیح پارامتر است.

در اینجا فیلترهای پیشگویی چندگانه برای هر بسامد زیاد  $f' = \alpha f$  استخراج می‌شوند. به عبارت دیگر، همه ترکیب‌های ممکن از  $\alpha$  و  $f$  که منجر به  $f' = \alpha f$  یک فیلتر پیشگویی را نتیجه خواهد داد که می‌تواند برای بازسازی داده‌ها در بسامد  $f'$  مورد استفاده قرار گیرد. از آن‌جا که بیش از یک فیلتر پیشگویی می‌توان برای بازسازی  $\mathbf{x}(f')$  یافت، بنابراین از میانگین این فیلترهای پیشگویی استفاده خواهد شد (پیوست).

#### ۴ بازسازی در حوزه $f$ - $x$

بعد از محاسبه فیلترهای پیشگویی برای همه بسامدها می‌توان داده‌های بسامد زیاد را با استفاده از روابط پیش‌رونده و پس‌رونده بازسازی کرد. روابط پیش‌رونده و پس‌رونده در حالت خاص به ازای  $\alpha = 1$  به صورت زیر در خواهند آمد:

$$x_n(f') = \sum_{j=1}^L P_j(f')x_{n-j}(f'), \quad n = L+1, \dots, N \quad (6)$$

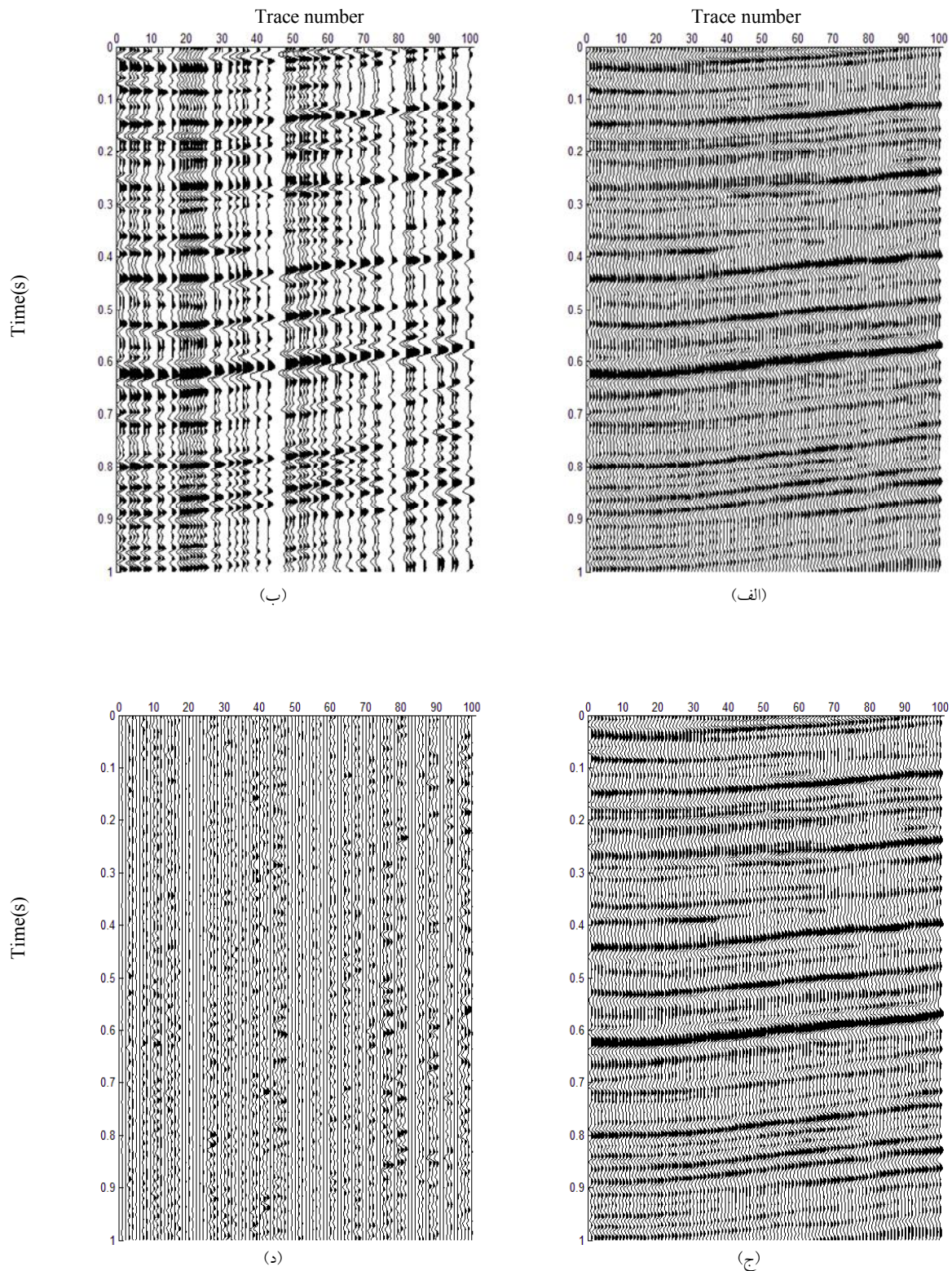
$$x_n(f') = \sum_{j=1}^L P_j^*(f')x_{n+j}(f'), \quad n = 1, \dots, N-L \quad (7)$$

روابط بالا با کمی تغییر شکل می‌توانند به صورت زیر بیان شوند:

$$\tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{P}(f')) \begin{bmatrix} x_{u(1)}(f') \\ x_{u(2)}(f') \\ \vdots \\ x_{u(N-M)}(f') \end{bmatrix} = \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{P}(f')) \begin{bmatrix} x_{k(1)}(f') \\ x_{k(2)}(f') \\ \vdots \\ x_{k(M)}(f') \end{bmatrix}, \quad (8)$$

$\mathbf{P}(f')$  میانگین فیلترهای پیشگویی محاسبه شده از بسامدهای کم بازسازی شده با استفاده از روش MSAR





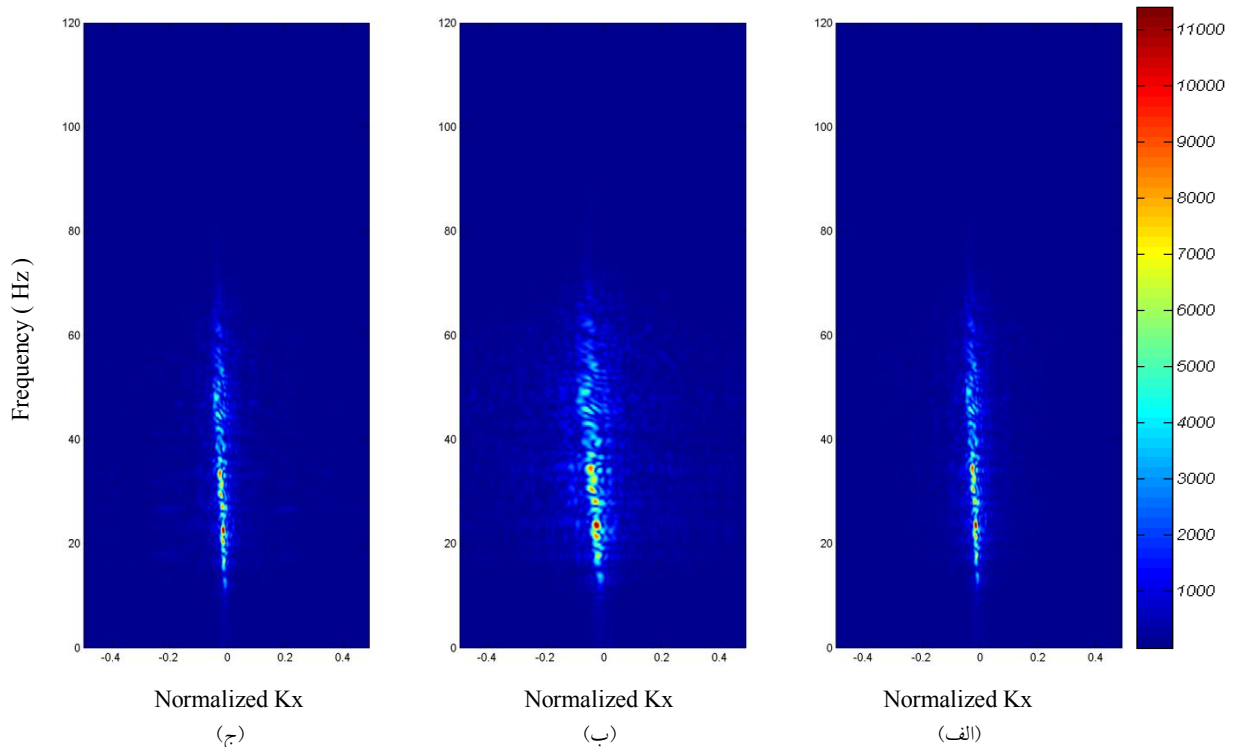
شکل ۵. بازسازی داده واقعی با استفاده از روش MSAR، (الف) داده اصلی، (ب) داده ناقص شده با حذف ۵۰ درصد از داده اصلی، (ج) داده بازسازی شده و (د) اختلاف بین داده اصلی و داده بازسازی شده.



## ۶ نتیجه‌گیری

روش MSAR روشی است که از داده‌های بسامد کم و بدون الیاسینگ برای بازسازی داده‌های بسامد زیاد استفاده می‌کند. این روش فرصتی را به وجود می‌آورد که فیلترهای پیشگویی برای بسامدهای زیاد فقط با استفاده از یک نوار از بسامدهای کم، برآورد شوند. این فیلترهای پیشگویی در حوزه  $f-x$  برای بازسازی داده‌ها به کار گرفته می‌شوند. از مزیت‌های این روش در مقایسه با روش تُرم وزن‌دار کمینه توانایی آن در حذف مصنوعات است که

در داده‌های بازسازی شده به روش تُرم وزن‌دار کمینه ایجاد می‌شوند. اما مزیت اصلی این روش توانایی بازسازی هم داده‌های منظم و هم نامنظم نمونه‌برداری شده است. از معایب این روش این است که در بازسازی پدیده‌های منحنی ناموفق عمل می‌کند. برای رفع این مانع می‌توان از پنجره‌بندی استفاده کرد. هرچند که این روش در بازسازی پدیده‌های با انحنا کم نیز موفق است. نتایج به دست آمده روی داده‌های مصنوعی و واقعی کارایی این الگوریتم را به خوبی تأیید می‌کند.



شکل ۶: نمایش حورزه  $f-k$  (الف) داده اصلی، (ب) داده ناقص و (ج) داده بازسازی شده به ترتیب مربوط به شکل‌های ۵-الف، ۵-ب و ۵-ج.

## منابع

- Lau, S., Sherman, P. J., and White, L. B., 2002, Asymptotic statistical properties of AR spectral estimators for processes with mixed spectra: IEEE Transactions on Information Theory, **48**(4), 909–917.
- Liu, B., 2004, Multi-dimensional Reconstruction of Seismic Data: PhD thesis, Alberta University, Canada.

- Canales, L. L., 1984, Random noise reduction: 54th Annual International Meeting, SEG, Expanded Abstracts, Session: S10.1.
- Duijndam, A., Schonewille, M. and Hindriks, C., 1999, Reconstruction of band-limited signals, irregularly sampled along one spatial direction: Geophysics, **64**, 524–538.

$$x_n(f) = \sum_{j=1}^L P_j(f) x_{n-j}(f), \quad n = L+1, \dots, N \quad (۳-پ)$$

$$x_n(f) = \sum_{j=1}^L P_j^*(f) x_{n+j}(f), \quad n = 1, \dots, N-L \quad (۴-پ)$$

بنابراین این روابط برای همه بسامدهای  $f' = \alpha f$  نیز صادق هستند و در این روابط می‌توان  $f$  را با  $f'$  جایگزین کرد. با بسط و کمی تغییر شکل روابط بالا خواهیم داشت:

$$(N-L) \begin{bmatrix} P_3 & P_2 & P_1 & -1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & P_3 & P_2 & P_1 & -1 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & P_3 & P_2 & P_1 & -1 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & P_3 & P_2 & P_1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ x_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (۵-پ)$$

در حالت کلی رابطه بالا به صورت  $Px=0$  که در آن  $P$  ماتریس فیلترهای پیشگویی و  $x$  بردار شامل داده‌ها است. حال اگر داده‌های معلوم و نامعلوم را از هم جدا کنیم در این صورت ماتریس  $P$  هم به دو ماتریس تقسیم خواهد شد. بنابراین اگر  $u$  برای داده‌های نامعلوم و  $k$  برای داده‌های معلوم به کار برده شوند خواهیم داشت:

$$A(P(f))x_k = B(P(f))x_u \quad (۶-پ)$$

که  $A$  و  $B$  ماتریس‌هایی فقط براساس فیلترهای پیشگویی هستند.

Liu, B., and Sacchi, M. D., 2004, Minimum weighted norm interpolation of seismic records: *Geophysics*, **69**, 1560–1568.

Marple, L., 1980, A new autoregressive spectrum analysis algorithm: *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, **28**(4), 342–349.

Naghizadeh, M., and Sacchi, M. D., 2007, Multistep autoregressive reconstruction of seismic records: *Geophysics*, **72**(6), V111–V118.

Porsani, M., 1999, Seismic trace interpolation using half-step prediction filters: *Geophysics*, **64**, 1461–1467.

Sacchi, M. D., and Ulrych, T. J., 1996, Estimation of the discrete Fourier transform, a linear inversion approach: *Geophysics*, **61**, 1128–1136.

Spitz, S., 1991, Seismic trace interpolation in the F-X domain: *Geophysics*, **56**, 785–794.

Takalo, R., Hytti, H., and Ihalainen, H., 2005, Tutorial on univariate autoregressive spectral analysis.

Zwartjes, P., and Gisolf, A., 2006, Fourier reconstruction of marine-streamer data in four spatial coordinates: *Geophysics*, **71**(6), V171–V186.

پیوست (بخش ۳)

عملگرهای خودبازگشتی چندمرحله‌ای برای محاسبه فیلترهای پیشگویی در همه بسامدها به کار برده می‌شوند. این عملگرها شامل عملگرهای پیش‌رونده و پس‌رونده هستند و به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$x_n^*(f) = \sum_{j=1}^L P_j(\alpha f) x_{n+\alpha j}^*(f), \quad n = 1, \dots, \alpha L, \quad (۱-پ)$$

$$x_n(f) = \sum_{j=1}^L P_j(\alpha f) x_{n-\alpha j}(f), \quad n = \alpha L + 1, \dots, N, \quad (۲-پ)$$

که \* بیانگر مزدوج مختلط است. این روابط مربوط به یک نوع خاص از مدل خودبازگشتی هستند که در آن روابط پیش‌رونده (رابطه پ ۱) و پس‌رونده (رابطه پ ۲) با گام‌های  $\alpha$  در زمان محاسبه می‌شوند. طول عملگر خودبازگشتی برابر  $L$  است و  $P_j(f)$  معرف فیلتر پیشگویی است. برای حالت خاص  $\alpha=1$  روابط خودبازگشتی به صورت زیر در خواهند آمد: