

# تأثیر فشار همه‌جانبه بر سرعت موج‌های کشسان و مدول‌های یانگ دینامیک و استاتیک نمونه‌های سنگ آهک سروک

علیرضا نجیبی<sup>۱</sup>، محمدرضا آصف<sup>۱\*</sup>، مجید نبی‌بیدهندی<sup>۲</sup>، رسول اجل‌لوییان<sup>۳</sup> و غلام‌عباس صفیان<sup>۴</sup>

<sup>۱</sup>گروه زمین‌شناسی دانشگاه خوارزمی، تهران، ایران

<sup>۲</sup>موسسه ژئوفیزیک دانشگاه تهران، ایران

<sup>۳</sup>گروه زمین‌شناسی دانشگاه اصفهان، ایران

<sup>۴</sup>شرکت ملی مناطق نفت‌خیز جنوب، اهواز، ایران

(تاریخ دریافت: ۱۳۹۰/۷/۶، تاریخ پذیرش: ۱۳۹۱/۶/۲۸)

## چکیده

در این پژوهش، به منظور بررسی تأثیر فشار همه‌جانبه بر سرعت امواج کشسان و مدول‌های یانگ دینامیکی ( $E_d$ ) و استاتیک ( $E_s$ )، آزمایش فراصوتی (التراسونیک) تحت فشار همه‌جانبه روی مغزه‌های سنگ آهک سروک مربوط به یکی از چاه‌های نفتی جنوب غرب ایران صورت گرفت. با نصب کرنش‌سنج، تغییرات طولی نمونه در حین آزمایش ثابت و  $E_s$  در فشارهای متفاوت اندازه‌گیری شد. داده‌های به‌دست آمده از این آزمایش‌ها نشان دهنده افزایش سرعت امواج و متعاقب آن افزایش  $E_d$ ، با افزایش فشار همه‌جانبه است که این روند افزایشی در فشارهای کمتر از ۱۵ مگاپاسکال بیشتر است و حالت غیرخطی دارد. در فشارهای بالاتر، این روند افزایشی کاهش می‌یابد و تغییرات سرعت با فشار خطی می‌شود. در این تحقیق ملاحظه شد که با افزایش فشار همه‌جانبه نسبت  $E_d/E_s$  به‌صورت نمایی کاهش می‌یابد که این پدیده مبین تأثیر بیشتر فشار همه‌جانبه در افزایش  $E_s$  نسبت به  $E_d$  است. براساس مدل پیشنهاد شده در این تحقیق، با دقت خوبی می‌توان  $E_s$  سازند را براساس  $E_d$  در فشارهای همه‌جانبه گوناگون برآورد کرد.

واژه‌های کلیدی: سنگ آهک، مدول یانگ دینامیکی و استاتیک، فشار همه‌جانبه، سرعت امواج کشسان

## The effect of the confining pressure on the elastic wave velocity, the dynamic and static Young's moduli of Sarvak limestone specimen

Alireza Najibi<sup>1</sup>, Mohammad Reza Asef<sup>1\*</sup>, Majid Nabi-Bidhendi<sup>2</sup>, Rasul Ajalloeian<sup>3</sup> and Gholam Abbas Safian<sup>4</sup>

<sup>1</sup>Department of Geology, Tarbiat Moallem University, Tehran, Iran

<sup>2</sup>Institute of Geophysics, University of Tehran, Iran

<sup>3</sup>Department of Geology, University of Esfahan, Iran

<sup>4</sup>National Iranian South Oil Company, Ahwaz, Iran

(Received: 28 September 2011, accepted: 18 September 2012)

## Summary

Young's modulus measured as the slope of a stress-strain curve under static loading conditions ( $E_s$ ) in the lab is an essential rock mechanical parameter for geomechanical analyses of oil wells. Examples of these analyses are wellbore stability analysis, estimation of the in-situ stresses, and the reservoir compaction survey. However,  $E_s$  is

\*Corresponding author:

asef@tmu.ac.ir

\*نگارنده رابط:

obtained by destructive laboratory tests on selected core samples along the well length. Therefore, information on the value of  $E_s$  along the well length is often discontinuous and limited to a cross well with a core. On the other hand, based on the theory of elasticity, well-known equations are available to calculate Young's modulus under dynamic (compressional and shear wave) loading conditions which is the dynamic Young's modulus ( $E_d$ ). Nevertheless,  $E_d$  for intact core specimens is very often two or three times or more larger than  $E_s$ . This is partly because in case of a dynamic loading strain, the amplitude is  $10^{-6}$  or  $10^{-7}$ , while in the static moduli strain, amplitude is typically  $10^{-2}$ – $10^{-3}$ . Static moduli, measured as the slopes of the stress–strain curves, differ from small strain amplitude dynamic (elastic) moduli because of plasticity or nonlinear effects. Also, porosity and micro-cracks in rock core specimens affect this phenomenon. Accordingly, many attempts have been made to predict  $E_s$  based on other nondestructive parameters namely compressional and shear wave velocities ( $V_p$  and  $V_s$ ) in the lab. Fortunately, geophysical logs in many hydrocarbon reservoirs provide  $V_p$  and  $V_s$  data continuously along the well length. Therefore, it is possible to calculate  $E_d$  continuously in the well. For this reason empirical equations have been developed to estimate  $E_s$  based on  $E_d$  along the well length.

Furthermore, a correlation between  $E_d$  and  $E_s$  at in-situ conditions is more difficult than in the lab. This is because  $V_p$  and  $V_s$  measurements increase by increasing in-situ confining stresses. This is in turn because confining stresses reduce the anisotropy elements such as porosity and micro-cracks. As a result,  $V_p$  and  $V_s$   $E_d$  often will increase with the burial depth. Similarly, laboratory experiments indicate that stress-strain measurements on rock core specimens under the static loading and triaxial confining stresses (similar to the well depth) will increase  $E_s$  with an increase in the confining stresses.

In this research, laboratory experiments were carried out on limestone rock core specimens of Sarvak Formation obtained from an oil well in the South West of Iran. The specimens were placed in a cell under confinement. Compressional and shear wave velocities at different confining stresses were measured. Experiments were accomplished in the dry conditions up to a maximum confining pressure of 50 MPa. Simultaneously, the values of the axial load and axial strain were recorded. It was noticed that with an increase in confining stresses,  $V_p$  and  $V_s$  will increase. Likewise, at lower confining stresses,  $V_p$  and  $V_s$  increase exponentially while after a critical confining stress of 15 MPa, exponential equation will turn to linear. Constants of the linear and exponential equations for Sarvak formation were extracted with excellent accuracy.

Based on these measurements,  $E_d$  and  $E_s$  were calculated at different levels of confining stresses. It was observed that with an increase in confinement, the ratio of  $E_d/E_s$  will decrease and approach to unity at higher confinements. This means that with an increase in confining stresses,  $E_s$  will increase faster (compared to  $E_d$ ). According to the findings of this research, a correlation between  $E_d$  and  $E_s$  should be made with extreme care to account for the impact of the confining stress at any depth of interest. This is very often ignored throughout the well length. Finally, based on laboratory experiments, an empirical equation was developed to predict  $E_s$  from  $E_d$  at different confining stresses.

**Key Words:** Limestone, static and dynamic Young's moduli, confining pressure, elastic wave velocity

## ۱ مقدمه

در تحقیقات ژئومکانیک مخازن نفتی، پارامترهای استاتیک نقش مهمی در برآورد تنش‌های برجا، نشست و تراکم مخزن، و تحلیل پایداری چاه ایفا می‌کنند (چانگ و همکاران، ۲۰۰۶). معمولاً در صورتی که تعیین مدول یانگ استاتیک ( $E_s$ ) و یا مقاومت فشاری تک‌محوره سنگ مخزن مورد نیاز باشد، براساس آزمایش‌های مقاومت فشاری تک‌محوری و فراصوتی مغزه سنگ، روابطی تجربی بین  $E_s$  و مقاومت فشاری تک‌محوره با مدول یانگ دینامیکی ( $E_d$ ) برقرار می‌شود (ماو کو و همکاران، ۲۰۰۹). براساس روابط تجربی عرضه شده و با استفاده داده‌های نگار صوتی چاه، مقادیر  $E_s$  و مقاومت فشاری سنگ در دیواره چاه پیش‌بینی می‌شود. در آزمون‌های صورت گرفته، معمولاً فشار همه‌جانبه اعمال نمی‌شود و روابط تجربی براساس آزمایش‌های صورت گرفته در شرایط فشار جو داده شده‌اند؛ این در حالی است که هنگام استفاده عملی از مدل عرضه شده، در این روابط داده‌های نگار صوتی چاه مورد استفاده قرار می‌گیرد که سرعت موج در سنگ، در فشار همه‌جانبه مخزن اندازه‌گیری شده است. نکته اساسی این است که اگر بدانیم فشار همه‌جانبه عاملی موثر بر ویژگی‌های دینامیکی و استاتیک سنگ است، تغییرات این پارامترها در شرایط تحت فشار باید به‌صورت مناسب در مدل تأثیر داده شود. سنگ‌ها و کانی‌های تشکیل‌دهنده آنها در اثر اعمال تنش معمولاً رفتار غیرخطی از خود نشان می‌دهند. این رفتار غیرخطی در برخی ویژگی‌های فیزیکی و مکانیکی سنگ، مانند سرعت امواج کشسان P و S و مدول‌های کشسان نیز نمایان می‌شود (ماو کو و همکاران، ۲۰۰۹؛ فجایر و همکاران، ۲۰۰۸). روش‌ها و مدل‌های گوناگونی رفتار غیرخطی ویژگی‌های فیزیکی و مکانیکی سنگ در برابر تنش را مورد بررسی قرار داده‌اند. مدل تماس منافذ کروی (Spherical contact model) (دافی و

مایندلین، ۱۹۵۷) و مدل تماس ترک (Crack contact model) (ماو کو و همکاران، ۱۹۹۵؛ گانجی و کارلسون، ۱۹۹۶) رفتار غیرخطی سرعت امواج کشسان سنگ در اثر اعمال تنش را نشان می‌دهند. این مدل‌ها در برخی تحقیقات ژئوفیزیکی مورد استفاده قرار گرفتند (کارسیونه و تینیولا، ۲۰۰۱). البته استفاده از این مدل‌ها مشکل است و به شرایط زمین‌شناسی خاصی محدود می‌شود (کاسلو و شاپیرو، ۲۰۰۴).

نظریه صوتی کشسانی (Acoustoelasticity)، مدل دیگری است که تأثیر فشار همه‌جانبه بر ویژگی‌های کشسان و سرعت امواج درون سنگ‌ها را بیان می‌کند (سرکار و همکاران، ۲۰۰۳). رابطه کلی این مدل برای امواج کشسان P و S با روابط (۱) و (۲) بیان می‌شود (جانسون و راسلوفسون، ۱۹۹۶):

$$\rho V_p^2 = \lambda + 2G - \frac{P}{3K}(6l + 4m + 7\lambda + 10G), \quad (1)$$

$$\rho V_s^2 = G - \frac{P}{3K}(3m - \frac{1}{2}n + 3\lambda + 6G), \quad (2)$$

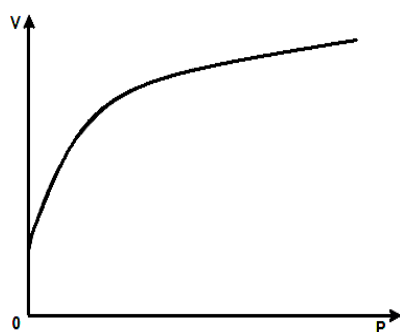
که  $V_p$  و  $V_s$  سرعت امواج تراکمی و بُرشی برحسب کیلومتر بر ثانیه،  $\rho$  چگالی برحسب گرم بر سانتی‌متر مکعب،  $\lambda$ ،  $G$  و  $K$  مدول‌های کشسان برحسب گیگاپاسکال،  $P$  فشار همه‌جانبه برحسب مگاپاسکال هستند و  $l$ ،  $m$  و  $n$  ثوابت ثابت‌های مورناغان (Murnaghan) نام دارند. با اعمال فشار همه‌جانبه، مقادیر سمت راست روابط (۱) و (۲) افزایش می‌یابد، که با فرض ثابت بودن چگالی (در اثر اعمال فشار)، سرعت امواج کشسان P و S در سمت چپ روابط نیز افزایش می‌یابد. این مدل، محدوده اندکی از تنش‌ها را در برمی‌گیرد و رابطه تنش و ویژگی‌های کشسان (سرعت امواج) را به‌صورت خطی نشان می‌دهد (جانسون و راسلوفسون، ۱۹۹۶).

بررسی‌های آزمایشگاهی که در فشارهای همه‌جانبه متفاوت، سرعت امواج کشسان P و S را اندازه‌گیری کرده است، به‌خوبی رفتار غیرخطی سرعت امواج را برحسب

گرنش سنج و اندازه‌گیری مدول یانگ استاتیک، تاثیر فشار همه‌جانبه بر  $E_s$  و نسبت  $E_h/E_s$  نیز مورد بررسی قرار گرفت.

## ۲ تاثیر فشار همه‌جانبه بر سرعت امواج کشسان

تجربیات به‌دست آمده از اندازه‌گیری سرعت امواج کشسان مغزه‌های سنگ در فشارهای همه‌جانبه متفاوت، افزایش غیرخطی و سریع سرعت در فشارهای کم را نشان می‌دهد. این روند، به‌علت بسته شدن ترک‌ها و منافذ موجود در سنگ روی می‌دهد. در فشارهای بیشتر، به‌سبب بسته‌شدن تعداد کمتری از ترک‌های باقی‌مانده و بروز تغییر شکل کشسان حجمی در نمونه، منحنی تغییرات سرعت با فشار خطی می‌شود که در شکل ۱ نشان داده شده است (وانگ و همکاران، ۲۰۰۵).



شکل ۱. منحنی سرعت-فشار (وانگ و همکاران، ۲۰۰۵).

فشار نشان می‌دهد (ابرهارت-فیلیس و همکاران، ۱۹۸۹؛ وپفر و کریستنسن، ۱۹۹۱؛ آنسلمتی و ابرلی، ۱۹۹۳؛ وانگ و همکاران، ۲۰۰۵) که اساس این تحقیق است.

فجایر و همکاران (۲۰۰۸) با توجه به نقش فشار همه‌جانبه بر ویژگی‌های مکانیکی سنگ روشن ساختند که در سنگ‌های ضعیف، اختلاف بین مدول‌های دینامیک و استاتیک حداکثر است و معمولاً مدول‌های دینامیک از مدول‌های استاتیک متناظر خود (مدول استاتیک تحت همان فشار همه‌جانبه) بزرگ‌تر هستند. با افزایش فشار همه‌جانبه و متراکم شدن سنگ، مقادیر مدول‌های کشسان استاتیک و دینامیک سنگ افزایش و اختلاف بین آنها کاهش می‌یابد.

در این تحقیق، با اجرای آزمایش فراصوتی تحت فشار روی سنگ آهک و با اندازه‌گیری سرعت امواج کشسان P و S در فشارهای همه‌جانبه از ۵ تا ۵۰ مگاپاسکال، نحوه تاثیر فشار همه‌جانبه بر سرعت امواج کشسان مورد ارزیابی قرار گرفت و براساس آن یک رابطه تجربی برای برآورد سرعت امواج P و S سنگ در شرایط فشارهای همه‌جانبه متفاوت عرضه شد. با استفاده از رابطه تجربی سرعت-فشار عرضه شده، سرعت امواج کشسان در فشار جوّ پیش‌بینی شد و با نتایج آزمایش فراصوتی معمولی صورت گرفته در فشار جوّ مقایسه شد. همچنین با نصب

جدول ۱. ضرایب رابطه (۳) برای ماسه‌سنگ (ابرهارت-فیلیس و همکاران، ۱۹۸۹).

$V = A + KP - Be^{-DP}$									
Sample	Porosity	$V_p$				$V_s$			
		A km/s	K $10^{-4}$ / km/s/MPa	B Km/s	D $10^{-2}$ / MPa <sup>-1</sup>	A Km/s	K $10^{-4}$ / km/s/MPa	B Km/s	D $10^{-2}$ / MPa <sup>-1</sup>
Beaver	0.064	5.47	0.199	0.503	9	3.44	0.381	0.399	11
Berea 350	0.227	3.91	0.307	0.622	22	2.31	0.197	0.537	19
Indiana1	0.266	3.20	0.353	0.308	12	1.92	0.152	0.305	10

جدول ۲. ضرایب رابطه (۴) برای برخی از سنگ‌ها (ویفر و کریستنسن، ۱۹۹۱).

$V = A \left( \frac{P}{100} \right)^a + B(1 - e^{-bp})$								
Sample	$V_p$				$V_s$			
	A km/s	a	B Km/s	B 1/MPa	A km/s	a	B Km/s	B 1/MPa
Dolomite	5.44	0.017	1.05	0.025	3.58	0.011	0.16	0.028
Sandstone	3.76	0.072	1.64	0.0198	2.61	0.071	1.06	0.021
Limestone	-	-	-	-	3.17	0.011	0.17	0.019

که  $V$  سرعت امواج کشسان ( $P$  یا  $S$ ) برحسب کیلومتر بر ثانیه،  $P$  فشار همه‌جانبه برحسب مگاپاسکال و  $A$ ،  $a$ ،  $B$  و  $b$  ثابت‌های معادله هستند. آنان همچنین بیان کردند که در فشارهای ۶۰ تا ۲۰۰ مگاپاسکال، رفتار غیرخطی سرعت سنگ به رفتار خطی تبدیل می‌شود و این منطقه را ناحیه خمش (Knee) معرفی کردند. جدول ۲، مقادیر ضرایب رابطه (۴) را برای برخی از سنگ‌ها نشان می‌دهد.

آنسلمتی و ابرلی (۱۹۹۳)، با اعمال حدود ۱۰۰ مگاپاسکال فشار همه‌جانبه روی ۲۱۰ نمونه کرنات، سرعت امواج کشسان را در فشارهای گوناگون اندازه‌گیری کردند. نتایج تحقیقات آنان، بیانگر بسته شدن ترک‌ها در فشار بحرانی ۱۵ مگاپاسکال و خرد شدن نمونه‌ها در فشارهای بالاتر از ۱۰۰ مگاپاسکال است.

وانگ و همکاران (۲۰۰۵) با اجرای آزمایش فراصوتی تحت فشار روی تعدادی نمونه اکلوزیت و اعمال حداکثر ۸۰۰ مگاپاسکال فشار همه‌جانبه، به بررسی تأثیر فشار همه‌جانبه بر سرعت امواج کشسان پرداختند. آنان منحنی تغییرات سرعت با فشار را همانند شکل ۲، به قسمت‌های گوناگون تقسیم کردند.

ابرهارت-فیلیسپس و همکاران (۱۹۸۹) با اجرای آزمایش فراصوتی روی ۶۴ نمونه ماسه‌سنگ، سرعت امواج کشسان را تا فشار همه‌جانبه ۵۰ مگاپاسکال اندازه‌گیری کردند. آنان با این آزمایش، روشن ساختند که در فشارهای کمتر از ۲۰ مگاپاسکال، رابطه سرعت با فشار غیرخطی است و در فشارهای بیشتر از آن، خطی می‌شود. آنها همچنین رابطه (۳) را برای هر دو ناحیه خطی و غیرخطی پیشنهاد کردند:

$$V = A + KP - Be^{-DP}, \quad (3)$$

که  $P$  فشار همه‌جانبه موثر برحسب مگاپاسکال،  $V$  سرعت امواج ( $P$  یا  $S$ ) برحسب کیلومتر بر ثانیه و  $A$ ،  $K$ ،  $B$  و  $D$ ، ثابت‌های معادله هستند. جدول ۱ مقادیر ثابت‌های رابطه (۳) را برای تعدادی از ماسه‌سنگ‌ها نشان می‌دهد.

ویفر و کریستنسن (۱۹۹۱)، با اعمال حداکثر ۸۰۰ مگاپاسکال فشار همه‌جانبه روی تعدادی نمونه گنیس، سرعت امواج کشسان را در فشارهای متفاوت اندازه گرفتند و رابطه سرعت با فشار را به صورت رابطه (۴) پیشنهاد کردند:

$$V = A \left( \frac{P}{100} \right)^a + B(1 - e^{-bp}), \quad (4)$$

جی و همکاران (۲۰۰۷) رابطه (۶) را مورد بررسی مجدد قرار دادند و رابطه زیر را پیشنهاد کردند:

$$B = B_0 e^{Kp}, \quad (7)$$

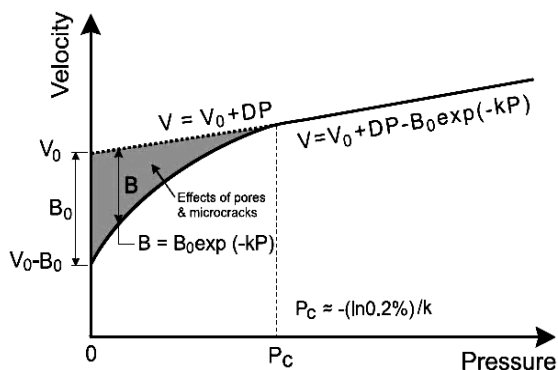
که  $B$  اختلاف سرعت موج در یک سنگ متخلخل با نمونه متناظر غیرمتخلخل در فشار یکسان است که به آن سرعت اُفت می‌گویند. در شرایط اعمال نشدن فشار همه‌جانبه، سرعت اُفت به حداکثر مقدار خود می‌رسد و آن را با  $B_0$  نشان می‌دهند (شکل ۳). در رابطه (۷)،  $K$  ثابت اُفت نام دارد و با رابطه زیر بیان می‌شود:

$$\frac{dB}{dP} = -KB, \quad (8)$$

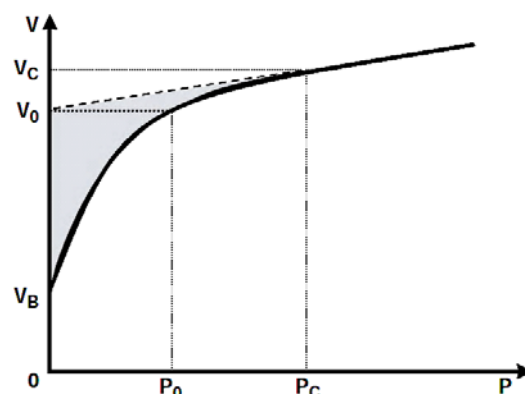
جی و همکاران (۲۰۰۷) با ترکیب رابطه (۵) و (۷)، رابطه کلی سرعت با فشار را به صورت رابطه (۹) و شکل ۳ نشان دادند:

$$V = V_0 + DP - B_0 e^{-kP}, \quad (9)$$

رابطه (۹)، مشابه رابطه (۳) است و ثابت‌های آن را به صورت فیزیکی تعریف کرده‌اند. در شکل ۳، مفهوم فیزیکی  $V_0 - B_0$  سرعت امواج کشسان در فشار جو است که به روش برون‌یابی قابل پیش‌بینی است. نظیر این پارامتر، با اجرای آزمایش فراصوتی معمولی در فشار جو قابل اندازه‌گیری است.



شکل ۳. منحنی تغییرات سرعت امواج کشسان نسبت به فشار همه‌جانبه (جی و همکاران، ۲۰۰۷).



شکل ۲. قسمت‌های متفاوت منحنی سرعت-فشار (وانگ و همکاران، ۲۰۰۵).

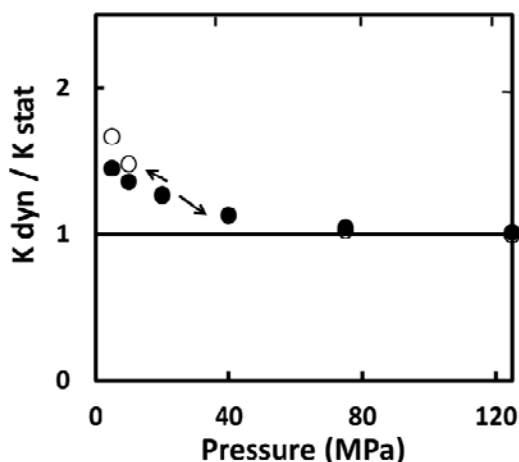
در بالای فشار بحرانی ( $P_c$ )، سنگ به حداکثر تراکم خود می‌رسد که با افزایش فشار، سرعت امواج در سنگ به صورت خطی افزایش می‌یابد و تغییر شکل کشسان حجمی در آن رخ می‌دهد. آنها رابطه کلی سرعت موج با فشار را در این شرایط به صورت زیر پیشنهاد کردند:

$$V = V_0 + DP, \quad P \geq P_c \quad (5)$$

که  $V$  سرعت امواج ( $S$  و  $P$ ) برحسب کیلومتر بر ثانیه،  $P$  فشار همه‌جانبه برحسب مگاپاسکال،  $D$  شیب خط سرعت - فشار و  $V_0$  سرعت موج در نمونه سنگ بکر (سنگ دارای تخلخل صفر و فاقد هرگونه درز و ترک) و در فشار جو است که با برون‌یابی به دست می‌آید. همان‌گونه که در شکل ۲ ملاحظه می‌شود،  $P_0$  فشاری است که در آن  $V = V_0$  می‌شود.  $V_B$  و  $V_c$  به ترتیب سرعت موج در سنگ در فشار جو و فشار بحرانی است. وانگ و همکاران (۲۰۰۵) تغییرات  $V_c$  تا  $V_0$  را مربوط به تراکم تاخیری دانستند و برای ناحیه غیرخطی، رابطه زیر را پیشنهاد کردند:

$$V = a(\ln(P))^2 + b\ln(P) + C, \quad (6)$$

که  $C$  سرعت موج در سنگ برحسب کیلومتر بر ثانیه و در فشار ۱ مگاپاسکال است؛ و  $a$  و  $b$  ثابت‌های تجربی هستند.



شکل ۴. تأثیر فشار همه‌جانبه بر نسبت مدول حجمی دینامیکی به استاتیک در ماسه‌سنگ با ۲٪ رس (جیزبا، ۱۹۹۱).

#### ۴ نمونه‌های مورد آزمایش و روش کار آزمایشگاهی

نمونه‌های مورد آزمایش در این تحقیق، شامل سه نمونه سنگ آهک سروک است (شکل ۵) که مشخصات آنها در جدول ۳ بیان شده است.

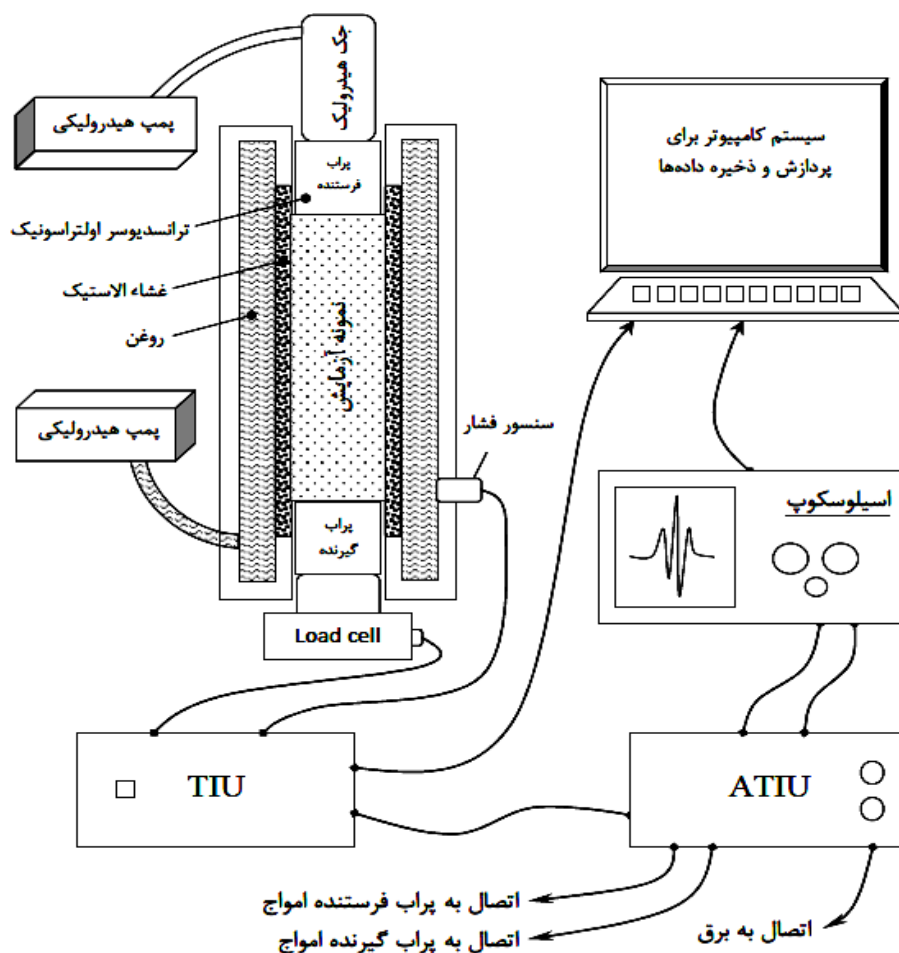
لیتولوژی سنگ آهک سروک، شامل آهک‌های توده‌ای کرم تا قهوه‌ای‌رنگ به سن سنومانین-تورونین است که از یکی از چاه‌های نفتی اهواز و از اعماق حدود ۴۶۰۰ تا ۴۷۰۰ متری تهیه شدند. مواد هیدروکربنی نمونه‌ها با حلال تولوئن و دستگاه سوکسله (Soxhlet) خارج شد و

#### ۳ تأثیر فشار همه‌جانبه بر مدول‌های یانگ استاتیک و دینامیکی

تحقیقات زیادی روشن ساخته است که با افزایش فشار همه‌جانبه، مقادیر مدول‌های کشسان استاتیک در سنگ افزایش می‌یابند (والش و بریس، ۱۹۶۶؛ چنگ و جانستن، ۱۹۸۱؛ جیزبا، ۱۹۹۱؛ آصف و ردیش، ۲۰۰۱؛ فجایر و همکاران، ۲۰۰۸). مشاهدات تجربی چنگ و جانستن (۱۹۸۱) نشان می‌دهد که معمولاً مقادیر مدول‌های دینامیکی از مدول‌های استاتیک متناظر خود بزرگ‌تر هستند و با اعمال فشار همه‌جانبه، به دلیل بسته شدن درزه‌ها و ریزترک‌های موجود در سنگ، مقادیر مدول استاتیک افزایش می‌یابد (با سرعت بیشتری نسبت به مدول دینامیک) و به مدول دینامیک نزدیک می‌شوند. جیزبا (۱۹۹۱) با اندازه‌گیری هم‌زمان مدول‌های حجمی دینامیک و استاتیک ماسه‌سنگ در فشارهای متفاوت، روشن ساخت که فشار همه‌جانبه، تأثیر مستقیمی بر افزایش مدول‌های دینامیکی و استاتیک می‌گذارد و این تأثیر بر مدول استاتیک بیشتر و در ماسه‌سنگ‌های با حجم رُس اندک است. در فشار حدود ۵۰ مگاپاسکال، مقادیر مدول‌های حجمی دینامیکی و استاتیک با هم برابر می‌شود که در شکل ۴ نشان داده شده است.



شکل ۵. نمونه‌های مورد آزمایش.



شکل ۶. اجزای تشکیل دهنده دستگاه آزمایش فراصوتی تحت فشار.

پس از واسنجی دستگاه، نمونه داخل سلول گذاشته می‌شود و پس از نصب فرستنده و گیرنده، اعمال بار صورت می‌گیرد. پس از اعمال فشار همه‌جانبه موردنظر، امواج کشسان با استفاده از سامانه ارسال و دریافت امواج، به درون نمونه ارسال و شکل آن با اسیلوسکوپ ثبت می‌شود. با انتقال موج به رایانه، شکل و زمان حرکت آن در نمونه با کمک نرم‌افزار خوانده می‌شود. از تقسیم طول نمونه به زمان حرکت موج در آن، سرعت موج در نمونه براساس رابطه (۱۰) به دست می‌آید:

$$V = \frac{L}{t} \times 1000, \quad (10)$$

پس از تعیین وزن و ابعاد، تخلخل آنها با تخلخل سنج (به روش گاز هلیم) اندازه‌گیری شد.

دستگاه آزمایش فراصوتی تحت فشار، سرعت امواج کشسان P و S را به روش عبوری (Pulse transmission technique) در فشارهای متفاوت اندازه‌گیری می‌کند و از قسمت‌هایی از قبیل محفظه نگهدارنده نمونه (سلول)، پراب فرستنده و گیرنده امواج، سامانه اعمال فشار همه‌جانبه با پمپ‌های دستی، سامانه ارسال و دریافت امواج تراکمی و بُرشی (TIU و ATIU) و اسیلوسکوپ تشکیل شده است. شکل ۶، قسمت‌های تشکیل دهنده این دستگاه را نشان می‌دهد.



جدول ۳. مشخصات هندسی، وزن، چگالی و تخلخل نمونه‌ها.

Sample Id.	Length (mm)	Diameter (mm)	Weight (gram)	Bulk Density (gr/cm <sup>3</sup> )	Porosity (%)
KL-9	75.54	50.51	408.72	2.70	0.21
KL-10	72.79	50.79	393.90	2.67	0.48
KL-13	103.35	50.58	554.00	2.66	0.31

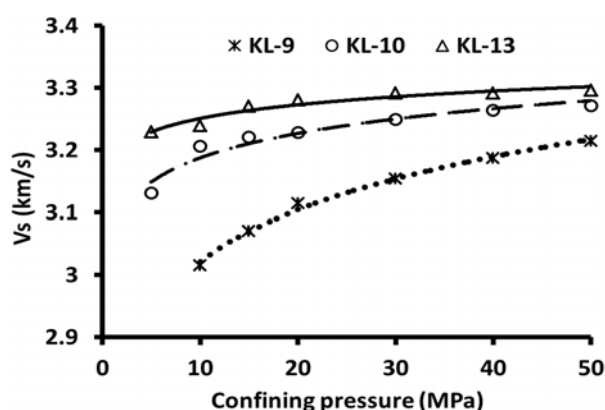
با نصب گرنش‌سنج روی نمونه شماره KL-13 و ثبت منحنی تنش-گرنش، تغییرات  $E_s$  با فشار مورد بررسی قرار می‌گیرد.

#### ۵ بررسی نتایج آزمایشگاهی

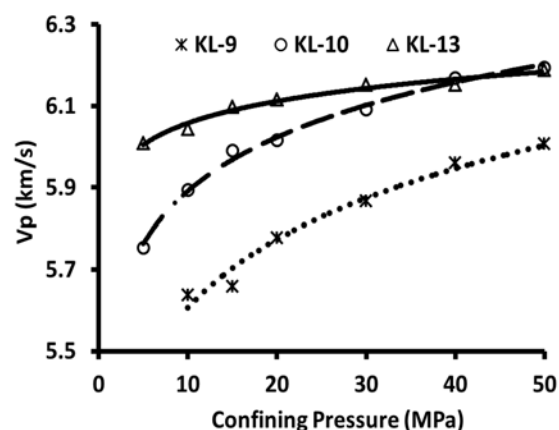
۵-۱ تعیین ضرایب در روابط تجربی سرعت-فشار پس از اجرای آزمایش فراسوتی تحت فشار، منحنی تغییرات سرعت امواج تراکمی و بُرشی با فشار همه‌جانبه برای نمونه‌های مورد بررسی رسم شد که نتایج در شکل‌های ۷ و ۸ نشان داده شده است. همان‌گونه که ملاحظه می‌شود، در فشارهای کم، به سبب بستن منافذ و ریزترک‌های موجود در نمونه، رابطه فشار-سرعت

که  $V$  سرعت موج برحسب متر بر ثانیه،  $L$  طول نمونه برحسب میلی‌متر و  $t$  زمان سیر موج در نمونه در واحد میکروثانیه است.

در این تحقیق، با اجرای آزمایش فراسوتی تحت فشار، روی سنگ آهک سروک، سرعت امواج تراکمی و بُرشی در محدوده فشارهای همه‌جانبه ۵ تا ۵۰ مگاپاسکال اندازه‌گیری شد و ضرایب روابط (۴) و (۹) برای نمونه‌های مورد بررسی به دست آمد. سپس با استفاده از رابطه (۹)، سرعت امواج تراکمی و بُرشی در فشار جو ( $V_B$  در شکل ۲ که  $V_B = V_0 - B_0$ )، پیش‌بینی و با مقادیر سرعت امواج تراکمی و بُرشی اندازه‌گیری شده در فشار جو (از اجرای آزمایش فراسوتی معمولی) مقایسه می‌شود.



شکل ۸. منحنی سرعت-فشار در سنگ آهک سروک برای موج بُرشی ( $V_s$ ).



شکل ۷. منحنی سرعت-فشار در سنگ آهک سروک برای موج تراکمی ( $V_p$ ).

جدول ۴. ضرایب رابطه (۴) برای سنگ آهک سروک.

$$V = A \left( \frac{P}{100} \right)^a + B(1 - e^{-bp})$$

Sample Id.	$V_p$					$V_s$				
	A km/s	a	B km/s	b 1/MPa	$R^2$	A km/s	a	B km/s	B 1/MPa	$R^2$
KL-9	5.05	0.05	1.13	1.21	0.97	2.51	0.052	0.79	1	0.99
KL-10	5.19	0.03	1.14	0.78	0.99	3.56	0.016	0.70	0.54	0.99
KL-13	4.75	0.016	1.48	1.01	0.97	3.45	0.012	0.87	0.96	0.92

قابل اندازه‌گیری نیست و این دستگاه فقط در فشارهای بالاتر از حدود ۵ مگاپاسکال می‌تواند سرعت امواج در سنگ را ثبت کند. پس از تعیین ضرایب رابطه (۹)، مقادیر سرعت امواج کشسان در فشار جو<sup>۰</sup> ( $V_0 - B_0$ ) برای هر نمونه براساس ضرایب مندرج در جدول ۵ پیش‌بینی شد. این پارامتر، با اجرای آزمایش فراصوتی معمولی در فشار جو<sup>۰</sup> نیز اندازه‌گیری و نتایج آن با مقادیر پیش‌بینی شده مقایسه شد. در جدول ۶ مقادیر سرعت امواج تراکمی و بُرشی اندازه‌گیری شده و پیش‌بینی شده مغزه‌های سنگی در فشار جو<sup>۰</sup> مقایسه شده است. شایان ذکر است که در پژوهش‌های قبلی از جمله وانگ و همکاران (۲۰۰۵) و جی و همکاران (۲۰۰۷) به سبب به انجام نرسیدن آزمایش فراصوتی در فشار جو<sup>۰</sup> چنین مقایسه‌ای صورت نگرفته است.

همان‌گونه که در جدول ۶ ملاحظه می‌شود، سرعت امواج تراکمی و بُرشی پیش‌بینی شده و اندازه‌گیری شده در فشار جو<sup>۰</sup> بسیار به یکدیگر نزدیک‌اند و ضریب همبستگی حدود ۰.۹۸ بین آنها برقرار است. بنابراین با اجرای آزمایش فراصوتی تحت فشار و محاسبه ضرایب منحنی سرعت-فشار (رابطه (۹))، نتایج آزمایش فراصوتی

غیرخطی است و سنگ، قابلیت تراکم‌پذیری زیادی دارد. در این نمونه‌ها، فشار بحرانی همه‌جانبه، حدود ۱۵ مگاپاسکال تشخیص داده شد که منطبق بر نتایج آنسلمتی و ابرلی (۱۹۹۳) در مورد کرنات‌ها است. در فشارهای بیشتر از فشار بحرانی، تغییرات سرعت نسبت به فشار خطی شده است که این بیانگر متراکم شدن و تراکم‌پذیری کم سنگ در این محدوده از فشارها است. شکل کلی نمودارهای سرعت-فشار در این تحقیق (شکل‌های ۷ و ۸) مشابه شکل ۳ است و روابط (۴) و (۹) به‌خوبی در معادله منحنی آن صدق می‌کند. بنابراین ضرایب روابط (۴) و (۹) برای نمونه‌های سنگ آهک مورد بررسی با دقت بسیار خوب ( $R^2 > 0.95$ ) به‌دست آمد که نتایج آن در جدول‌های ۴ و ۵ نشان داده شده است.

۲-۵ پیش‌بینی سرعت امواج کشسان در فشار جو<sup>۰</sup> و مقایسه آن با نتایج آزمایشگاهی از رابطه (۹) و شکل‌های ۲ و ۳ می‌توان نتیجه گرفت که مفهوم فیزیکی  $V_0 - B_0$  سرعت امواج کشسان در فشار جو<sup>۰</sup> ( $V_B$ ) است که براساس نتایج آزمایش فراصوتی تحت فشار قابل پیش‌بینی خواهد بود. به سبب محدودیت‌های عملی از نظر اتصال مناسب و پیوسته گیرنده و فرستنده به نمونه، مقدار  $V_B$  با دستگاه آزمایش فراصوتی تحت فشار

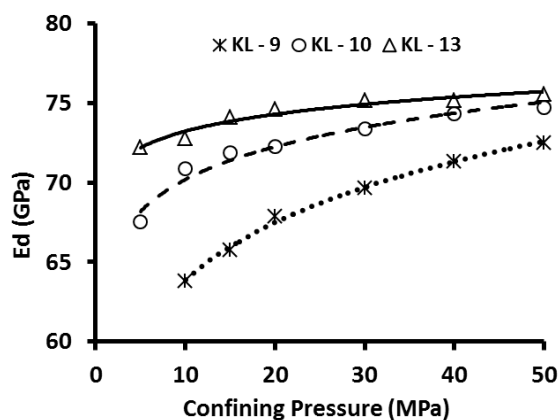
جدول ۵. ضرایب رابطه (۹) برای سنگ آهک سروک.

$$V = V_0 + DP - B_0 e^{-KP}$$

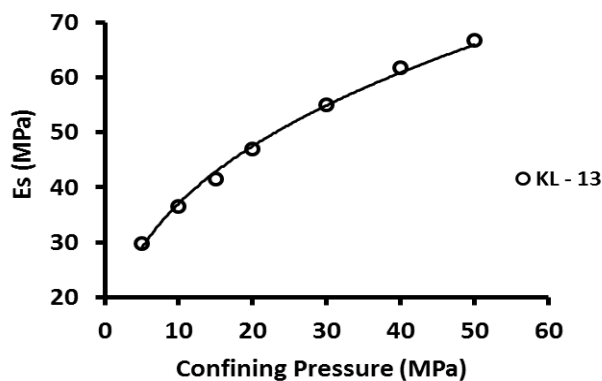
Sample Id.	$V_p$					$V_s$				
	$V_0$ km/s	$D$ $10^{-4}$ km/s/M Pa	$B_0$ Km/s	$K$ $10^{-1}$ $^2\text{MPa}^{-1}$	$R^2$	$V_0$ Km/s	$D$ $10^{-4}$ km/s/M Pa	$B_0$ km/s	$K$ $10^{-1}$ $^2\text{MPa}^{-1}$	$R^2$
KL-9	5.58	0.009	1.23	0.34	0.97	3.06	0.003	0.59	0.20	0.99
KL-10	5.90	0.006	0.72	0.27	0.99	3.20	0.0015	0.70	0.44	0.99
KL-13	6.04	0.003	0.7	0.52	0.94	3.25	0.001	0.40	0.53	0.87

پیش‌بینی شده بیش از مقدار واقعی برآورد می‌شود. براساس همین کاربرد و نیاز اساسی، در این تحقیق سعی شده است علاوه بر محاسبه ضرایب معادله جی و همکاران (۲۰۰۷) (رابطه ۹) برای نمونه‌های سازند کربناته سروک، با یک گام به جلو امکان پیش‌بینی سرعت امواج تراکمی و بُرشی در فشار جوّ با استفاده از داده‌های مربوط به سرعت امواج در فشارهای بالاتر نیز فراهم شود. بنابراین با برون‌یابی سرعت امواج تراکمی و بُرشی در فشار جوّ، امکان برآورد بهتر و منطقی‌تر مقاومت فشاری تک‌محوره در تحقیقات ژئومکانیک مخازن فراهم می‌شود.

معمولی با دقت زیادی قابل پیش‌بینی است. این روش کاربرد بسیار موثری در پیش‌بینی مقدار مقاومت فشاری تک‌محوره از سرعت امواج کشسان (مدول یانگ دینامیکی) در چاه‌های نفتی دارد. این پارامتر نشان‌دهنده مقاومت سنگ در شرایطی است که فشار همه‌جانبه وجود ندارد؛ درحالی‌که به‌منظور پیش‌بینی آن در چاه‌های نفتی، از سرعت امواج کشسان حاصل از نگرهای صوتی استفاده می‌شود که در شرایط فشار همه‌جانبه مخزن اندازه‌گیری شده‌اند. از آنجاکه با افزایش فشار همه‌جانبه، سرعت امواج کشسان افزایش می‌یابد، در صورت بی‌توجهی به نکته مطرح شده، مقاومت فشاری تک‌محوره



شکل ۱۰. تأثیر فشار همه‌جانبه بر مدول یانگ دینامیکی ( $E_d$ ) در سنگ آهک سروک.



شکل ۹. تأثیر فشار همه‌جانبه بر مدول یانگ استاتیکی ( $E_s$ ) در سنگ آهک سروک.

جدول ۶. سرعت امواج کشسان پیش‌بینی شده و اندازه‌گیری شده در فشار جو.

Sample Id.	$V_{BP}$ (km/s) Measured	$V_{BP}$ (km/s) Predicted	$V_{BS}$ (km/s) Measured	$V_{BS}$ (km/s) Predicted	Error (km/s)
KL-9	4.392	4.350	2.485	2.473	0.027
KL-10	5.199	5.180	2.527	2.500	0.023
KL-13	5.320	5.340	2.870	2.850	0.02

به منظور بررسی تاثیر فشار همه‌جانبه بر مدول یانگ دینامیکی ( $E_d$ )، ارتباط بین  $E_d$  با سرعت امواج تراکمی و بُرشی بیان می‌شود که در رابطه (۱۲) نشان داده شده است:

$$E_d = \rho \cdot V_s^2 \frac{3V_p^2 - 4V_s^2}{V_p^2 - V_s^2}, \quad (12)$$

رابطه (۱۲)، ارتباط مستقیم چگالی، سرعت امواج تراکمی و بُرشی با  $E_d$  را نشان می‌دهد. بنابراین با افزایش فشار همه‌جانبه، به سبب افزایش سرعت امواج کشسان،  $E_d$  نیز افزایش می‌یابد. شکل ۱۰ تاثیر فشار همه‌جانبه بر  $E_d$  را در نمونه‌های مورد آزمایش نشان می‌دهد.

شکل ۱۱ و رابطه (۱۳)، تاثیر فشار همه‌جانبه بر نسبت  $E_d/E_s$  را در نمونه سنگ آهک سروک شماره ۱۳ نشان می‌دهند:

$$\frac{E_d}{E_s} = 4.2954P^{-0.337}, \quad (13)$$

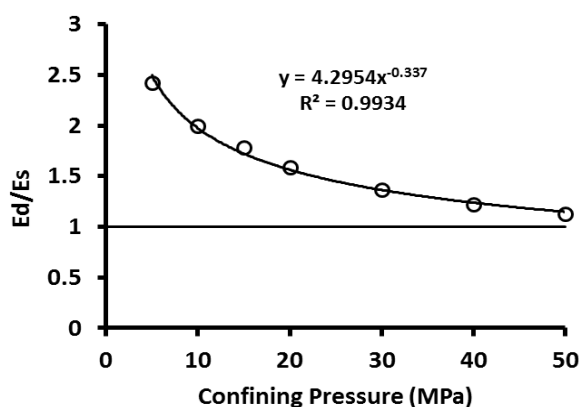
که  $P$  فشار همه‌جانبه است و برحسب مگاپاسکال بیان می‌شود. همان‌گونه که در شکل ۱۱ و رابطه (۱۳) نشان داده شده است، با افزایش فشار همه‌جانبه، مقادیر  $E_s$  بیش از  $E_d$  افزایش پیدا می‌کند و نسبت  $E_d/E_s$  به صورت نمایی کاهش می‌یابد. روند کاهش سرعت در فشارهای کم و تا حدود ۱۵ مگاپاسکال بیشتر است و در فشارهای بالاتر، تقلیل می‌یابد. فشار همه‌جانبه ۱۵ مگاپاسکال در کرنات‌ها، فشاری بحرانی است که در آن بیشتر منافذ و

۳-۵ اندازه‌گیری مدول‌های یانگ استاتیک ( $E_s$ ) و دینامیکی ( $E_d$ ) و تاثیر فشار همه‌جانبه بر نسبت  $E_d/E_s$  ضریب یانگ استاتیک، از تقسیم تنش محوری اعمال شده به کرنش محوری ایجاد شده، از رابطه (۱۱) به دست می‌آید:

$$E_s = \frac{\sigma_z}{\varepsilon_z}, \quad (11)$$

که  $\sigma_z$  تنش محوری و  $E_s$  مدول یانگ استاتیک هستند و در سامانه متریک (SI)، برحسب پاسکال (Pa) بیان می‌شوند.  $\varepsilon_z$  کرنش محوری و پارامتری بدون بُعد است. با نصب کرنش‌سنج روی نمونه شماره KL-13، تغییرات طولی نمونه در اثر اعمال تنش اندازه‌گیری، و با استفاده از رابطه (۱۱) مقادیر  $E_s$  در فشارهای متفاوت محاسبه شد. شکل ۹ تغییرات  $E_s$  با فشار همه‌جانبه را نشان می‌دهد.

همان‌گونه که در شکل ۹ ملاحظه می‌شود، روند کلی تغییرات  $E_s$  با فشار همه‌جانبه مشابه روند تغییرات سرعت امواج کشسان با فشار همه‌جانبه است و در فشارهای کم و تا حدود ۱۵ مگاپاسکال، بسته شدن ترک‌ها به سهولت صورت گرفته و روند افزایش  $E_s$  با افزایش فشار، سریع و غیرخطی است. در فشارهای همه‌جانبه بالاتر، سنگ به تراکم نسبی رسیده و افزایش  $E_s$  با سرعت کمتری دنبال شده و منحنی تغییرات  $E_s$  با فشار خطی شده است.



شکل ۱۱. تأثیر فشار همه‌جانبه بر نسبت مدول یانگ دینامیکی به استاتیک در سنگ آهک سروک.

این روابط برای نمونه‌های سنگ آهک مورد آزمایش به‌دست آمد. براساس ضرایب به‌دست آمده از رابطه (۹)، سرعت امواج تراکمی و بُرشی در فشار جوّ به روش برون‌یابی پیش‌بینی، و با مقادیر اندازه‌گیری شده از آزمایش فراصوتی معمولی مقایسه شدند. نتایج نشان می‌دهد که سرعت امواج تراکمی و بُرشی اندازه‌گیری شده و پیش‌بینی شده در فشار جوّ، بسیار به یکدیگر نزدیک هستند. بنابراین با استفاده از نتایج آزمایش فراصوتی تحت فشار و محاسبه ضرایب منحنی سرعت-فشار، امکان پیش‌بینی سرعت امواج تراکمی و بُرشی در فشار جوّ با دقت زیادی امکان‌پذیر است که در مقایسه با پژوهش‌های اخیر، یک گام اساسی برای برآورد بهتر و منطقی‌تر مقاومت فشاری تک‌محوره در تحقیقات ژئومکانیک مخازن محسوب می‌شود.

با توجه به ارتباط مستقیم سرعت امواج کشسان با مدول یانگ دینامیکی ( $E_d$ )، این پارامتر نیز همانند سرعت امواج کشسان با افزایش فشار همه‌جانبه افزایش می‌یابد. نتایج، نشان‌دهنده افزایش مدول یانگ استاتیک ( $E_s$ ) با افزایش فشار است و همانند سرعت امواج، روند افزایشی آن در فشارهای کمتر از ۱۵ مگاپاسکال زیاد است و حالت غیرخطی دارد که در فشارهای بالاتر این روند خطی می‌شود.

ترک‌های موجود در سنگ بسته شده و تغییرات سرعت با فشار در بالاتر از آن خطی می‌شود. بر همین اساس می‌توان نتیجه گرفت که فشار همه‌جانبه برویژگی‌های دینامیکی و استاتیک سنگ تأثیر قابل‌ملاحظه‌ای می‌گذارد. در فشار بحرانی و بالاتر از آن، این تأثیر کاهش می‌یابد و روند تغییرات از حالت سریع و غیرخطی، به حالت کُند و خطی تبدیل می‌شود. بنابراین به منظور پیش‌بینی  $E_s$  از  $E_d$ ، باید نسبت آنها در فشارهای گوناگون مخزن براساس رابطه (۱۳) به‌دست آید و آن‌گاه به کمک نگار صوتی چاه،  $E_s$  سازند پیش‌بینی شود.

## ۶ نتیجه‌گیری

با افزایش فشار همه‌جانبه، که به نوعی نشان‌دهنده افزایش عمق لایه‌ها است، سرعت امواج کشسان در سنگ افزایش می‌یابد. در نمونه‌های مورد آزمایش، فشار همه‌جانبه بحرانی ۱۵ مگاپاسکال تشخیص داده شد که تا قبل از آن مقادیر زیادی از منافذ سنگ در اثر اعمال فشار بسته شدند. در فشارهای کمتر از ۱۵ مگاپاسکال، تراکم‌پذیری نمونه‌های سنگ آهک سروک زیاد است و با بسته شدن مقدار زیادی از ریزترک‌ها، افزایش غیرخطی در سرعت سنگ مشاهده می‌شود که در فشارهای بالاتر این روند خطی می‌شود. دو رابطه تجربی (۴) و (۹) بیانگر ارتباط سرعت امواج کشسان با فشار همه‌جانبه هستند که ضرایب

seismic velocity, effective pressure, and clay content in sandstones: *Geophysics*, **54**, 82–89.

Fjaer, E., Holt, R. M., Horsrud, P., Raaen, A. M., and Risnes, R., 2008, *Petroleum Related Rock Mechanics*: 2nd Ed, Amsterdam, Elsevier.

Gangi, A. F., and Carlson, R., 1996, An asperity-deformation model for effective pressure: *Tectonophysics*, **256**, 241–251.

Ji, S. C., Wang, Q., Marcotte, D., Salisbury, M. H., Xu, Z., 2007, P wave velocities, anisotropy and hysteresis in ultrahigh- pressure metamorphic rocks as a function of confining pressure: *Journal of Geophysical Research*, **112**, B09204, doi: 10.1029/2006JB004867.

Jizba, D. L., 1991, *Mechanical and Acoustical Properties of Sandstone and Shales*: PhD thesis, University of Stanford.

Johnson, P. A., and Rasolofosaon, P. N., 1996, Nonlinear elasticity and stress-induced anisotropy in rocks: *J. Geophys. Res.*, **101**, 3113–3124.

Kaselow, A., and Shapiro, S., 2004, Stress sensitivity of elastic moduli and electrical resistivity in porous rocks: *J. Geophys. Eng.*, **1**, 1–11.

Mavko, G., Mukerji, T., and Dvorkin, J., 2009, *The Rock Physics Handbook, Tools for Seismic Analysis in Porous Media*: Cambridge University Press.

Mavko, G., Mukerji, T., and Godfrey, N., 1995, predicting stress-induced velocity anisotropy in rocks: *Geophysics*, **60**, 1081–1087.

Sarkar, D., Bakulin, A., and Krantz, R. L., 2003, Anisotropic inversion of seismic data for stressed media, theory and a physical-modeling study on Berea sandstone: *Geophysics*, **68**, 690–704.

Wang, Q., Ji, S. C., Salisbury, M. H., Pan, M. B., Xia, B., and Xu, Z. Q., 2005, Pressure dependence and anisotropy of P-wave velocities in ultrahigh-pressure metamorphic rocks from the Dabie-Sulu orogenic belt (China), Implications for seismic properties of sub ducted slabs and origin of mantle reflections: *Tectonophysics*, **398**, 67– 99.

Walsh, J., and Brace, W., 1966, Elasticity of rock: a review of some recent theoretical studies: *Rock Mechanics and Engineering Geology*, **4**, 283 – 297.

Wepfer, W. W., and Christensen, N. I., 1991, A seismic velocity-confining pressure relation, with applications: *Int. J. Rock Mech. Min. Sci. Geomech. Abstr.*, **28**, 451– 456.

منحنی تغییرات نسبت  $E_d/E_s$  با فشار همه‌جانبه، نشان‌دهنده کاهش نمایی این نسبت با افزایش فشار و بیانگر تاثیر بیشتر فشار بر  $E_s$  نسبت به  $E_d$  است. در فشارهای کمتر از ۱۵ مگاپاسکال، نسبت بین این دو پارامتر با سرعت بیشتری کاهش می‌یابد و در فشارهای بالاتر روند کاهشی آن با شدت کمتری دنبال شده و نسبت بین آنها به واحد نزدیک می‌شود. بنابراین برای پیش‌بینی پارامترهای دینامیکی از داده‌های استاتیکی، تعیین نسبت بین آنها در فشارهای متفاوت ضروری است.

### تشکر و قدردانی

مولفان مراتب تشکر و قدردانی صمیمانه خود را از مدیریت و کارشناسان شرکت ملی مناطق نفت‌خیز جنوب به‌خصوص واحد پژوهش و توسعه به‌خاطر در اختیار قرار دادن داده‌های میدانی و مغزه‌های مربوط به سنگ مخزن و پشتیبانی مالی بیان می‌دارند.

### منابع

Anselmetti, F. S., and Eberli, G. P., 1993, Controls on sonic velocity in Carbonates: *PAGEOPH*, **141**, 287– 323.

Asef, M. R., and Reddish, D. J., 2001, The impact of confining stress on the rock mass deformation modulus: *Géotechnique*, **52**(4), 235 –241.

Carcione, J., and Tinivella, U., 2001, The seismic response to overpressure: a modelling study based on laboratory, well and seismic data: *Geophys. Prospect*, **49**, 523–39.

Chang, C., Zoback, M. D., and Khaksar, A., 2006, Empirical relations between rock strength and physical properties in sedimentary rocks: *Journal of Petroleum Science and Engineering*, **51**, 223–237.

Cheng, C. H., and Johnston, D. H., 1981, Dynamic and static moduli: *Geophys. Res. Let.*, **8**, 39-42.

Duffy, J., and Mindlin, R., 1957, Stress-strain relations and vibrations of a granular medium: *J. Appl. Mech.*, **24**, 585–293.

Eberhart-Phillips, D., Han, D-H., and Zoback, M. D., 1989, Empirical relationship among