

شبیه‌سازی عددی امواج پوانکاره با استفاده از روش‌های فشرده مرکزی و یک‌سویه

مسیب ملکی^۱، سرمد قادر^{۲*} و اصغر بهلولی^۳

^۱ دانشجوی کارشناسی ارشد اقیانوس‌شناسی فیزیکی، گروه فیزیک فضا، موسسه ژئوفیزیک دانشگاه تهران، ایران

^۲ استاد گروه فیزیک فضا، موسسه ژئوفیزیک دانشگاه تهران، ایران

^۳ استادیار گروه فیزیک فضا، موسسه ژئوفیزیک دانشگاه تهران، ایران

(دریافت: ۱۴۰۱/۱۰/۱۸، پذیرش: ۱۴۰۲/۰۴/۰۳)

چکیده

چندین روش عددی برای حل معادلات آب کم‌عمق خطی معرفی شده‌اند که انتشار امواج پوانکاره را در دامنه متناهی یک‌بعدی توصیف می‌کنند. برای این مسئله یک راه‌حل تحلیلی شناخته شده است که با ارتفاع اولیه ناپیوسته اجرا می‌شود و امکان ارزیابی دقت و استحکام هر روش عددی و به‌ویژه توانایی آنها را در تشخیص ناپیوستگی‌های مسیر بدون نوسانات کاذب فراهم می‌کند. کار حاضر به بررسی و اعمال روش‌های تفاضل متناهی فشرده مرکزی و یک‌سویه برای حل عددی معادلات حاکم بر امواج پوانکاره می‌پردازد. برای این منظور، گسسته‌سازی مکانی با روش‌های فشرده مرکزی و یک‌سویه و گسسته‌سازی زمانی با روش رونگ-کوتا ارائه می‌شود. ابتدا معادله فرارفت یک‌بعدی که حل تحلیلی دارد، با استفاده از روش‌های فوق گسسته‌سازی و عملکرد و دقت عددی روش‌ها سنجیده می‌شود. سپس معادلات حاکم بر امواج پوانکاره با استفاده از روش‌های مذکور حل عددی می‌شود و برای دو شرط اولیه که نقاط ناپیوسته دارند، نتایج مقایسه می‌شود. در نهایت، حل عددی روش‌های فشرده مرکزی و یک‌سویه با یکدیگر مقایسه و نتایج آن تجزیه و تحلیل می‌شود. روش‌های فشرده مرکزی و یک‌سویه در تشخیص و شناسایی ناپیوستگی‌های مسیر به‌خوبی عمل می‌کنند. از بین روش‌های به‌کارگرفته‌شده، روش فشرده یک‌سویه مرتبه پنجم خطای برش مرتبه پنجم دارد و همچنین ضریب عددی قبل خطای برش آن عددی بسیار کوچک‌تر است که نسبت به دیگر روش‌های استفاده‌شده خطای کمتر و در نتیجه، دقت عددی بیشتری دارد.

واژه‌های کلیدی: امواج پوانکاره، روش فشرده مرکزی، روش فشرده یک‌سویه، دقت عددی

۱ مقدمه

حرکت در اقیانوس طیف وسیعی از مقیاس‌های زمانی و مکانی را پوشش می‌دهد؛ گردش‌های بزرگ مقیاس سرعت‌هایی در حدود یک متر بر ثانیه دارند و مقیاس‌های زمانی می‌توانند به اندازه صدها سال بزرگ باشند. سرعت فاز امواج گرانی-لختی (امواج پوانکاره)، که سریع منتشر می‌شوند، در حدود صدها متر بر ثانیه و خیلی کوچک‌تر از مقیاس زمانی دیگر فرایندهای اقیانوسی است. اختلاف زیاد بین مقیاس‌های زمانی فرایندهای اقیانوسی چالشی در مدل‌سازی عددی اقیانوس محسوب می‌شود (هالبرگ، ۱۹۹۷).

امواج پوانکاره زمانی تولید می‌شوند که عدد راسبی کوچک باشد و اثر چرخش زمین در نظر گرفته شود. در این شرایط نیروهای گرانی و کوریولیس می‌توانند با هم به‌عنوان نیروی بازگرداننده عمل کنند. این امواج که در اساس امواج گرانی هستند و طول موج بلند دارند، تحت تأثیر چرخش زمین قرار می‌گیرند. برای مطالعه این امواج، باید عبارت نیروی کوریولیس در معادلات حاکم حفظ شود. از آنجایی که امواج پوانکاره طول موج‌هایی دارند که چرخش زمین بر آنها اثر می‌گذارد، می‌توان فرض کرد که آنها در تعادل آب‌ایستایی هستند (بکرز و دلیرسنایدر، ۱۹۹۳). اقیانوس‌ها امواج پوانکاره خارجی و داخلی دارند. برای جلوگیری از انتشار امواج پوانکاره خارجی (فشارورد) می‌توان از یک مرز سخت استفاده کرد. از طرف دیگر، امواج پوانکاره داخلی (کژفشار) هنگامی در دریاهای چینه‌بندی‌شده قوی تولید می‌شوند که جابه‌جایی سطوح چگالی رخ دهد و باعث آزاد شدن انرژی شود. در این حالت یک سیگنال قوی در همه مدل‌های معادلات امواج فوق حاکم است. امواج پوانکاره در فضای بسامدی بین مقادیر محلی پارامتر کوریولیس f و بسامد پایداری ایستایی N محدود می‌شوند (هوگتون و همکاران، ۱۹۶۶ و هیگدون و سزویکه، ۱۹۹۷).

حرکت‌های اقیانوسی در مقیاس بزرگ تقریباً از تعادل

زمینگرد پیروی می‌کنند. هنگامی که بی‌توازن رخ می‌دهد، تعادل زمینگرد با استفاده از امواج پوانکاره احیا می‌شود (گیل، ۱۹۸۲). در مدل‌هایی که امکان وجود امواج پوانکاره را فراهم می‌کنند، نشان دادن دقیق آن امواج از اهمیت فوق‌العاده‌ای برخوردار است. شایان ذکر است این تحقیق شباهت‌های زیادی با روش کلاسیک تنظیم زمینگرد دارد که در ابتدا راسبی (۱۹۳۸) آن را مطالعه کرد و گیل (۱۹۷۶) قسمت خطی و کو و پولوانی (۱۹۹۶) قسمت غیرخطی آن را بررسی کردند. معادلات یک‌بعدی به‌دست‌آمده با انتخاب مقیاس‌های جدید برای زمان، مکان، ارتفاع و سرعت بی‌بعد می‌شوند. معادلات پوانکاره حل تحلیلی دارند. در این مطالعه با به‌کارگیری روش‌های عددی برای حل معادلات فوق و مقایسه آن با حل تحلیلی، دقت عددی روش‌ها سنجیده می‌شود. مشکل اساسی در حل عددی این معادلات، وجود ناپیوستگی‌ها در کمیت ارتفاع سطح اولیه حرکت است؛ بنابراین هر روش عددی باید بر اساس توانایی در شناسایی و تشخیص این ناپیوستگی‌ها ارزیابی شود.

لورانت و همکاران (۲۰۰۶) این معادلات را با روش‌های مختلفی از جمله گالرکین پیوسته و ناپیوسته و همچنین روش گالرکین-ریمان ناپیوسته حل کردند. آنها به این نتیجه رسیدند که روش گالرکین پیوسته، در زمان‌های ابتدایی انتگرال‌گیری نوسانات کمتر و دقت عددی بیشتری دارد. همچنین با گذشت زمان انتگرال‌گیری، نوسانات بیشتر و دقت آن کمتر می‌شود و با افزایش نقاط شبکه، نوسانات کاذب بیشتر می‌شوند. روش گالرکین ناپیوسته شبیه حالت پیوسته است، اما در تشخیص نقاط ناپیوسته بهتر عمل می‌کند. این دو روش در ابعاد بالاتر نیز کارایی دارند. روش ریمان-گالرکین ناپیوسته در شناسایی نقاط ناپیوسته عملکرد خوبی دارد و همچنین با افزایش تعداد نقاط شبکه در مقایسه با دو روش قبلی، خطای محاسباتی کمتری از خود نشان می‌دهد و دقت بیشتری دارد، اما نمی‌توان آن را به ابعاد بالاتر بسط داد.

یکی از زمینه‌های مورد توجه در ارتباط با حل عددی معادلات حاکم بر شاره‌ها، افزایش دقت عددی شبیه‌سازی‌ها و پیش‌بینی‌ها است. روش‌های تفاضل متناهی از روش‌های عددی رایج و پرکاربرد هستند. یکی از سنتی‌ترین روش‌ها، روش تفاضل متناهی مرتبه دوم مرکزی است و بسیاری از مدل‌های پیش‌بینی و عملیاتی عددی از روش مذکور سود می‌برند، ولی در سال‌های اخیر محققان بسیاری در پی روش‌های جایگزین با دقت زیاد و هزینه محاسباتی کم جهت افزایش دقت شبیه‌سازی هستند. از جمله این روش‌ها می‌توان به روش فشرده اشاره کرد. اغلب روش‌های فشرده از نوع مرکزی هستند که معمولاً از سه نقطه در فرمول‌بندی روش تفاضل متناهی مربوط به این روش‌ها بهره می‌برند. دقت این روش بیشتر از روش مرتبه دوم مرکزی است و در مواردی که راه‌حل دقیق وجود دارد، روش فشرده مرتبه چهارم نشان داده است که تحت انواع شرایط مرزی اعمال شده پایدار است و می‌توان با توجه به محدودیت‌های ممکن از شکل ماتریس سه‌قطری استفاده کرد. در این ماتریس درایه‌های قطرهای دیگر صفر است و به راحتی با استفاده از الگوریتم توماس حل می‌شود (هیرش، ۱۹۷۵ و لوله، ۱۹۹۲).

در زمینه مکانیک شاره‌ها در حوزه دینامیک شاره‌های ژئوفیزیکی نیز از روش‌های فشرده مرکزی استفاده شده است. از کارهای انجام شده در کشور درباره شاره‌های جوی و اقیانوسی که در آنها از روش‌های فشرده استفاده شده است می‌توان برای مثال به مطالعه اصفهانیان و قادر (۱۳۸۲)، قادر و همکاران (۱۳۸۴)، محب‌الحجه و دریچل (۲۰۰۷)، قادر و همکاران (۲۰۰۹) و قادر و نوردشتروم (۲۰۱۵) اشاره کرد.

تولستیخ (۱۹۷۳) ایده‌هایی را برای اولین بار درباره روش‌های فشرده یک‌سویه پیشنهاد کرد. این ایده‌ها در حین حل برخی از مسائل مربوط به حرکت اجسام در ارتفاع زیاد به وجود آمدند. اواسط دهه شصت میلادی، زمانی که

تولستیخ دانشجوی کارشناسی ارشد مؤسسه فیزیک و فناوری مسکو بود، اولین تلاش‌ها را برای حل عددی این نوع مسائل کرد و پیشنهاد داد معادلات ناویر-استوکس با روش عددی حل شود. وی از چندجمله‌ای‌های مرتبه بالا برای گسسته‌سازی معادلات دیفرانسیل به شکل واگرا استفاده و روش جدیدی ابداع کرد که شامل دو بخش تولید شبکه‌های تطبیقی (سازگار) و روش‌های فشرده پادجریان‌سوی مرتبه سوم بود. از روش‌های تطبیقی وی برای حل عددی چندین مسئله CFD در سال‌های بعد استفاده شد، اما توجه اصلی به توسعه بیشتر روش‌های مرتبه سوم معطوف شد. بسیاری از نسخه‌های این روش‌ها بررسی شدند. به موازات تلاش‌های نظری، برای مسائل مختلف دینامیک شاره‌ها که با معادلات ناویر-استوکس توصیف شده‌اند، مجموعه بزرگی از آزمایش‌های عددی انجام شد. علاوه بر جریان‌های تراکم‌پذیر، جریان‌های متلاطم توصیف شده با بسیاری از معادلات مدل‌های نیمه‌تجربی، جریان‌های چینه‌بندی و حرکت امواج سطحی را نیز می‌توان در زمره نمونه‌هایی ذکر کرد که در آنها از روش‌های فشرده یک‌سویه مرتبه سوم استفاده شده است. در تولستیخ (۱۹۹۴) به‌طور خاص خانواده‌های جدید مرتبه سوم و همچنین روش‌های فشرده یک‌سویه مرتبه پنجم معرفی و با موفقیت از آنها استفاده شده است. این روش‌ها مزیت‌هایی دارند و می‌توان از آنها به گونه‌ای مؤثر برای حل عددی مسائل مختلف در فیزیک استفاده کرد. مرتبه بالای تقریب که به دقت زیاد در نتایج و حل عددی منجر می‌شود و اهمیت سه نقطه‌ای الگو که فرمول‌بندی شرایط مرزی تفاضلی را تسهیل می‌کند، ما را قادر می‌سازند تا از آنها برای یافتن راه‌حل‌های ناپیوسته یا به سرعت در حال تغییر استفاده کنیم. این روش‌ها توانایی زیادی در شبیه‌سازی عددی میدان‌هایی با ناپیوستگی و گرادیان شدید دارند. همچنین امکان افزایش بیشتر در مرتبه فرد از روش‌های یک‌سویه وجود دارد بدون اینکه سبب بروز مشکلی اساسی شود (تولستیخ، ۱۹۸۵).

در روش‌های با گام زمانی هستند. مشابه بخش قبلی، جزئیات روش فوق در تولستیخ (۱۹۹۴) ذکر شده است و تنها فرمول‌بندی روش فوق به صورت زیر بیان می‌شود:

(۲)

$$\frac{5}{12} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{i-1} + \frac{8}{12} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_i - \frac{1}{12} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{i+1} = \frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta x}$$

رابطه (۲) روش فشرده یک‌سویه مرتبه سوم پیشرو است. برای حالت پسرو می‌توان نوشت:

(۳)

$$-\frac{1}{12} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{i-1} + \frac{8}{12} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_i + \frac{5}{12} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{i+1} = \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta x}$$

برای استفاده از روش‌های فشرده یک‌سویه مرتبه سوم در معادلات خطی، زمانی که ثابت عددی مشتق مکانی عددی منفی باشد، رابطه پیشرو (رابطه ۲) و زمانی که ثابت عددی مثبت باشد، رابطه پسرو (رابطه ۳) استفاده می‌شود.

۲-۳ روش فشرده یک‌سویه مرتبه پنجم

این بخش به تقریب‌های فشرده مرتبه پنجم می‌پردازد که با تفاضل‌های پادجریان سو ایجاد شده‌اند. خواص اصلی آنها بسیار شبیه به روش فشرده یک‌سویه مرتبه سوم است که در قسمت قبل توضیح داده شد؛ با این حال این تقریب‌ها خطاهای برش مرتبه بالاتر و ضرایب عددی کوچک دارند. این موضوع باعث می‌شود به گونه درخور توجهی دقیق‌تر از هر تقریب پنج نقطه‌ای معمولی باشند. روش تفاضلی پادجریان سوی مرتبه پنجم را تولستیخ (۱۹۸۵) ارائه کرد.

جزئیات مربوط به فرمول‌بندی روش فشرده یک‌سویه مرتبه پنجم را تولستیخ (۱۹۸۵) به صورت مشروح ذکر کرده است و در اینجا فقط فرمول‌بندی آن خلاصه‌وار ذکر می‌شود:

$$11 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{i+2} + 238 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{i+1} +$$

هدف پژوهش حاضر، حل عددی معادلات حاکم بر امواج پوانکاره با استفاده از روش‌های فشرده مرکزی و یک‌سویه با دو شرط اولیه هموار و شیب‌دار است. شرط‌های اولیه به کاررفته در مسیر ناپیوستگی دارند و روش‌های فوق باید توانایی تشخیص و شناخت این ناپیوستگی‌ها را داشته باشند.

۲ روش‌های فشرده

۲-۱ روش فشرده مرکزی مرتبه چهارم

در روش فشرده مرکزی مرتبه چهارم، در هر نقطه شبکه نه تنها مقدار تابع مجهول است بلکه مقدار مشتق‌های تابع نیز مجهول فرض می‌شوند؛ بنابراین روابط مربوط به این روش شامل خود تابع و مشتق‌های اول آن در سه نقطه متوالی است. برای هر کدام از این مجهولات می‌توان یک دستگاه معادلات جبری تشکیل داد و آن را با وارون کردن یک دستگاه معادلات سه‌قطری حل کرد. این رابطه به کمک رابطه عمومی هرमित و با استفاده از بسط سری تیلور تابع u برای مشتق اول به دست می‌آید. جزئیات مربوط به نحوه به دست آوردن فرمول‌بندی روش فشرده مرکزی مرتبه چهارم در تولستیخ (۱۹۹۴) نوشته شده است و در اینجا فقط فرمول‌بندی آن خلاصه‌وار ذکر می‌شود. رابطه فشرده مرکزی مرتبه چهارم به شکل زیر است:

(۱)

$$\frac{1}{6} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{i-1} + \frac{2}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_i + \frac{1}{6} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{i+1} = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta x}$$

که Δx فاصله شبکه‌ای و u تابعی هموار است.

۲-۲ روش فشرده یک‌سویه مرتبه سوم

در این بخش روش تفاضلی فشرده یک‌سویه مرتبه سوم بیان می‌شود که اتفاقاً نقطه شروع توسعه روش‌های فشرده غیرمرکزی است. تقریب‌های فشرده یک‌سویه در اینجا بیشتر ابزاری با دقت زیاد برای گسسته‌سازی مشتقات مکانی

$$2q_2 + 2q_3 + q_4) \quad (9)$$

که Δt گام زمانی، n تراز زمانی و q_1 تا q_4 متغیرهای کمکی هستند (دوران، ۲۰۱۰).

۴ بررسی دقت و عملکرد روش‌ها

در این بخش به بررسی دقت روش‌های فشرده یک‌سویه در مقایسه با روش فشرده مرکزی مرتبه چهارم و روش مرتبه دوم مرکزی همراه با روش گسسته‌سازی زمانی رونگ کوتاه مرتبه چهارم پرداخته می‌شود. از روش‌های یادشده برای حل معادله یک‌بعدی فرارفت خطی استفاده می‌شود که حل تحلیلی دارد. برای آنکه بتوان درک مناسب‌تری از میزان تفاوت دقت بین روش‌های مورد بررسی به دست آورد، در اینجا از یک نُرُم برای محاسبه میزان خطای هریک از روش‌ها استفاده می‌شود.

جهت محاسبه مقدار خطا در روش‌های مختلف عددی برای معادله خطی فرارفت از نُرُم مربعی استفاده می‌شود:

$$l_2(u) = \frac{[\sum_{i=1}^{N_x} (|\tilde{u}_i - u_i|^2)]^{\frac{1}{2}}}{[\sum_{i=1}^{N_x} (|u_i|^2)]^{\frac{1}{2}}} \quad (10)$$

که N_x تعداد نقاط شبکه، u_i مقدار دقیق تابع در هر نقطه روی شبکه و \tilde{u}_i مقدار به دست آمده از روش حل عددی مورد استفاده در هر نقطه i است. نُرُم مربعی، انحراف معیار پاسخ‌های عددی از جواب‌های دقیق را در نقاط شبکه نشان می‌دهد.

معادله فرارفت خطی یک‌بعدی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (11)$$

معادله فرارفت یک‌بعدی فوق با تندی ثابت $c = 0.2$ m/s در ناحیه $0 \leq x \leq Q$ و $Q = 1$ ، با تعداد نقاط شبکه N_x و شرایط اولیه زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$u(x, 0) = \begin{cases} 1 & , \frac{6}{10} \leq x \leq \frac{8}{10} \\ 0 & , \text{ other wise} \end{cases} \quad (12)$$

$$1392 \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i + 1138 \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i-1} + 101 \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i-2} = \frac{36}{\Delta x} [u_{i+2} + 18u_{i+1} + 30u_i - 38u_{i-1} - 11u_{i-2}] \quad (4)$$

رابطه (۴) روش فشرده یک‌سویه مرتبه پنجم پیشرو است. به طور مشابه برای حالت پسرو نیز می‌توان نوشت:

$$101 \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i+2} + 1138 \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i+1} + 1392 \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i + 238 \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i-1} + 11 \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i-2} = \frac{36}{\Delta x} [11u_{i+2} + 38u_{i+1} - 30u_i - 18u_{i-1} - u_{i-2}] \quad (5)$$

مشابه بخش قبلی، زمانی که ثابت عددی مشتق مکانی عددی مثبت باشد، از رابطه پیشرو (رابطه ۴) و زمانی که ثابت عددی منفی باشد، از رابطه پسرو (رابطه ۵) استفاده می‌شود.

۳ روش گسسته‌سازی زمانی رونگ-کوتا مرتبه چهارم

روش گسسته‌سازی زمانی رونگ-کوتا (Runge-Kutta) مرتبه چهارم، روشی چهار مرحله‌ای است که در هر مرحله مقداری برای تابع مفروض u در یک گام زمانی میانی محاسبه و در مرحله بعد، در همان گام زمانی، این مقدار اصلاح می‌شود. با فرض بیان معادلات حاکم به صورت $\frac{\partial u}{\partial t} = F(u)$ ، روابط این روش برای تقریب بخش زمانی معادلات حاکم به شرح زیر است:

$$q_1 = \Delta t F(u^n) \quad u_1 = u^n + \frac{1}{2} q_1, \quad (6)$$

$$q_2 = \Delta t F(u_1) \quad u_2 = u^n + \frac{1}{2} q_2, \quad (7)$$

$$q_3 = \Delta t F(u_2) \quad u_3 = u^n + q_3, \quad (8)$$

$$q_4 = \Delta t F(q_3) \quad u^{n+1} = u^n + \frac{1}{6} (q_1 +$$

در جدول ۱ خطای کلی به دست آمده به کمک نرم مربعی ۱۲ با شرط اولیه (۱۲) برای روش های فشرده مرکزی و یک سویه با گسسته سازی زمانی رونگ-کوتا مرتبه چهارم در زمان $t=1s$ نشان داده شده است. همان طور که مشاهده می شود، با افزایش تعداد نقاط شبکه، خطای روش ها کاهش می یابد. این جدول نشان می دهد روش فشرده یک سویه مرتبه پنجم نسبت به سایر روش ها خطای محاسباتی کمتری دارد. البته می توان مشاهده کرد که خطای روش های فشرده یک سویه مرتبه سوم و فشرده مرکزی مرتبه چهارم به یکدیگر نزدیک هستند. علت این موضوع آن است که شکل فرمول بندی این دو روش شبیه به هم و ماتریس ضرایب آنها سه قطری است و فقط ضرایب ماتریس با هم فرق می کند. در حل عددی جدول ۱ از شرط اولیه شوک (۱۲) استفاده شده است که یک تابع صاف و هموار است و باعث تولید نوسانات کاذب می شود؛ از این رو مقدار خطا افزایش و دقت روش ها کاهش می یابد.

$$u(x, 0) = \begin{cases} 9^4 \left[\left(x - \frac{5}{6} \right)^2 - \left(\frac{1}{9} \right)^2 \right]^2, & |x - \frac{5}{6}| \leq \frac{1}{9} \\ 0, & \text{other wise} \end{cases} \quad (13)$$

در مرز سمت چپ که با زمان ثابت است، از شرط $u(0, t) = 0$ استفاده شده و مرز سمت راست (مرز خروجی) باز فرض شده است (مشتق اول تابع مساوی صفر قرار داده می شود)؛ بنابراین شرط مرزی گرادیان صفر یعنی $\frac{\partial(Q, t)}{\partial x} = 0$ اعمال می شود (دوران، ۲۰۱۰).

معادله فرارفت خطی یک بعدی (۱۱) با شرایط اولیه (۱۲) و (۱۳) و شرایط مرزی بالا و روش های گسسته سازی مکانی متفاوت با تعداد نقاط شبکه ۳۲ و ۱۲۸ در مدت $t=1s$ ثانیه حل عددی و مقدار خطای روش ها با استفاده از نرم ۱۲ محاسبه می شود و نتایج با یکدیگر مقایسه می شوند. علت انتخاب زمان $t=1s$ آن است که شکل موج این معادله در این زمان از مرز سمت راست خارج می شود.

جدول ۱. مقایسه خطای کلی معادله فرارفت با روش رونگ-کوتا مرتبه چهارم برای تعداد نقاط شبکه متفاوت در زمان $t=1s$ با شرایط اولیه متفاوت.

| شرط اولیه شوک (۱۲) | | | | | |
|--------------------------|-----------------------|------------|------------------------|------------|------------------------|
| روش | گسسته سازی زمانی | تفکیک (Nx) | خطای کلی | تفکیک (Nx) | خطای کلی |
| مرتب دوم مرکزی | رونگ-کوتا مرتبه چهارم | ۳۲ | $9/42 \times 10^{-10}$ | ۱۲۸ | $6/35 \times 10^{-10}$ |
| فشرده مرتبه چهارم | رونگ-کوتا مرتبه چهارم | ۳۲ | $4/86 \times 10^{-10}$ | ۱۲۸ | $1/81 \times 10^{-10}$ |
| فشرده یک سویه مرتبه سوم | رونگ-کوتا مرتبه چهارم | ۳۲ | $5/61 \times 10^{-10}$ | ۱۲۸ | $1/21 \times 10^{-10}$ |
| فشرده یک سویه مرتبه پنجم | رونگ-کوتا مرتبه چهارم | ۳۲ | $1/94 \times 10^{-10}$ | ۱۲۸ | $8/63 \times 10^{-10}$ |
| شرط اولیه کله قندی (۱۳) | | | | | |
| مرتب دوم مرکزی | رونگ-کوتا مرتبه چهارم | ۳۲ | $4/55 \times 10^{-10}$ | ۱۲۸ | $2/85 \times 10^{-10}$ |
| فشرده مرکزی مرتبه چهارم | رونگ-کوتا مرتبه چهارم | ۳۲ | $2/49 \times 10^{-10}$ | ۱۲۸ | $1/66 \times 10^{-10}$ |
| فشرده یک سویه مرتبه سوم | رونگ-کوتا مرتبه چهارم | ۳۲ | $2/24 \times 10^{-10}$ | ۱۲۸ | $1/16 \times 10^{-10}$ |
| فشرده یک سویه مرتبه پنجم | رونگ-کوتا مرتبه چهارم | ۳۲ | $1/08 \times 10^{-10}$ | ۱۲۸ | $9/31 \times 10^{-10}$ |

کلی به دست آمده به کمک نرم مربعی ۱۲ برای روش های فشرده مرکزی و یک سویه با گسسته سازی زمانی رونگ-کوتا مرتبه چهارم و شرط اولیه (۱۳) در زمان $t=1s$ نشان داده شده است. مشابه قسمت بالایی جدول ۱ مشاهده

معادله فرارفت خطی یک بعدی (۱۱) یک بار دیگر با شرط اولیه (۱۳) که تابعی شیب دار بدون گوشه های تیز و صاف است و با روش های گسسته سازی مکانی متفاوت در مدت زمان $t=1s$ حل عددی می شود. در جدول ۱ خطای

می‌شوند. باید توجه داشت که در صورت حذف راستای y امواج به کلی نمی‌توانند وجود داشته باشند. چون حوزه در جهت y نامتناهی است، مسئله به حالت یک‌بعدی کاهش می‌یابد. البته حوزه در جهت x متناهی باقی می‌ماند $(-L/2 \leq x \leq L/2)$ و در نتیجه، معادلات پیشین در جهت x خلاصه می‌شوند:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - fv = -g \frac{\partial \eta}{\partial x}, \quad (17)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + fu = 0, \quad (18)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + h \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \quad (19)$$

برای اینکه بتوان معادلات (۱۷) تا (۱۹) را بی‌بعد کرد، باید مقیاس‌های مشخصه جدید $L, f^{-1}, Lh^{-1}f\eta_0$ و η_0 ، به ترتیب برای زمان، مکان، ارتفاع و سرعت لحاظ شوند. با استفاده از این مقیاس‌ها معادلات بی‌بعد شده زیر به دست می‌آیند:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - v = -\alpha^2 \frac{\partial \eta}{\partial x}, \quad (20)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u = 0, \quad (21)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \quad (22)$$

α نسبت شعاع تغییر شکل راسی به مقیاس طول یا شعاع تغییر شکل راسی بی‌بعد نامیده می‌شود:

$$\alpha = \frac{\sqrt{gh}}{fL} \quad (23)$$

معادلات فوق، معادلات حاکم بر امواج پوانکاره نامیده می‌شوند. توجه داشته باشید که معادلات پوانکاره برای $t=0$ و $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ تعریف شده‌اند. تکامل زمانی یک لایه شاره در ابتدا بی‌حرکت، همراه با ناپوستگی در شرط اولیه ارتفاع مطالعه می‌شود:

$$u(x, 0) = v(x, 0) = 0 \quad (24)$$

$$\eta(x, 0) = \text{sign}(x) = \begin{cases} -1 & -1/2 \leq x < 0 \\ 1 & 0 < x \leq 1/2 \end{cases} \quad (25)$$

همچنین همه آزمایش‌های عددی با $f = 10^{-4} \frac{1}{s}$ ، $g = 10 \text{ m/s}^2$ ، $h = 100 \text{ m}$ و $L = 10^6 \text{ m}$ انجام

می‌شود که با افزایش تعداد نقاط شبکه، خطای روش‌ها کاهش می‌یابد. قسمت پایین جدول ۱ نشان می‌دهد روش فشرده یک‌سویه مرتبه پنجم مانند شرط اولیه قبلی نسبت به سایر روش‌ها خطای محاسباتی کمتری دارد و دقیق‌تر عمل می‌کند. البته باز می‌توان مشاهده کرد که خطای روش‌های فشرده یک‌سویه مرتبه سوم و فشرده مرکزی مرتبه چهارم به یکدیگر نزدیک هستند. همچنین مقدار خطاهای محاسباتی نسبت به شرط اولیه (۱۲) کاهش پیدا کرده است. علت آن استفاده از شرط اولیه شیب‌دار (۱۳) است که باعث کاهش نوسانات کاذب و افزایش دقت روش‌ها می‌شود. روش‌های فشرده یک‌سویه نسبت به روش‌های مرکزی نوسانات کاذب کمتری در مسیر حرکت تولید می‌کنند.

۵ معادلات حاکم بر امواج پوانکاره

حال با توجه به تجربه‌ای که از آزمایش‌های عددی روش‌های فشرده مرکزی و یک‌سویه با معادله فرارفت خطی یک‌بعدی به دست آمده است، به حل عددی معادلات حاکم بر امواج پوانکاره در میدان ارتفاع اولیه همراه با ناپوستگی پرداخته می‌شود.

معادلات آب کم‌عمق خطی برای یک لایه کم عمق همگن ناوشکسان از یک شاره، روی صفحه f عبارت‌اند از:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - fv = -g \frac{\partial \eta}{\partial x}, \quad (14)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + fu = -g \frac{\partial \eta}{\partial y}, \quad (15)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + h \frac{\partial u}{\partial x} + h \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (16)$$

که u و v به ترتیب مؤلفه‌های سرعت در جهت x و y هستند. ضخامت لایه مرجع ثابت است و با h نشان داده می‌شود. η ارتفاع سطح آزاد را نشان می‌دهد و g شتاب گرانشی است. پارامتر کوریولیس f تحت تخمین صفحه f ثابت است.

در چارچوب این مقاله، فرض می‌شود حوزه در جهت y همگن است؛ بنابراین همه مشتقات نسبت به y حذف

شده‌اند منجر به $\alpha = \sqrt{10}/10$ می‌شود.

۵-۱ حل تحلیلی معادلات حاکم بر امواج پوانکاره

در اولین گام، راه‌حلی تحلیلی برای معادلات حاکم بر امواج پوانکاره (۲۰) تا (۲۲) ارائه می‌شود. از معادله (۲۰) نسبت به t و از معادله (۲۲) نسبت به x مشتق گرفته می‌شود:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial v}{\partial t} = -\alpha^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial t \partial x^2}, \quad (26)$$

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0. \quad (27)$$

از رابطه (۲۱) استفاده و به جای $\frac{\partial v}{\partial t}$ در رابطه (۲۶)، u جایگزین می‌شود. حال با استفاده از رابطه (۲۷) در رابطه (۲۶) معادله زیر به دست می‌آید:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + u = -\alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (28)$$

معادله (۲۸) می‌تواند با روش جداسازی متغیرها به صورت تحلیلی زیر حل شود:

$$u(x, t) = \sum_{j=1}^{\infty} H_j (-1)^{j+1} \frac{\alpha^2 k_j}{\omega_j} \sin(\omega_j t) \cos(k_j x), \quad (29)$$

$$v(x, t) = \sum_{j=1}^{\infty} H_j (-1)^{j+1} \frac{\alpha^2 k_j}{\omega_j^2} [\cos(\omega_j t) - 1] \cos(k_j x), \quad (30)$$

$$\eta(x, t) = \sum_{j=1}^{\infty} H_j (-1)^{j+1} \sin(k_j x) \left\{ 1 - \frac{\alpha^2 k_j^2}{\omega_j^2} [1 - \cos(\omega_j t)] \right\}, \quad (31)$$

که k_j عدد موج، ω_j دوره تناوب و $H_j = \frac{4(-1)^j}{k_j}$ است.

۵-۲ شرایط مرزی معادلات حاکم بر امواج

پوانکاره

در شبیه‌سازی عددی معادلات پوانکاره، دو نوع شرط مرزی نفوذناپذیری و مرز باز اعمال می‌شود. برای مؤلفه سرعت u شرط نفوذناپذیری لحاظ می‌شود. به عبارت دیگر، مقدار تابع در مرز سمت چپ و مرز سمت راست صفر باید باشد:

$$u(x = \pm 1/2, t) = 0 \quad (32)$$

برای مؤلفه سرعت v به اعمال شرایط مرزی نیازی

نیست؛ چون در معادلات حاکم بر امواج پوانکاره، مؤلفه سرعت v گسسته‌سازی مکانی ندارد، معادله آن تنها بر اساس مؤلفه u به دست می‌آید و خودبه‌خود شامل شرط نفوذناپذیری می‌شود.

برای مؤلفه ارتفاع سطح η ، شرط مرز باز در مرزهای سمت چپ و راست اعمال و مشتق اول تابع مساوی صفر فرض می‌شود؛ بنابراین از شرط مرزی گرادیان صفر استفاده می‌شود:

$$\frac{\partial(-1/2, t)}{\partial x} = \frac{\partial(1/2, t)}{\partial x} = 0 \quad (33)$$

برای محاسبه مقدار تابع η در مرزهای سمت چپ و راست از یک میان‌یابی خطی از تراز زمانی قبلی متناسب با مرتبه روش به کاررفته و رابطه زیر استفاده می‌شود:

$$\sum_{m=0}^p (-1)^m \left(\frac{p!}{m!(p-m)!} \right) u_m = 0 \quad (34)$$

که m عدد طبیعی، p مرتبه روش و u تابعی هموار است (دوران، ۲۰۱۰).

۵-۳ حل عددی معادلات حاکم بر امواج پوانکاره

در این بخش به حل عددی معادلات حاکم بر امواج پوانکاره با استفاده از روش‌های تفاضلی فشرده مرکزی و یک‌سویه پرداخته می‌شود. با تجربه‌ای که در بخش‌های قبلی با استفاده از این روش‌ها برای حل عددی معادله خطی فرارفت به دست آمد، اکنون نوبت به آن می‌رسد که مسئله به یک مدل واقعی‌تر، یعنی حل معادلات پوانکاره تعمیم داده شود.

۵-۳-۱ گسسته‌سازی معادلات پوانکاره با رینگ

کوتا مرتبه چهارم در زمان و مرتبه دوم مرکزی در مکان

برای گسسته‌سازی معادلات پوانکاره با روش‌های فوق، ابتدا معادلات (۲۰) تا (۲۲) در Δt ضرب می‌شود:

$$\Delta t \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta t \left[v - \alpha^2 \frac{\partial \eta}{\partial x} \right] \quad (35)$$

$$\Delta t \frac{\partial v}{\partial t} = -\Delta t u \quad (36)$$

غیرصفر داشته باشد. شرط اولیه تانژانت هذلولوی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\eta(x, 0) = \tanh(Rx) \quad (43)$$

که R پارامتر شیب است و کنترل می‌کند که چگونه انتقال شیب بین -1 و 1 باشد. هرچه R بزرگ‌تر باشد، این شرط اولیه به تابع پله‌ای نزدیک‌تر خواهد بود. حل عددی بالا با شرط اولیه تانژانت هذلولوی (۴۳)، پارامتر شیب $R=100$ ، $N_x=400$ و گام زمانی $\Delta t=0.001$ در زمان بی‌بعد $t=2$ تکرار و نتایج در شکل‌های ۱-ب، ۱-د و ۱-و نشان داده شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، نوسانات کاذب به شدت کاهش یافته و دقت روش بهتر شده است.

۲-۳-۵ گسسته‌سازی معادلات پوانکاره با رونگ کوتا مرتبه چهارم در زمان و فشرده مرکزی مرتبه چهارم در مکان

برای گسسته‌سازی معادلات پوانکاره (۲۰) تا (۲۲)، ابتدا معادلات یادشده بر اساس مشتق مکانی مرتب می‌شوند:

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{1}{\alpha^2} \left[v - \frac{\partial u}{\partial t} \right] \quad (44)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -u \quad (45)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial \eta}{\partial t} \quad (46)$$

رابطه‌های بالا در رابطه فشرده مرکزی مرتبه چهارم (۱) جایگذاری می‌شوند:

$$\frac{1}{6} \left[v_{i-1}^n - \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_{i-1}^n \right] + \frac{2}{3} \left[v_i^n - \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_i^n \right] + \frac{1}{6} \left[v_{i+1}^n - \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_{i+1}^n \right] = \frac{\alpha^2}{2\Delta x} [\eta_{i+1}^n - \eta_{i-1}^n] \quad (47)$$

$$\left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)_i^n = -u_i^n \quad (48)$$

$$\frac{1}{6} \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} \right)_{i-1}^n + \frac{2}{3} \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} \right)_i^n + \frac{1}{6} \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} \right)_{i+1}^n = -\frac{1}{2\Delta x} [u_{i+1}^n - u_{i-1}^n] \quad (49)$$

$$\Delta t \frac{\partial \eta}{\partial t} = -\Delta t \frac{\partial u}{\partial x} \quad (37)$$

حال با استفاده از رابطه $q_1 = \Delta t \frac{\partial u}{\partial t}$ در روش رونگ کوتا و گسسته‌سازی قسمت مکانی با روش مرتبه دوم مرکزی، روابط زیر به دست می‌آیند:

$$q_{1u} = \Delta t \left[v_i^n - \alpha^2 \frac{\eta_{i+1}^n - \eta_{i-1}^n}{2\Delta x} \right] \quad (38)$$

$$q_{1v} = -\Delta t (u_i^n) \quad (39)$$

$$q_{1\eta} = -\Delta t \left[\frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x} \right] \quad (40)$$

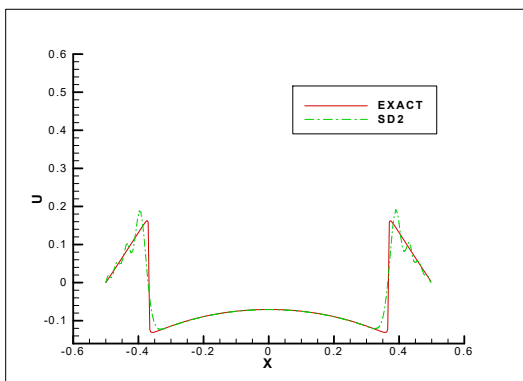
به‌طور مشابه و با توجه به رابطه‌های (۶) تا (۹) از روش رونگ- کوتا می‌توان متغیرهای کمکی q_2 ، q_3 و q_4 را محاسبه کرد. در نهایت، با اعمال شرایط مرزی نفوذناپذیری (۳۲) و شرط مرزی باز (۳۳) و استفاده از رابطه (۹)، مقادیر مؤلفه‌های معادلات پوانکاره در گام $n+1$ محاسبه می‌شود. مقادیر مرزی مؤلفه η در ابتدا و انتهای حوزه با استفاده از میان‌یابی خطی (۳۴) عبارت‌اند از:

$$i = 1 : \quad \eta_1^{n+1} = 2\eta_2^n - \eta_3^n \quad (41)$$

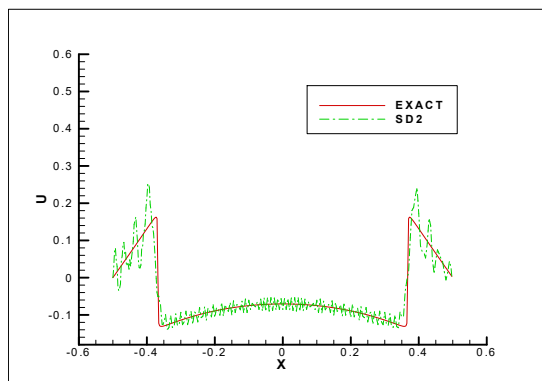
$$i = N_x : \quad \eta_{N_x}^{n+1} = 2\eta_{N_x-1}^n - \eta_{N_x-2}^n \quad (42)$$

در شکل‌های ۱-الف، ۱-ج و ۱-ه، حل عددی مؤلفه‌های معادلات حاکم بر امواج پوانکاره با استفاده از روش مرتبه دوم مرکزی در مکان و روش رونگ- کوتا مرتبه چهارم در زمان تحت تأثیر شرط اولیه پله‌ای (۲۵)، $N_x=400$ و گام زمانی $\Delta t=0.001$ در زمان بی‌بعد $t=2$ نشان داده شده است. راه‌حل تحلیلی با خط ممتد و راه‌حل عددی با خط چین مشخص شده است.

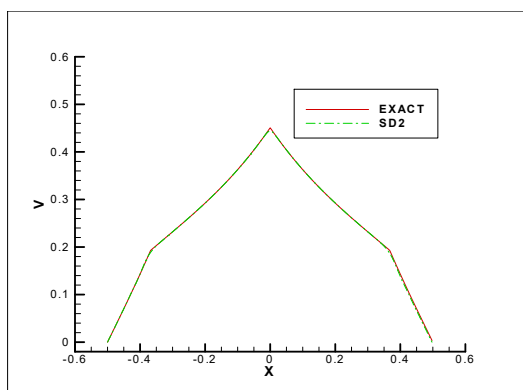
همان‌طور که در شکل‌ها مشاهده می‌شود، نوسانات کاذب زیادی وجود دارند. هرچه تعداد نقاط شبکه افزایش یابد و شبکه ظریف‌تر شود، نه تنها نوسانات کمتر نمی‌شوند، بلکه حل عددی پرنوسان‌تر نیز می‌شود. علت آن به شرط اولیه (۲۵) برمی‌گردد. شرط اولیه تابع پله‌ای شرطی صاف و هموار است که نوسانات کاذب تولید می‌کند؛ از این رو باید از شرط اولیه‌ای استفاده شود که گوشه‌هایی با گرادین



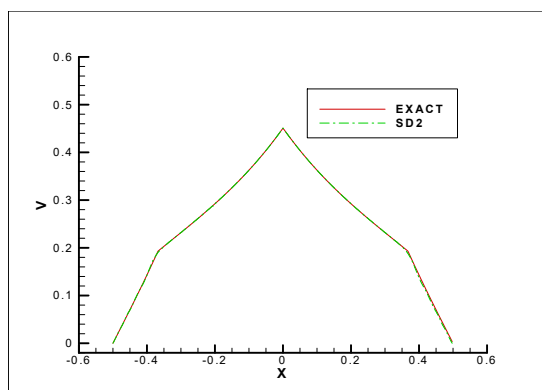
(ب)



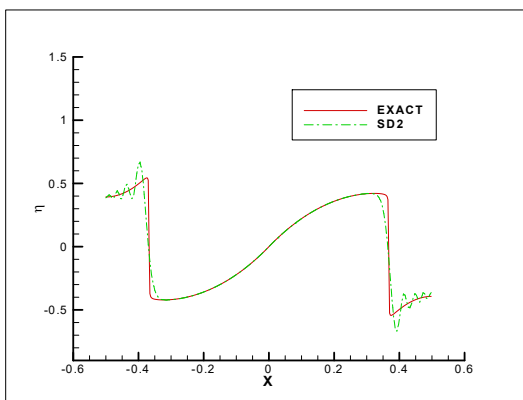
(الف)



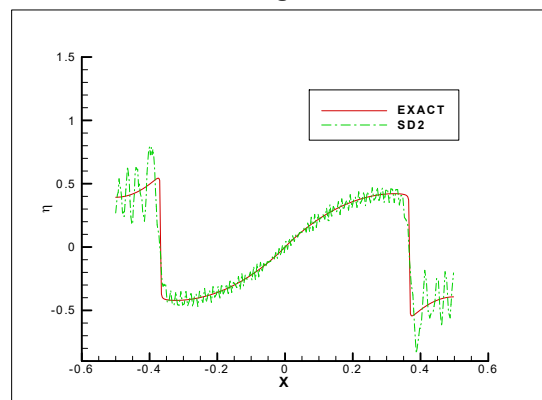
(د)



(ج)



(و)



(ه)

شکل ۱. حل عددی مؤلفه‌های معادلات حاکم بر امواج پوانکاره با روش رونگ- کوتا مرتبه چهارم در زمان و روش مرتبه دوم مرکزی در مکان در زمان بی‌بعد $t=2$ (الف) مؤلفه u با شرط اولیه پله‌ای (ب) مؤلفه u با شرط اولیه تانژانت هذلولوی (ج) مؤلفه v با شرط اولیه پله‌ای (د) مؤلفه v با شرط اولیه تانژانت هذلولوی (ه) مؤلفه η با شرط اولیه پله‌ای (و) مؤلفه η با شرط اولیه تانژانت هذلولوی.

داریم:

$$\frac{1}{6}(q_{1u})_{i-1}^n + \frac{2}{3}(q_{1u})_i^n + \frac{1}{6}(q_{1u})_{i+1}^n =$$

رابطه‌های (۴۷) تا (۴۹) در Δt ضرب می‌شوند و با توجه به رابطه $q_1 = \Delta t \frac{\partial \varphi}{\partial t}$ از روش رونگ- کوتا (رابطه ۹)

۵-۳-۳ گسسته‌سازی معادلات پوانکاره با رونگ کوتا مرتبه چهارم در زمان و فشرده یک‌سویه مرتبه سوم در مکان

برای گسسته‌سازی معادلات پوانکاره (۲۰) تا (۲۲)، از رابطه فشرده یک‌سویه پسرو (۲) استفاده می‌شود؛ زیرا مقدار α در رابطه (۲۰) عددی مثبت است. مشابه بخش قبل، روابط (۴۴) تا (۴۶) در رابطه (۲) جایگذاری و در Δt ضرب می‌شوند. با توجه به رابطه $q_1 = \Delta t \frac{\partial \varphi}{\partial t}$ از روش رونگ کوتا (۹) داریم:

$$\frac{5}{12}(q_{1u})_{i-1}^n + \frac{8}{12}(q_{1u})_i^n - \frac{1}{12}(q_{1u})_{i+1}^n = \Delta t \left[\frac{5}{12}v_{i-1}^n + \frac{8}{12}v_i^n - \frac{1}{12}v_{i+1}^n \right] - \frac{\alpha^2 \Delta t}{\Delta x} [\eta_{i+1}^n - \eta_i^n] \quad (53)$$

$$(q_{1v})_i^n = -\Delta t u_i^n \quad (54)$$

$$\frac{5}{12}(q_{1\eta})_{i-1}^n + \frac{8}{12}(q_{1\eta})_i^n - \frac{1}{12}(q_{1\eta})_{i+1}^n = -\frac{\Delta t}{\Delta x} [u_{i+1}^n - u_i^n] \quad (55)$$

پس از اعمال شرط مرزی نفوذناپذیری (۳۲) و شرط مرزی باز (۳۳) در روابط فوق، ضرایب روابط به‌دست‌آمده تشکیل ماتریس سه‌قطری می‌دهند که به‌راحتی مقادیر q_1 برای مؤلفه‌های u و η به‌دست می‌آیند. با استفاده از رابطه‌های رونگ-کوتا (۶) تا (۹) مشابه حالت q_1 می‌توان متغیرهای کمکی q_2, q_3, q_4 و q_4 را محاسبه کرد. مرزی مؤلفه η با استفاده از میان‌یابی خطی (۳۴) مشابه رابطه‌های (۴۱) و (۴۲) محاسبه می‌شوند و در نهایت، مقادیر مؤلفه‌های u, v و η در گام $n+1$ به‌دست می‌آیند.

در شکل‌های ۳-الف، ۳-ج و ۳-ه حل عددی مؤلفه‌های معادلات حاکم بر امواج پوانکاره با استفاده از روش فشرده یک‌سویه مرتبه سوم در مکان و روش رونگ کوتا مرتبه چهارم در زمان تحت شرط اولیه پله‌ای (۲۵)،

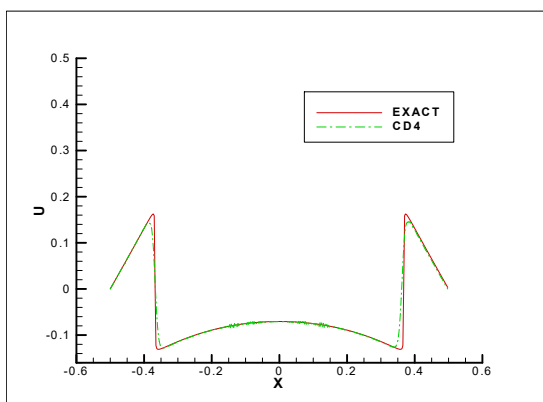
$$\Delta t \left[\frac{1}{6}v_{i-1}^n + \frac{2}{3}v_i^n + \frac{1}{6}v_{i+1}^n \right] - \frac{\alpha^2 \Delta t}{2\Delta x} [\eta_{i+1}^n - \eta_{i-1}^n] \quad (50)$$

$$(q_{1v})_i^n = -\Delta t u_i^n \quad (51)$$

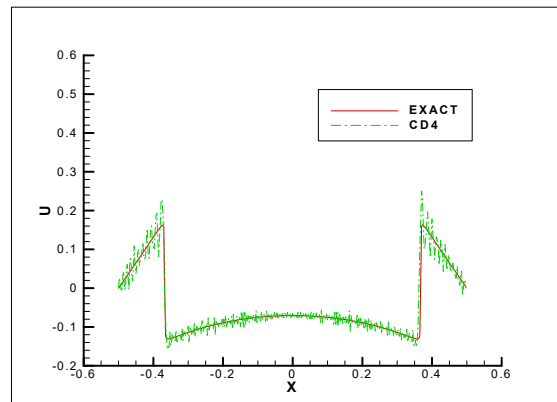
$$\frac{1}{6}(q_{1\eta})_{i-1}^n + \frac{2}{3}(q_{1\eta})_i^n + \frac{1}{6}(q_{1\eta})_{i+1}^n = -\frac{\Delta t}{2\Delta x} [u_{i+1}^n - u_{i-1}^n] \quad (52)$$

پس از اعمال شرایط مرزی (۳۲) و (۳۳) بر رابطه‌های (۵۰) و (۵۲)، ضرایب آنها ماتریس سه‌قطری تشکیل می‌دهند. با الگوریتم توماس که یک روش محاسباتی برای حل دستگاه معادلات سه‌قطری است، به‌راحتی مقادیر q_1 برای مؤلفه‌های u و η به‌دست می‌آید. روش‌های بسته ریاضی برای حل دستگاه معادلات با تعداد زیاد دشوار است؛ لذا برای اجرای کامپیوتری آن به روش‌های تحلیل عددی نیاز است. در رابطه (۵۱) مقادیر q_1 بدون نیاز به ماتریس قطری محاسبه می‌شوند. با استفاده از رابطه‌های رونگ-کوتا (۶) تا (۹) مشابه حالت q_1 می‌توان متغیرهای کمکی q_2, q_3, q_4 را محاسبه کرد. مقادیر مرزی مؤلفه η در ابتدا و انتهای حوزه با استفاده از میان‌یابی خطی (۳۴) مشابه رابطه‌های (۴۱) و (۴۲) محاسبه می‌شوند و در نهایت، مقادیر مؤلفه‌های u, v و η در گام $n+1$ به‌دست می‌آیند.

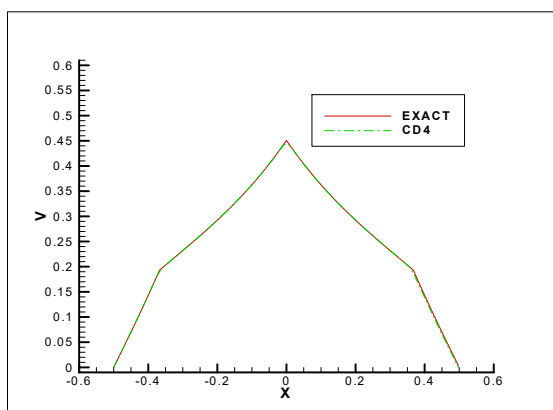
در شکل‌های ۲-الف، ۲-ج و ۲-ه، حل عددی مؤلفه‌های معادلات حاکم بر امواج پوانکاره با استفاده از روش فشرده مرکزی مرتبه چهارم در مکان و روش رونگ کوتا مرتبه چهارم در زمان تحت شرط اولیه پله‌ای (۲۵)، $N_x=400$ و گام زمانی $\Delta t=0.001$ در زمان بی‌بعد $t=2$ نشان داده شده است. در شکل‌ها نوسانات کاذب مشاهده می‌شود که مشابه بخش قبلی، شرط اولیه تانژانت هذلولوی (۴۳) جایگزین شرط اولیه تابع پله‌ای (۲۵) می‌شود که تابعی هموار است. همان‌طور که در شکل‌های ۲-ب، ۲-د و ۲-و مشاهده می‌شود، نوسانات کاذب به‌شدت کاهش یافته و دقت روش بهتر شده است.



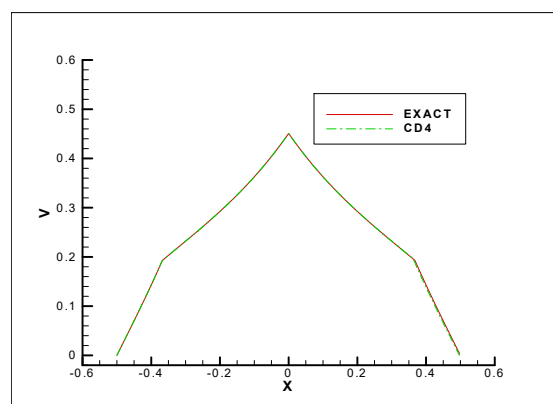
(ب)



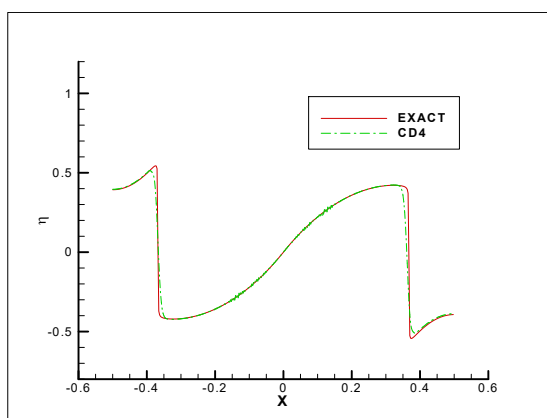
(الف)



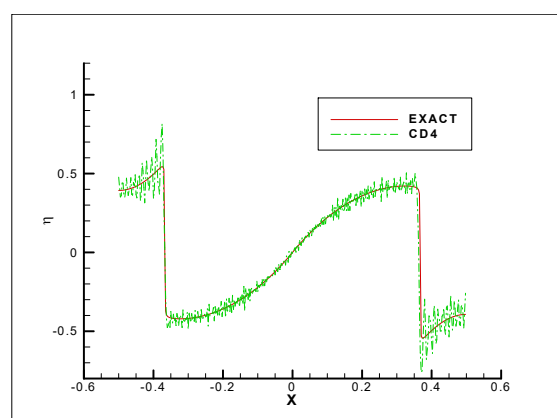
(د)



(ج)

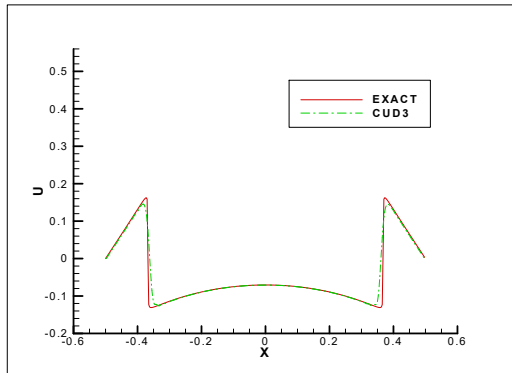


(و)

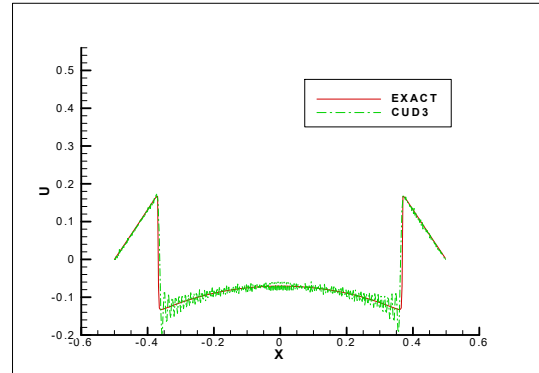


(ه)

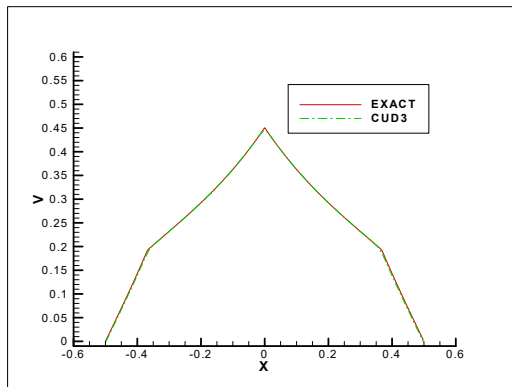
شکل ۲. حل عددی مؤلفه‌های معادلات حاکم بر امواج پویانکاره با روش رونگ- کوتا مرتبه چهارم در زمان و روش فشرده مرکزی مرتبه چهارم در مکان در زمان بی‌بعد $t=2$ (الف) مؤلفه u با شرط اولیه پله‌ای (ب) مؤلفه u با شرط اولیه تانژانت هذلولوی (ج) مؤلفه v با شرط اولیه پله‌ای (د) مؤلفه v با شرط اولیه تانژانت هذلولوی (ه) مؤلفه η با شرط اولیه پله‌ای (و) مؤلفه η با شرط اولیه تانژانت هذلولوی.



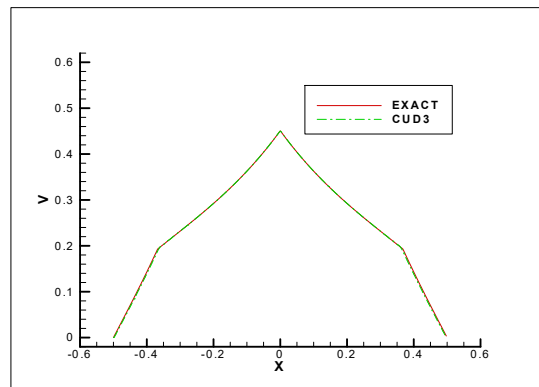
(ب)



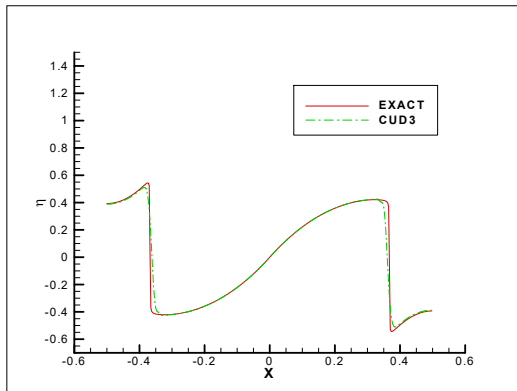
(الف)



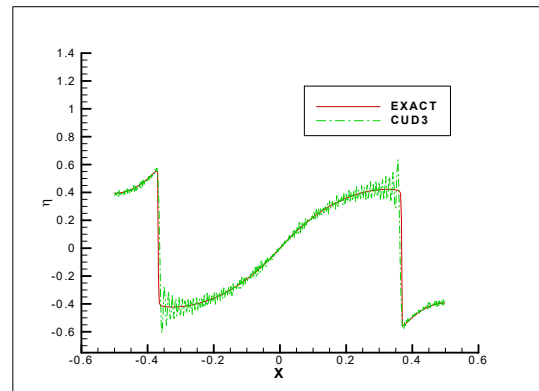
(د)



(ج)



(و)



(ه)

شکل ۳. حل عددی مؤلفه‌های معادلات حاکم بر امواج پوانکاره با روش رونگ-کوتا مرتبه چهارم در زمان و روش فشرده یک‌سویه مرتبه سوم در مکان در زمان $t=2$ (الف) مؤلفه u با شرط اولیه پله‌ای (ب) مؤلفه u با شرط اولیه تانژانت هذلولوی (ج) مؤلفه v با شرط اولیه پله‌ای (د) مؤلفه v با شرط اولیه تانژانت هذلولوی (ه) مؤلفه η با شرط اولیه پله‌ای (و) مؤلفه η با شرط اولیه تانژانت هذلولوی.

$$\Delta t [11v_{j+2}^n + 238v_{j+1}^n + 1392v_j^n + 1138v_{j-1}^n + 101v_{j-2}^n] - 36 \frac{\alpha^2 \Delta t}{\Delta x} [\eta_{i+2}^n + 18\eta_{i+1}^n + 30\eta_i^n - 38\eta_{i-1}^n - 11\eta_{i-2}^n] \quad (59)$$

$$(q_{1v})_i^n = -\Delta t u_i^n \quad (60)$$

$$11(q_{1\eta})_{i+2}^n + 238(q_{1\eta})_{i+1}^n + 1392(q_{1\eta})_i^n + 1138(q_{1\eta})_{i-1}^n + 101(q_{1\eta})_{i-2}^n = -\frac{36\Delta t}{\Delta x} [u_{i+2}^n + 18u_{i+1}^n + 30u_i^n - 38u_{i-1}^n - 11u_{i-2}^n] \quad (61)$$

پس از اعمال شرط مرزی نفوذناپذیری (۳۲) و شرط مرزی باز (۳۳) بر روابط (۵۹) و (۶۱)، ضرایب روابط جدید به دست آمده تشکیل یک ماتریس پنج قطری می دهند که با روش حل دستگاه های خطی (روش گاوس-جردن)، مقادیر q_1 برای مؤلفه های u و η به دست می آید. در رابطه (۶۰) مقادیر q_1 به راحتی بدون نیاز به حل دستگاه محاسبه می شوند. همچنین با استفاده از رابطه های رونگ کوتا (۶) تا (۹) مشابه حالت q_1 می توان متغیرهای کمکی q_2 ، q_3 و q_4 را محاسبه کرد. مقادیر مرزی مؤلفه η با استفاده از میان یابی خطی (۳۴) عبارت اند از:

$$i = 1: \quad \eta_1^{n+1} = 3\eta_2^n - 3\eta_3^n + \eta_4^n, \quad (62)$$

$$i = 2: \quad \eta_2^{n+1} = 3\eta_3^n - 3\eta_4^n + \eta_5^n, \quad (63)$$

$$i = N_x - 1: \quad \eta_{N_x-1}^{n+1} = 3\eta_{N_x-2}^n - 3\eta_{N_x-3}^n + \eta_{N_x-4}^n, \quad (64)$$

$$i = N_x: \quad \eta_{N_x}^{n+1} = 3\eta_{N_x-1}^n - 3\eta_{N_x-2}^n + \eta_{N_x-3}^n \quad (65)$$

در شکل های ۴-الف، ۴-ج و ۴-ه حل عددی مؤلفه های معادلات حاکم بر امواج پوانکاره با استفاده از روش فشرده یک سوویه مرتبه پنجم در مکان و روش رونگ-کوتا مرتبه چهارم در زمان تحت شرط اولیه پله ای (۲۵)، $N_x=400$ و گام زمانی $\Delta t=0.0001$ در زمان بی بعد $t=2$ نشان داده شده است. همان طور که مشاهده می شود، مشابه روش فشرده یک سوویه مرتبه سوم، نوسانات در قسمت های داخلی شکل ها و نزدیک به نقاط ناپیوسته بیشتر است. این افزایش نوسانات کاذب به علت استفاده از شرط اولیه تابع پله ای هموار (۲۵) است؛ بنابراین با به کارگیری دوباره شرط

$N_x=400$ و گام زمانی $\Delta t=0.0001$ در زمان بی بعد $t=2$ نشان داده شده است. همان گونه که در شکل ها مشاهده می شود، نوسانات در قسمت های داخلی شکل ها و نزدیک به نقاط ناپیوسته بیشتر است.

مشابه بخش های قبلی، با تغییر شرط اولیه تابع پله ای (۲۵) و جایگزینی آن با شرط اولیه تابع شیب دار تانژانت هذلولوی (۴۳)، مطابق شکل های ۳-ب، ۳-د و ۳-و نوسانات کاذب تا حد زیادی حذف شده اند.

۴-۳-۵ گسسته سازی معادلات پوانکاره با رونگ کوتا مرتبه چهارم در زمان و فشرده یک سوویه مرتبه پنجم در مکان

برای گسسته سازی معادلات پوانکاره (۲۰) تا (۲۲) به روش های فوق، مشابه بخش قبلی عمل می شود با این تفاوت که در روش فشرده یک سوویه مرتبه پنجم، هر نقطه شبکه به دو نقطه قبل و بعد از آن وابسته است و در حقیقت روشی پنج نقطه ای است. روابط (۴۴) تا (۴۶) در روش فشرده یک سوویه مرتبه پنجم پیشرو (۴) جایگذاری می شوند:

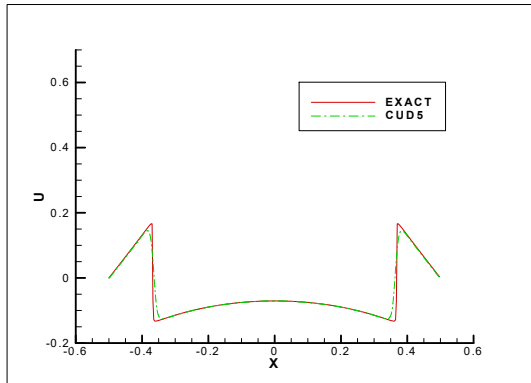
$$11[v_{i+2}^n - \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{i+2}^n] + 238[v_{i+1}^n - \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{i+1}^n] + 1392[v_i^n - \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_i^n] + 1138[v_{i-1}^n - \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{i-1}^n] + 101[v_{i-2}^n - \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{i-2}^n] = \frac{36\alpha^2}{\Delta x} [\eta_{i+2}^n + 18\eta_{i+1}^n + 30\eta_i^n - 38\eta_{i-1}^n - 11\eta_{i-2}^n] \quad (56)$$

$$\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)_i^n = -u_i^n \quad (57)$$

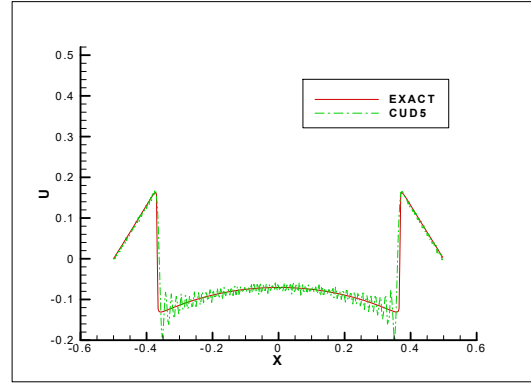
$$11\left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)_{i+2}^n + 238\left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)_{i+1}^n + 1392\left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)_i^n + 1138\left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)_{i-1}^n + 101\left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)_{i-2}^n = -\frac{36}{\Delta x} [u_{i+2}^n + 18u_{i+1}^n + 30u_i^n - 38u_{i-1}^n - 11u_{i-2}^n] \quad (58)$$

رابطه های (۵۶) تا (۵۸) در Δt ضرب می شوند و با توجه به رابطه $q_1 = \Delta t \frac{\partial \varphi}{\partial t}$ از روش رونگ-کوتا (۹) داریم:

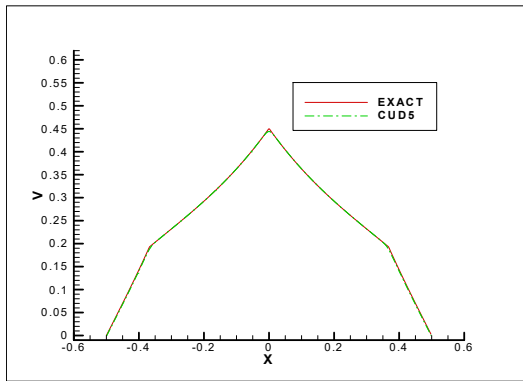
$$11(q_{1u})_{i+2}^n + 238(q_{1u})_{i+1}^n + 1392(q_{1u})_i^n + 1138(q_{1u})_{i-1}^n + 101(q_{1u})_{i-2}^n =$$



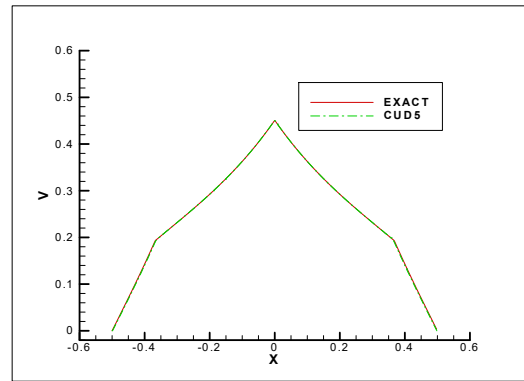
(ب)



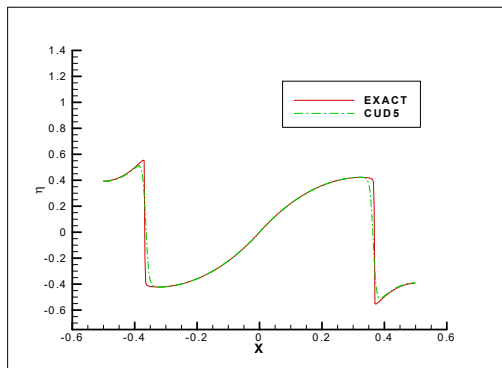
(الف)



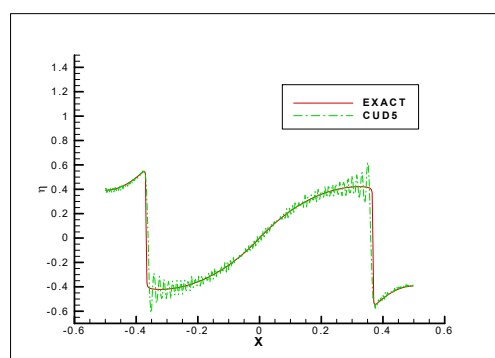
(د)



(ج)



(و)



(ه)

شکل ۴. حل عددی مؤلفه‌های معادلات حاکم بر امواج پوانکاره با روش رونگ-کوتا مرتبه چهارم در زمان و روش فشرده یک‌سویه مرتبه پنجم در مکان در زمان بی بعد $t=2$ (الف) مؤلفه u با شرط اولیه پله‌ای (ب) مؤلفه u با شرط اولیه تانزانته هذلولوی (ج) مؤلفه v با شرط اولیه پله‌ای (د) مؤلفه v با شرط اولیه تانزانته هذلولوی (الف) مؤلفه u با شرط اولیه پله‌ای (ب) مؤلفه u با شرط اولیه تانزانته هذلولوی (ج) مؤلفه v با شرط اولیه پله‌ای (د) مؤلفه v با شرط اولیه تانزانته هذلولوی (ه) مؤلفه η با شرط اولیه پله‌ای (و) مؤلفه η با شرط اولیه تانزانته هذلولوی.

اولیه شیب‌دار تازانت هذلولوی (۴۳) مطابق شکل‌های ۴-ب، ۴-د و ۴-و نوسانات کاذب به شدت کاهش می‌یابد. در جدول ۲ مقادیر خطای کلی مؤلفه‌های معادلات حاکم بر امواج پوانکاره با نرم مربعی (۱۰)، شرط اولیه پله‌ای (۲۵) و تعداد نقاط شبکه ۱۰۰ و ۴۰۰ در زمان بی بعد $t=2$ محاسبه شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، در تمام روش‌ها با افزایش نقاط شبکه، مقدار خطا کاهش می‌یابد و روش فشرده یک‌سویه مرتبه پنجم خطای کمتری نسبت به دیگر روش‌ها و دقت عددی بیشتری دارد.

جدول ۲. مقایسه خطای کلی حل عددی مؤلفه‌های معادلات حاکم بر امواج پوانکاره برای تعداد نقاط شبکه متفاوت با شرط اولیه تابع پله‌ای در زمان بی بعد $t=2$.

| مؤلفه سرعت u | | | | | |
|--------------------------|-----------------------|---------------|------------------------|---------------|------------------------|
| روش | گسسته‌سازی زمانی | تفکیک (N_x) | خطای کلی | تفکیک (N_x) | خطای کلی |
| مرتبه دوم مرکزی | رونگ-کوتا مرتبه چهارم | ۱۰۰ | $5/75 \times 10^{-10}$ | ۴۰۰ | $3/21 \times 10^{-10}$ |
| فشرده مرتبه چهارم | رونگ-کوتا مرتبه چهارم | ۱۰۰ | $4/21 \times 10^{-10}$ | ۴۰۰ | $2/05 \times 10^{-10}$ |
| فشرده یک‌سویه مرتبه سوم | رونگ-کوتا مرتبه چهارم | ۱۰۰ | $4/74 \times 10^{-10}$ | ۴۰۰ | $2/64 \times 10^{-10}$ |
| فشرده یک‌سویه مرتبه پنجم | رونگ-کوتا مرتبه چهارم | ۱۰۰ | $3/86 \times 10^{-10}$ | ۴۰۰ | $1/71 \times 10^{-10}$ |
| مؤلفه سرعت v | | | | | |
| مرتبه دوم مرکزی | رونگ-کوتا مرتبه چهارم | ۱۰۰ | $2/38 \times 10^{-10}$ | ۴۰۰ | $5/73 \times 10^{-10}$ |
| فشرده مرتبه چهارم | رونگ-کوتا مرتبه چهارم | ۱۰۰ | $2/05 \times 10^{-10}$ | ۴۰۰ | $4/47 \times 10^{-10}$ |
| فشرده یک‌سویه مرتبه سوم | رونگ-کوتا مرتبه چهارم | ۱۰۰ | $2/23 \times 10^{-10}$ | ۴۰۰ | $5/25 \times 10^{-10}$ |
| فشرده یک‌سویه مرتبه پنجم | رونگ-کوتا مرتبه چهارم | ۱۰۰ | $1/59 \times 10^{-10}$ | ۴۰۰ | $3/91 \times 10^{-10}$ |
| مؤلفه ارتفاع سطح η | | | | | |
| مرتبه دوم مرکزی | رونگ-کوتا مرتبه چهارم | ۱۰۰ | $4/01 \times 10^{-10}$ | ۴۰۰ | $2/76 \times 10^{-10}$ |
| فشرده مرتبه چهارم | رونگ-کوتا مرتبه چهارم | ۱۰۰ | $3/27 \times 10^{-10}$ | ۴۰۰ | $1/72 \times 10^{-10}$ |
| فشرده یک‌سویه مرتبه سوم | رونگ-کوتا مرتبه چهارم | ۱۰۰ | $3/57 \times 10^{-10}$ | ۴۰۰ | $2/37 \times 10^{-10}$ |
| فشرده یک‌سویه مرتبه پنجم | رونگ-کوتا مرتبه چهارم | ۱۰۰ | $3/01 \times 10^{-10}$ | ۴۰۰ | $1/57 \times 10^{-10}$ |

اهمیت زیادی دارد؛ زیرا نتایج پیش‌بینی تا زمان معینی می‌تواند مفید باشد و اگر نتایج پس از آن زمان معین به دست‌آید، دیگر کاربردی نخواهد داشت. مدت زمان اجرای برنامه‌های روش‌های مختلف گسسته‌سازی مکانی معادلات حاکم بر امواج پوانکاره به دقت اندازه‌گیری شده است (جدول ۴). بر اساس جدول ۴، روش فشرده یک‌سویه مرتبه پنجم که خطای محاسباتی کمتری داشت، زمان محاسباتی خیلی بیشتری نسبت به دیگر روش‌ها دارد و با افزایش نقاط شبکه، این زمان محاسباتی به شدت افزایش می‌یابد. علت این است که روش فشرده یک‌سویه مرتبه پنجم، روشی پنج نقطه‌ای است و ماتریس ضرایب آن تشکیل یک ماتریس

در جدول ۳ این مقادیر خطای کلی با شرط اولیه تازانت هذلولوی (۴۳) محاسبه شده است. مطابق این جدول، مقدار خطای کلی نسبت به جدول ۲ کاهش یافته است. علت آن استفاده از یک شرط اولیه شیب‌دار است که باعث کاهش نوسانات کاذب می‌شود. همچنین روش فشرده یک‌سویه مرتبه پنجم خطای کمتری نسبت به دیگر روش‌ها و دقت عددی بیشتری دارد.

۶ بررسی زمان اجرای برنامه‌های حل عددی معادلات حاکم بر امواج پوانکاره
در پیش‌بینی‌های عددی، زمان اجرای برنامه‌های حل عددی

پنج‌قطری می‌دهد که این عمل در زمان محاسبات تأثیر زیادی دارد؛ بنابراین اگر ما به دنبال روش بهینه‌ای هستیم که علاوه بر خطای محاسباتی کمتر، زمان محاسباتی کمتری نیز نسبت به دیگر روش‌ها داشته باشد، روش فشرده یک‌سویه مرتبه سوم و فشرده مرکزی مرتبه چهارم را می‌توان انتخاب کرد.

جدول ۳. مقایسه خطای کلی حل عددی مؤلفه‌های معادلات حاکم بر امواج پوانکاره برای تعداد نقاط شبکه متفاوت با شرط اولیه تانزانته هذلولوی در زمان بی‌بعد $t=2$.

| مؤلفه سرعت u | | | | | |
|--------------------------|-----------------------|---------------|------------------------|---------------|------------------------|
| روش | گسسته‌سازی زمانی | تفکیک (N_x) | خطای کلی | تفکیک (N_x) | خطای کلی |
| مرتبه دوم مرکزی | رونگ-کوتا مرتبه چهارم | ۱۰۰ | $5/17 \times 10^{-10}$ | ۴۰۰ | $2/42 \times 10^{-10}$ |
| فشرده مرتبه چهارم | رونگ-کوتا مرتبه چهارم | ۱۰۰ | $3/95 \times 10^{-10}$ | ۴۰۰ | $1/76 \times 10^{-10}$ |
| فشرده یک‌سویه مرتبه سوم | رونگ-کوتا مرتبه چهارم | ۱۰۰ | $4/03 \times 10^{-10}$ | ۴۰۰ | $1/90 \times 10^{-10}$ |
| فشرده یک‌سویه مرتبه پنجم | رونگ-کوتا مرتبه چهارم | ۱۰۰ | $3/51 \times 10^{-10}$ | ۴۰۰ | $1/41 \times 10^{-10}$ |
| مؤلفه سرعت v | | | | | |
| مرتبه دوم مرکزی | رونگ-کوتا مرتبه چهارم | ۱۰۰ | $2/15 \times 10^{-10}$ | ۴۰۰ | $9/14 \times 10^{-10}$ |
| فشرده مرتبه چهارم | رونگ-کوتا مرتبه چهارم | ۱۰۰ | $1/85 \times 10^{-10}$ | ۴۰۰ | $4/16 \times 10^{-10}$ |
| فشرده یک‌سویه مرتبه سوم | رونگ-کوتا مرتبه چهارم | ۱۰۰ | $1/98 \times 10^{-10}$ | ۴۰۰ | $4/56 \times 10^{-10}$ |
| فشرده یک‌سویه مرتبه پنجم | رونگ-کوتا مرتبه چهارم | ۱۰۰ | $1/65 \times 10^{-10}$ | ۴۰۰ | $3/84 \times 10^{-10}$ |
| مؤلفه ارتفاع سطح η | | | | | |
| مرتبه دوم مرکزی | رونگ-کوتا مرتبه چهارم | ۱۰۰ | $3/67 \times 10^{-10}$ | ۴۰۰ | $2/01 \times 10^{-10}$ |
| فشرده مرتبه چهارم | رونگ-کوتا مرتبه چهارم | ۱۰۰ | $2/62 \times 10^{-10}$ | ۴۰۰ | $1/39 \times 10^{-10}$ |
| فشرده یک‌سویه مرتبه سوم | رونگ-کوتا مرتبه چهارم | ۱۰۰ | $2/81 \times 10^{-10}$ | ۴۰۰ | $1/51 \times 10^{-10}$ |
| فشرده یک‌سویه مرتبه پنجم | رونگ-کوتا مرتبه چهارم | ۱۰۰ | $2/29 \times 10^{-10}$ | ۴۰۰ | $1/12 \times 10^{-10}$ |

جدول ۴. مقایسه مدت زمان اجرای برنامه‌های حل عددی معادله پوانکاره با تعداد نقاط شبکه متفاوت در زمان بی‌بعد $t=2$ با شرط اولیه تانزانته هذلولوی.

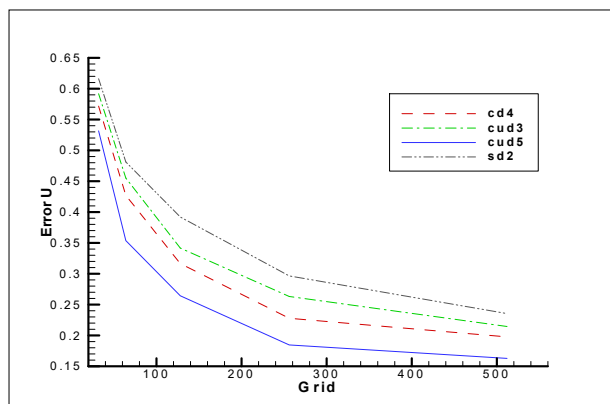
| روش | گسسته‌سازی زمانی | تفکیک (N_x) | زمان (ثانیه) | تفکیک (N_x) | زمان (ثانیه) |
|--------------------------|-----------------------|---------------|--------------|---------------|--------------|
| مرتبه دوم مرکزی | رونگ-کوتا مرتبه چهارم | ۱۰۰ | ۸/۸۴ | ۴۰۰ | ۳۵/۵۸ |
| فشرده مرتبه چهارم | رونگ-کوتا مرتبه چهارم | ۱۰۰ | ۹/۳۷ | ۴۰۰ | ۳۸/۱۵ |
| فشرده یک‌سویه مرتبه سوم | رونگ-کوتا مرتبه چهارم | ۱۰۰ | ۹/۰۶ | ۴۰۰ | ۳۶/۵۱ |
| فشرده یک‌سویه مرتبه پنجم | رونگ-کوتا مرتبه چهارم | ۱۰۰ | ۹۲۵ | ۴۰۰ | ۳۷۴۰ |

۷ مقایسه روش‌های فشرده مرکزی و یک‌سویه

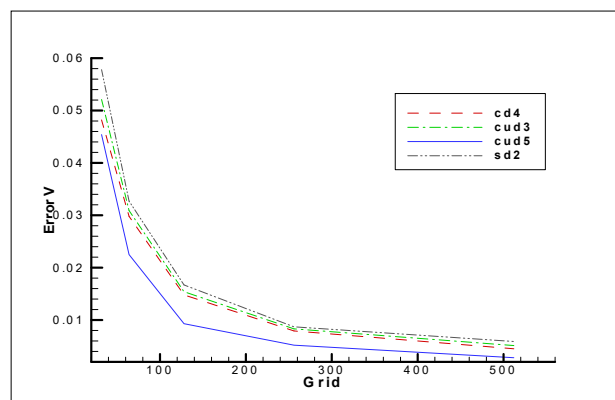
برای محاسبه مقدار خطا در روش‌های مختلف عددی اعمال شده برای معادلات پوانکاره از نرم مربعی (۱۰) استفاده شده است. قبل از مقایسه روش‌ها جالب است که مقدار خطای هریک از آنها با محاسبه نرم I_2 روی شبکه‌های به تدریج تفکیک شده (ریزشده) ارزیابی شود.

گام زمانی استفاده شده در آزمایش‌های زیر خیلی کوچک است ($\Delta t = 10^{-4}$) و خطا در زمان بی‌بعد $t=2$ محاسبه می‌شود. شبکه‌ها شامل ۳۲، ۶۴، ۱۲۸، ۲۵۶ و ۵۱۲ نقطه هستند و نتایج تجزیه و تحلیل خطاها در شکل ۵ نشان داده شده است.

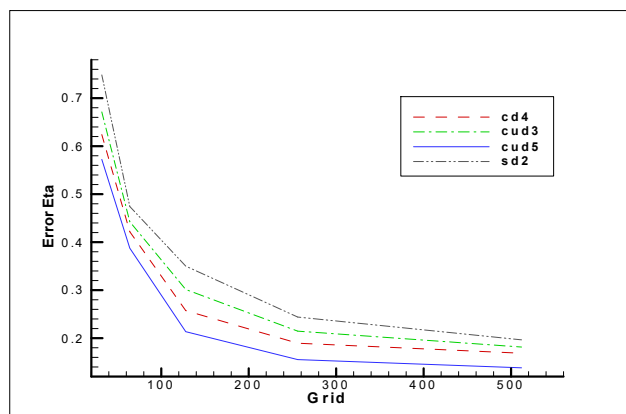
در شکل ۵ مشاهده می‌شود که مقدار خطا با افزایش نقاط



(الف)



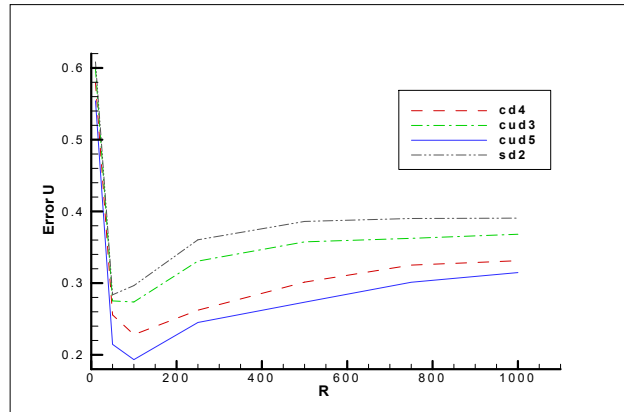
(ب)



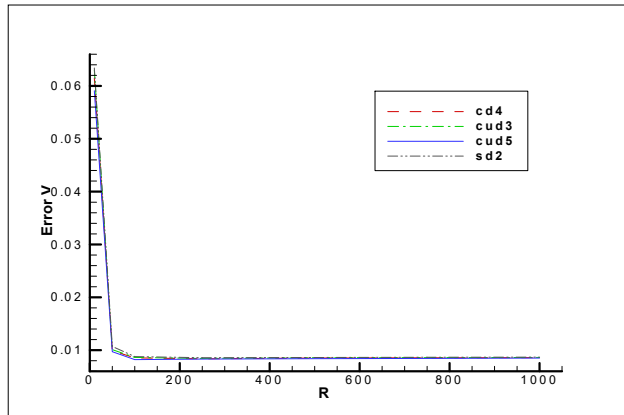
(ج)

شکل ۵. خطای محاسبه شده مؤلفه های معادلات حاکم بر امواج پوانکاره با نرم مربعی برای شبکه های مختلف با شرط اولیه تانژانت هذلولوی ($R=100$) در

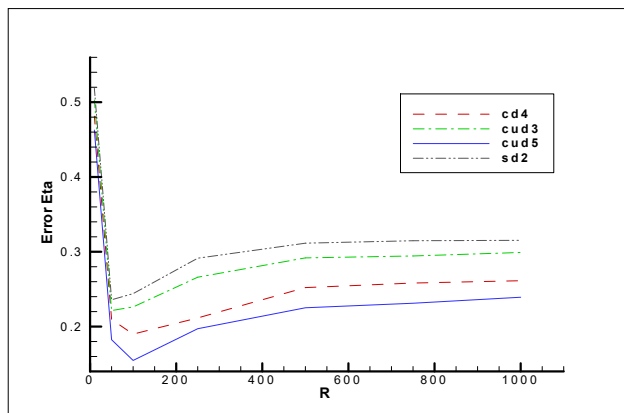
زمان بی بعد $t=2$ (الف) مؤلفه سرعت u (ب) مؤلفه سرعت v (ج) مؤلفه ارتفاع سطح η



(الف)



(ب)



(ج)

شکل ۶. خطای محاسبه‌شده مؤلفه‌های معادلات حاکم بر امواج پوانکاره با نرم مربعی در یک شبکه ۲۵۶ نقطه‌ای برای مقادیر مختلف پارامتر شیب (R) شرط اولیه تانژانت هذلولوی در زمان بی‌بعد $t=2$ (الف) مؤلفه سرعت u (ب) مؤلفه سرعت v (ج) مؤلفه ارتفاع سطح η .

اما در معادله (۲۱) که فاقد مشتق مکانی است، نتایج دقیق‌تری برای مؤلفه v حاصل شد. حل عددی معادلات پوانکاره برای دو شرط اولیه پله‌ای و تانژانت هذلولوی، جداگانه انجام شد. نتایج نشان داد شرط اولیه تانژانت هذلولوی به علت گرادیان‌دار بودن منحنی در مقایسه با شرط اولیه پله‌ای (هموار و صاف) نوسانات کمتری ایجاد می‌کند و در تولید خطای کمتر مؤثرتر است. در بین روش‌های گسسته‌سازی مکانی، روش‌های فشرده نسبت به روش مرتبه دوم مرکزی، خطای کمتری تولید می‌کنند و در نتیجه، دقت بهتری دارند. در بین روش‌های فشرده، تقریباً روش فشرده مرکزی مرتبه چهارم دقت بیشتری نسبت به روش فشرده یک‌سویه مرتبه سوم دارد، اما روش فشرده یک‌سویه مرتبه پنجم به علت داشتن مرتبه بالاتر در خطای برش و ضریب عددی کوچک قبل خطای برش آن، خطای کمتر و در نتیجه، دقت بیشتری نسبت به روش فشرده مرکزی مرتبه چهارم دارد. یکی از اهداف مهم این تحقیق، تشخیص و شناسایی نقاط ناپیوسته با استفاده از حل‌های عددی بود که روش‌های گسسته‌سازی فشرده فوق در تشخیص و شناسایی نقاط ناپیوسته عملکرد خوبی از خود نشان دادند.

منابع

اصفهانیان، و.، قادر، س.، ۱۳۸۲، حل عددی معادلات آب کم‌عمق با استفاده از روش فشرده: نشریه دانشکده فنی دانشگاه تهران، ۳۷(۳)، شماره پیاپی ۸۱، ۳۳۵-۳۴۴.
قادر، س.، اصفهانیان، و.، محب‌الحجه، ع.، ۱۳۸۴، حل عددی معادلات آب کم‌عمق در صفحه f با استفاده از روش فشرده: پنجمین همایش پیش‌بینی عددی وضع هوا، تهران، ۱۰۴۰۳.

Beckers, J. M., and Deleersnijder, E., 1993, Stability of a FBTCS scheme applied to the propagation of shallow-water inertia-gravity waves on various space grids: Journal of Computational Physics, 108(1), 95-104.
Durran, D. R., 2010, Numerical Methods for Fluid

شبکه برای تمام روش‌ها کاهش می‌یابد. در بین روش‌های گفته‌شده، روش مرتبه دوم مرکزی بیشترین خطا و روش فشرده یک‌سویه مرتبه پنجم کمترین خطا را دارد. علت این موضوع، داشتن مرتبه بالاتر در خطای برش و ضرایب عددی کوچک در روش فشرده یک‌سویه مرتبه پنجم است. اگر شرط اولیه پله‌ای (۲۵) به جای شرط اولیه تانژانت هذلولوی (۴۳) استفاده می‌شد، بی‌شک مقدار خطاها به علت هموار بودن شرط فوق افزایش پیدا می‌کرد.

در شکل ۶ نتایج استفاده از شرط اولیه تانژانت هذلولوی در روش‌های فوق برای مقادیر مختلف پارامتر شیب R به ترتیب برای مؤلفه‌های u ، v و η نشان داده شده است. بر اساس این شکل، با افزایش مقدار پارامتر R تا حدود ۱۰۰، مقدار خطای مؤلفه‌های فوق کاهش می‌یابد و با افزایش مقدار پارامتر شیب به بیش از ۱۰۰، مقدار خطاها افزایش می‌یابد؛ بنابراین با افزایش پارامتر شیب، شرط اولیه تانژانت هذلولوی از حالت شیب‌دار به حالت صاف و هموار تغییر پیدا می‌کند و شبیه شرط اولیه پله‌ای می‌شود و در نتیجه، خطای بیشتری تولید می‌کند.

۸ نتیجه‌گیری

ابتدا از روش‌های گسسته‌سازی مکانی ذکر شده در این مقاله برای حل عددی یک معادله خطی (معادله فرارفت) استفاده شد. نتایج روش گسسته‌سازی زمانی رونگ- کوتا نشان داد که می‌توان از روش‌های فوق در حل عددی معادلات حاکم بر پدیده‌های اقیانوسی دیگر نیز استفاده کرد؛ بنابراین در پژوهش حاضر از این روش‌ها برای حل عددی معادلات حاکم بر امواج پوانکاره استفاده شد. از حل عددی معادلات حاکم بر امواج پوانکاره، سه مؤلفه u (سرعت در جهت x)، v (سرعت در جهت y) و η (ارتفاع سطح آزاد) به دست می‌آیند. در حل عددی معادلات (۲۰) و (۲۲) پوانکاره به دلیل داشتن مشتق مکانی، نوسانات کاذب و در نتیجه، خطای بیشتری برای مؤلفه‌های u و η مشاهده شد،

- Reynolds numbers, *Dokl. Akad. Nauk. SSSR* 210 (1973), 48-51.
- Tolstykh, A. I., 1985, Non-symmetrical three-point difference schemes of the forth and fifth orders: *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **25**(4), 127-134.
- Tolstykh, A. I., 1994, High Accuracy Non-centred Compact Difference Schemes for Fluid Dynamics Applications: Computing Center Russian Academy of Sciences.
- Dynamics: Springer-Verlag, New York.
- Ghader, S., Mohebalhojeh, A. R., and Esfahanian, V., 2009, On the spectral convergence of supercompact finite-difference schemes for the f-plane shallow-water equations: *Monthly Weather Review*, **137**, 2393-2406.
- Ghader, S., and Nordstrom, J., 2015, High-order compact finite difference scheme for the vorticity-divergence representation of the spherical shallow water equations: *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, **78**, 709-738.
- Gill, A. E., 1976, Adjustment under gravity in a rotating channel: *Journal of Fluid Mechanics*, **77**, 603-621.
- Gill, A. E., 1982, *Atmosphere-Ocean Dynamics*: Academic Press.
- Hallberg, R., 1997, Stable split time stepping schemes for large-scale ocean modeling: *Journal of Computational Physics*, **135**, 54-65.
- Higdon, R. L., and de Szoeke, R. A., 1997, Barotropic-baroclinic time splitting for ocean circulation modeling: *Journal of Computational Physics*, **135**, 30-53.
- Hirsh, R. S., 1975, Higher Order Accurate Difference Solutions of Fluid Mechanics Problems by a Compact Differencing Technique: NASA Langley Research Center, Hampton, Virginia 23665.
- Houghton, D., Kasahara, A., and Washington, W., 1966, Long term integration of the barotropic equations by the Lax-Wendroff method: *Monthly Weather Review*, **94**, 141-150.
- Kuo, A. C., and Polvani, L. M., 1996, Time-dependent fully nonlinear geostrophic adjustment: *Journal of Physical Oceanography*, **27**, 1614-1634.
- Laurent, W., Vincent, L., Eric, D., and Daniel, L. R., 2006, A one-dimensional benchmark for the propagation of Poincaré waves: *Ocean Modelling*, **15**, 101-123.
- Lele, S. K., 1992, Compact finite difference schemes with spectral-like resolution: *Journal of Computational Physics*, **103**, 16-24.
- Mohebalhojeh A. R., and Dritschel, D. G., 2007, Assessing the numerical accuracy of complex spherical shallow-water flows: *Monthly Weather Review*, **135**, 3876-3894.
- Rossby, C. G., 1938, On the mutual adjustment of pressure and velocity distribution in certain simple current systems II. *J. Mar. Res.* **1**, 239-263.
- Tolstykh, A. I., 1973, On a method for the numerical solution of the compressible Navier-Stokes equations over a wide range of

Numerical simulation of Poincaré waves using central and non-central compact schemes

Mosayeb Maleki¹, Sarmad Ghader^{2*} and Asghar Bohluly³

¹ M.Sc. Student of Physical Oceanography, Space Physics Department, Institute of Geophysics, University of Tehran, Iran

² Professor, Space Physics Department, Institute of Geophysics, University of Tehran, Iran

³ Assistant Professor, Space Physics Department, Institute of Geophysics, University of Tehran, Iran

(Received: 8 January 2023, Accepted: 24 June 2023)

Summary

Several numerical methods are employed to solve the linearized shallow-water equations describing the propagation of Poincaré waves within a one-dimensional finite domain. An analytical solution to the problem, set off by a discontinuous step like elevation, is known and allows to assess the accuracy and robustness of each method and in particular, their ability to capture the traveling discontinuities without generating spurious oscillations.

The present work examines and applies the central and non-central compact finite difference schemes for the numerical solution of the governing equations of Poincaré waves. Undoubtedly, the central and non-central compact spatial discretization methods have higher numerical accuracy than the central second-order method, and in places where there is an exact solution, the compact methods have shown that these methods are stable under various applied boundary conditions and three-diagonal and five-diagonal forms can be used according to possible limitations. The fourth-order central compact, the third-order and the fifth-order non central compact methods are employed to carry out the spatial differencing of the governing equations and a fourth-order Runge-Kutta method is used for the temporal discretization. The Runge-Kutta time discretization method of the fourth order is a four-step method. In each step, a value for an assumed function is calculated in an intermediate time step, and in the next step, in the same time step, this value is modified.

In this research, first, the one-dimensional advection equation, which has an analytical solution, is discretized using the above methods, and the performance and numerical accuracy of the methods are measured. Then, the governing equations of Poincaré waves are numerically solved using the mentioned methods and the results are compared for two initial conditions with discontinuous points. The initial condition of the step function is a smooth condition that produces spurious oscillations but the initial condition of the hyperbolic tangent is a sloping condition in the corners, which produces less oscillations. Finally, the numerical solutions of the central and non-central compact methods are compared with each other and the results are analyzed.

The central and non-central compact methods work well in detecting and identifying the traveling discontinuities. Among the used methods, the non-central compact method of the fifth order has better performance. Moreover, it has a lower error and a higher numerical accuracy. However, with the increase of grid points, the computational cost of this method increases drastically because the fifth-order non-central compact method is a five-point method, and the matrix of their coefficients forms a five-diagonal matrix which has a great impact on the computational time.

Keywords: Poincaré waves, central compact scheme, non-central compact scheme, numerical accuracy