

برآورد هم‌زمان ساختارهای هموار و بلوکی در وارون‌سازی توموگرافی داده‌های مقاومت ویژه الکتریکی

* پردیس صالحی^۱ و رضا قناتی^۲

^۱ کارشناسی ارشد ژئوفیزیک، موسسه ژئوفیزیک، دانشگاه تهران، تهران، ایران

^۲ دانشیار، موسسه ژئوفیزیک، دانشگاه تهران، تهران، ایران

(دریافت: ۱۴۰۳/۰۹/۱۲، پذیرش: ۱۴۰۳/۱۰/۳۰)

چکیده

توموگرافی مقاومت ویژه الکتریکی روشی برای تصویرسازی ساختارهای زیر سطحی بر مبنای ویژگی‌های الکتریکی آن ساختار است. توموگرافی الکتریکی در واقع روشی است که می‌توان با استفاده از آن توزیع فضایی خاصیت رسانندگی لایه‌های زیرسطحی را از طریق عبور یک جریان الکتریکی در همان فضا تعیین کرد؛ بنابراین در توموگرافی الکتریکی یک جریان الکتریکی به درون زمین ارسال شده و پاسخ زمین نسبت به این جریان برحسب ولتاژ اندازه گرفته می‌شود؛ سپس با استفاده از روش‌های عددی حل مسائل وارون غیرخطی و با داشتن حل مسئله پیشرو، مدلی از توزیع رسانندگی زیرسطحی برآورد می‌شود. در این پژوهش، حل مسائل وارون برای توموگرافی داده‌های مقاومت ویژه الکتریکی بررسی و مدلی ارائه می‌شود که بتواند خصوصیات هموار و لبه‌دار آنومالی و مرزهای لایه‌های زمین را پیش‌بینی کند. دو روش منظم‌سازی تیخنوف و تغییرات کلی، برای حل مسئله وارون مورد استفاده قرار گرفته است. در منظم‌سازی تیخنوف از تکنیک گوس نیوتن و در روش تغییرات کلی از الگوریتم IRLS به‌عنوان یک الگوریتم سریع و کاربردی در بهینه‌سازی تابع هدف کلی و یافتن مدل نهائی استفاده می‌شود. در گام بعدی با هدف برآورد هم‌زمان ویژگی‌های هموار و بلوکی مدل‌های زیر سطحی، یک تابع هدف مشترک براساس ویژگی‌های دور روش منظم‌سازی تیخنوف و تغییرات کلی ارائه می‌شود. عملکرد الگوریتم پیشنهادی ابتدا بر روی مدل‌های مصنوعی مورد ارزیابی قرار می‌گیرد و سپس در داده‌های صحرایی تجزیه و تحلیل می‌شود. نتایج عددی نشان می‌دهد که روش بهینه‌سازی پیشنهادی با در نظر گرفتن هم‌زمان ویژگی‌های هموار و بلوکی می‌تواند مدلی دقیق‌تر از توزیع رسانندگی الکتریکی زمین را ارائه دهد.

کلمات کلیدی: توموگرافی مقاومت ویژه الکتریکی، منظم‌سازی تیخنوف، تکنیک گوس نیوتن، روش تغییرات کلی، الگوریتم IRLS

۱ مقدمه

توموگرافی مقاومت ویژه الکتریکی (ERT) یک روش ژئوفیزیکی غیرمخرب و سطحی است که به طور گسترده برای تصویرسازی از ساختارهای زیرسطحی استفاده می‌شود. این روش در زمینه‌های مختلفی از جمله اکتشاف منابع زیرزمینی، تحقیقات زیست‌محیطی و مهندسی کاربرد دارد و به برآورد ویژگی‌های هیدروژئوفیزیکی محیط‌های اشباع و غیراشباع کمک می‌کند. توزیع رسانندگی الکتریکی لایه‌های زیرسطحی از طریق وارون‌سازی داده‌های مشاهده‌ای و براساس تعریف یک مسئله پیشرو برآورد می‌گردد. هدف از حل مسئله وارون، بازیابی مدلی دقیق از ساختارهای زیرسطحی است که توانایی بررسی داده‌های مشاهده شده را داشته باشد. یافتن پاسخ یکتا و پایدار برای مسائل وارون که تعداد پارامترهای مدل آن بیشتر از تعداد داده‌هاست دشوار به نظر می‌رسد. به علاوه، از آنجایی که داده‌های اندازه‌گیری شده معمولاً با نوفه همراه هستند، اغلب پاسخ‌ها ناپایدار می‌باشد به همین دلیل نیاز به یافتن پاسخ یکتا و پایدار برای مسئله وارون، موجب ارائه تابع هدفی متشکل از جمله عدم برازش و جمله منظم‌ساز می‌شود. در مسائل وارون ژئوفیزیکی از ابزار نرم برای به حداقل رساندن تابع هدف استفاده می‌شود. نرم ۲ به دلیل توزیع گوسی مناسب آن و همگرایی تضمین شده بیشتر استفاده می‌شود، اما مدل‌های حاصل از آن ممکن است با ساختار زمین‌شناسی واقعی سازگار نباشند. مقالات متعددی از منظم‌ساز نرم ۲ در وارون‌سازی توموگرافی داده‌های مقاومت ویژه استفاده شده است (اسمیت و وزوف، ۱۹۸۴؛ لوک و بارکر، ۱۹۹۵؛ لوک و بارکر، ۱۹۹۶؛ داهلین، ۱۹۹۶؛ داهلین و ژو، ۲۰۰۱؛ اوکن و کریستینسن، ۲۰۰۴؛ گونتر، ۲۰۰۴؛ ویلکینسون و همکاران، ۲۰۱۰؛ پانگ و همکاران، ۲۰۲۰). برای مواردی که نیاز به بازسازی لبه‌ها و سازگاری با زمین‌شناسی مناطق خاص داریم، از نرم ۱ در جمله منظم‌سازی استفاده می‌شود. بنابراین با هدف بازیابی بهتر

ویژگی‌های بلوکی محیط زیرسطحی، مقالات متعددی از در رابطه ارائه شده است از جمله لوک و همکاران (۲۰۰۳)، چن و همکاران (۲۰۱۸)، هرینگ و همکاران (۲۰۲۱)، خباز و همکاران (۲۰۲۴). روش‌های منظم‌سازی تیخنوف و تغییرات کلی از روش‌های مرسوم برای بازسازی مدل زیرسطحی زمین است، به طوری که منظم‌سازی تیخنوف برای تخمین مدل‌های هموار بوده اما مشکلاتی در بازیافت لبه‌ها و ناپیوستگی‌ها دارد، در حالی که منظم‌ساز تغییرات کلی (نرم ۱) منجر به بازیابی مناسب لبه‌ها است، اما اعوجاج در بخش‌های هموار زمین را ایجاد می‌کند. به همین دلیل، استفاده از هر کدام از این روش‌ها به تنهایی منجر به عدم بازسازی مناسب بخش‌های هموار یا لبه‌دار مدل می‌شود. با ترکیب دو روش و استفاده هم‌زمان از آن‌ها، امکان بازسازی هوشمند ساختارهای مختلف زمین به وجود می‌آید. در این پژوهش ما به دنبال وارون‌سازی توموگرافی داده‌های مقاومت ویژه الکتریکی هستیم تا بتوانیم هم‌زمان مدل‌های هموار و لبه‌دار را بازسازی کرده و داده‌های مشاهده شده را تا حد معینی مطابق با داده‌های محاسباتی پیش‌بینی کنیم. استفاده از منظم‌سازی تیخنوف - تغییرات کلی برای بهبود عملکرد و انعطاف‌پذیری روش‌های فعلی نیز در پژوهش‌های اخیر مورد توجه قرار گرفته است، به عنوان مثال در پژوهش غلامی و حسینی (۲۰۱۳) منظم‌سازی تیخنوف - تغییرات کلی را برای استخراج اطلاعات دقیق‌تر داده‌ها معرفی کردند و به استفاده هم‌زمان نرم ۱ و ۲ روی آوردند. روش آن‌ها تا حد زیادی انعطاف‌پذیری روش‌های فعلی را افزایش داده است. در این پژوهش برای نخستین بار از منظم‌سازی تیخنوف - تغییرات کلی برای حل مسئله وارون غیرخطی داده‌های توموگرافی مقاومت ویژه الکتریکی استفاده شده است.

در این مقاله ابتدا منظم‌سازی تیخنوف و تغییرات کلی در چارچوب یک مسئله غیرخطی فرمول‌بندی می‌شود. سپس یک تابع هدف مشترک بر مبنای استفاده هم‌زمان از

می‌شوند و برای ایجاد این شرایط، تمام مؤلفه‌ها با یک مقیاس کوچک می‌شود که این مقیاس هم تابعی از پارامتر منظم‌سازی است. در این روند مؤلفه‌های بزرگ‌تر، شدیدتر کوچک می‌شوند تا مؤلفه‌ها، سریع‌تر به هم نزدیک شده و توزیع آن‌ها به سمت توزیع گوسی پیش برود. در این منظم‌سازی که یکی از مشهورترین روش‌های محاسبه و تقریب مسئله بدوضع گسسته است، هم‌زمان با کمینه کردن نرم اختلاف داده‌های محاسباتی $\mathbf{d}^{cal} = f(\mathbf{m}) \in \mathcal{R}^{m \times 1}$ و مشاهده‌ای $\mathbf{d}^{obs} \in \mathcal{R}^{m \times 1}$ ، نرم مجهولات (مدل) $\mathbf{m} \in \mathcal{R}^{n \times 1}$ نیز کمینه می‌شود و در نتیجه از بزرگ شدن بیش از حد جواب جلوگیری می‌کند.

تابع هدف در حالت کلی به شکل زیر نوشته می‌شود (استر و همکاران، ۲۰۱۸):

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{m}) & \\ = & \|\mathbf{W}_d(\mathbf{d}^{obs} - f(\mathbf{m}))\|_2^2 + \alpha \|\mathbf{Lm}\|_p^p \end{aligned} \quad (2)$$

همانطور که پیشتر بیان شد، $\alpha > 0$ پارامتر منظم‌سازی نامیده می‌شود که شرایط مسئله را کنترل می‌کند؛ زمانی که α خیلی بزرگ باشد، وارون‌سازی یک مدل بسیار هموار ایجاد می‌کند و اگر مقدار آن کوچک باشد اطلاعات زمین‌شناسی غیرمنطقی به مدل اضافه می‌گردد (ساختارهای کاذب). \mathbf{W}_d ماتریس وزنی داده‌ها و $f(\mathbf{m})$ عملگر پیشرو که شامل یک معادله دیفرانسیل جزئی تحت عنوان معادله پواسون می‌باشد که حل آن از طریق روش‌های عددی المان محدود یا تفاضل محدود منجر به ارائه توزیع پتانسیل الکتریکی در ازاء پارامترهای مدل $\mathbf{m} \in \mathcal{R}^{n \times 1}$ (توزیع رسانندگی زیرسطحی) می‌شود. همچنین $\mathbf{L} \in \mathcal{R}^{m \times n}$ عملگر منظم‌سازی می‌باشد که دارای دو مشتق رایج در منظم‌سازی بوده و باعث ایجاد تغییراتی در مدل یا به عبارت دیگر باعث هموارتر شدن پارامترهای مدل می‌گردد. تقریبی از مشتق اول را با (\mathbf{L}_1) و مشتق مرتبه دوم را با (\mathbf{L}_2) نمایش می‌دهیم. با فرض اینکه توزیع نوفه‌ای که به داده‌ها اضافه می‌شود نرمال باشد، گفته می‌شود که نرم دو اختلاف آن‌ها

ویژگی‌های منظم‌سازی تیخنوف و تغییرات کلی ارائه می‌شود. عملکرد هریک از این الگوریتم‌ها ابتدا بر روی یک مدل مصنوعی و سپس یک مجموعه از داده‌های صحرائی مورد ارزیابی قرار می‌گیرد.

۲ روش‌شناسی

در بخش ابتدا به طور مختصر منظم‌سازی تیخنوف و تغییرات کلی شرح داده شده است. سپس یک تابع هدف مشترک براساس ویژگی‌های منظم‌سازی تیخنوف و تغییرات کلی معرفی می‌شود. یافتن پاسخ یکتا و پایدار برای مسائل وارون که تعداد پارامترهای مدل آن بیشتر از تعداد داده‌هاست دشوار به نظر می‌رسد. به علاوه، از آنجایی که داده‌های اندازه‌گیری شده معمولاً با نوفه همراه هستند، اغلب پاسخ‌ها ناپایدار می‌باشد به همین دلیل نیاز به یافتن پاسخ یکتا و پایدار برای مسئله وارون، موجب ارائه تابع هدفی متشکل از جمله عدم برازش و جمله منظم‌سازی می‌شود.

$$\Phi = \Phi_d + \alpha \Phi_m \quad (1)$$

در رابطه (۱) Φ_d اختلاف بین داده‌های مشاهده‌ای و داده‌های محاسباتی را بیان می‌کند، Φ_m تابع منظم‌سازی و مربوط به ساختار مدل می‌باشد و α پارامتر منظم‌سازی نامیده می‌شود، Φ نیز تابع هدف کلی است. براساس ویژگی‌های مدل مورد انتظار، تابع منظم‌سازی می‌تواند ساختار متفاوتی داشته باشد. از جمله پرکاربردترین توابع منظم‌سازی، تابع منظم‌سازی تیخنوف و تابع منظم‌سازی تغییرات کلی است که کاربست هر یک از این توابع منجر به برآورد مدلی زیرسطحی با ویژگی‌های مشخص می‌شود. در ادامه توضیحاتی در رابطه با هریک از این منظم‌سازها به صورت مختصر ارائه می‌شود.

۲-۱ منظم‌سازی تیخنوف

منظم‌سازی نرم ۲ اولین بار توسط تیخنوف معرفی شد. در این منظم‌سازی، مؤلفه‌های تابع، به تبعیت از توزیع گوسی مقید

یک توزیع خی-دو (χ^2) است.

$$\chi^2 = \|\mathbf{W}_d(\mathbf{d}^{obs} - f(\mathbf{m}))\|_2^2 \quad (۳)$$

همانطور که قبلاً گفته شد \mathbf{W}_d ماتریس وزنی داده‌ها که متشکل از میزان خطای (انحراف معیار هر داده σ) می‌باشد که به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\mathbf{W}_d = \text{diag}\left(\frac{1}{\sigma_1}, \frac{1}{\sigma_2}, \dots, \frac{1}{\sigma_m}\right) \quad (۴)$$

و در نهایت توزیع χ^2 بهنجار شده توسط تعداد داده‌ها (m) به صورت زیر ارائه می‌شود:

$$\chi^2 = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (\mathbf{d}_i^{obs} - f(\mathbf{m}))^2 / \sigma_i^2 \quad (۵)$$

σ_i^2 واریانس داده‌های مشاهده‌ای است. چنانچه $\chi^2 = 1$ باشد یعنی داده‌های محاسبه‌ای و مشاهده‌ای در سطح نوفه برآزش شده‌اند. از معیار χ^2 به عنوان یکی از شروط توقف حل مسئله وارون در مسائل وارون خطی‌سازی شده استفاده می‌شود. در روش کمترین مربعات به دلیل استفاده از نرم ۲ اثر داده‌های پرت حذف نمی‌شوند. قاعدتاً کمینه‌سازی رابطه ۱۲ در مسائل ژئوفیزیکی بدون اعمال تابع منظم‌سازی منجر به یک مسئله ناپایدار و ارائه یک مدل غیر واقعی می‌گردد. برای این منظور توابع منظم‌ساز مختلف مانند منظم-ساز تیخنوف و تغییرات کلی اعمال می‌گردد.

۲-۲ منظم‌سازی تغییرات کلی

باتوجه به اینکه منظم‌ساز تیخنوف برای ساختارهای زمین‌شناسی با تغییرات ناگهانی و لبه‌های تیز مناسب نیست، برای نشان‌دادن این ساختارها از منظم‌سازی تغییرات کلی (منظم‌سازی نرم ۱) استفاده می‌شود. در اصل این منظم‌ساز تابعی که روی آن اعمال می‌شود را مقید به پیروی از توزیع دنباله سنگین می‌کند (دویشز و همکاران، ۲۰۱۰). برای اینکه مؤلفه‌ها چنین توزیعی داشته باشند، باید جواب‌های تخمین زده شده، مقدار کمی داشته باشند که باعث تنک

شدن جواب می‌شود (تعداد مؤلفه‌های غیر صفر کاهش پیدا می‌کند) و در نتیجه پیچیدگی جواب کاهش پیدا کرده و ارتباط بین مؤلفه‌های مجاور کم می‌شود و از هموارشدن جلوگیری می‌کند. در چنین حالتی تابع هدف به صورت زیر است (فار کوارسون، ۲۰۰۸):

$$\phi(\mathbf{m}) = \|\mathbf{W}_d(\mathbf{d}^{obs} - f(\mathbf{m}))\|_2^2 + \alpha \|\mathbf{Lm}\|_1 \quad (۶)$$

چنین تابعی در $\mathbf{m} = 0$ مشتق‌پذیر نیست و این باعث می‌شود برای رسیدن به کمینه تابع هدف از الگوریتم‌های متفاوتی استفاده شود. از جمله این الگوریتم‌ها می‌توان به الگوریتم تکرار کمترین مربعات وزن‌داده شده (IRLS) و یا الگوریتم مسیر متناوب ضرایب (ADMM) اشاره کرد. در این مطالعه از روش IRLS استفاده می‌شود.

۲-۳ الگوریتم IRLS

همان‌طور که گفته شد هنگامی که از منظم‌ساز نرم ۱ در تابع هدف استفاده می‌شود، تابع در $\mathbf{m} = 0$ مشتق‌پذیر نیست و باید از الگوریتمی استفاده کرد که این مشتق‌ناپذیری را از بین ببرد. برای غلبه بر این مشکل از تعریف نرم ۱ بردار استفاده می‌شود:

$$\|\mathbf{m}\|_1 = \sum_{i=1}^n |\mathbf{m}_i| \quad (۷)$$

در معادله (۷)، می‌توان $|\mathbf{m}_i|$ را به صورت زیر نوشت:

$$|\mathbf{m}_i| = \frac{|\mathbf{m}_i|}{|\mathbf{m}_i|} |\mathbf{m}_i| = \frac{\mathbf{m}_i^2}{\sqrt{\mathbf{m}_i^2}} = \frac{\mathbf{m}_i^2}{\sqrt{\mathbf{m}_i^2 + \varepsilon^2}} \quad (۸)$$

ε یک مقدار مثبت بسیار کوچک است که توسط کاربر تعیین می‌گردد.

به عبارتی معادله (۷) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\|\mathbf{m}\|_1 = \sum_{i=1}^n \frac{\mathbf{m}_i^2}{\sqrt{(\mathbf{L}_k \mathbf{m}_i)^2 + \varepsilon^2}} \quad (۹)$$

با در نظر گرفتن ماتریس \mathbf{Q} به صورت:

$$\mathbf{Q} = \text{diag} \left(\frac{1}{\sqrt{(\mathbf{L}_k \mathbf{m}_i)^2 + \varepsilon^2}} \right) \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad (10)$$

$\|\mathbf{m}\|_1$ به صورت زیر بازنویسی می‌شود

$$\|\mathbf{m}\|_1 = \sum_{i=1}^n \mathbf{L}_k^T \mathbf{Q}^2 \mathbf{m}_i^2 = \|\mathbf{L}_k \mathbf{Q} \mathbf{m}\|_2^2 \quad (11)$$

که $k = 0, 1, 2$ است و نشانگر مرتبه مشتق ماتریس منظم ساز است. بنابراین؛ با معرفی ماتریس وزن‌دهی \mathbf{Q} رابطه ما مشتق‌پذیر شده و \mathbf{Q} در هر تکرار به روز رسانی می‌شود. در نهایت تابع هدف به شکل زیر در می‌آید:

$$\Phi(\mathbf{m}) = \|\mathbf{W}_d(\mathbf{d}^{\text{obs}} - f(\mathbf{m}))\|_2^2 + \alpha \|\mathbf{L} \mathbf{Q} \mathbf{m}\|_2^2 \quad (12)$$

الگوریتم تکرار مربعات وزن داده شده یا همان IRLS به صورت زیر عمل می‌کند:

گام اول: $\mathbf{Q} = \mathbf{I}_n$ ، $\mathbf{m} = \mathbf{0}$ و $i = 0$

$$\text{گام دوم: حل } \left(\mathbf{J}^T \mathbf{W}^T \mathbf{W} \mathbf{J} + \frac{\alpha}{2} \mathbf{L}^T \mathbf{Q}^i \mathbf{L} \right) \delta \mathbf{m}^{i+1} = \mathbf{J}^T \mathbf{W}^T \mathbf{W} \mathbf{d}$$

$$\text{گام سوم: } \mathbf{Q}^{i+1} = \text{diag} \left(\frac{1}{\sqrt{(\mathbf{L} \delta \mathbf{m}^i)^2 + \varepsilon}} \right)$$

ε یک مقدار عددی کوچک در نظر گرفته می‌شود

گام چهارم: اگر $\|\delta \mathbf{m}^{i+1} - \delta \mathbf{m}^i\| < \text{tol}$ الگوریتم متوقف شود در غیر اینصورت به گام دوم رفته و تکرار شود.

پارامترهای $\delta \mathbf{m}$ و \mathbf{J} به ترتیب بردار اغتشاش و ماتریس فرجت یا ماتریس حساسیت است. با توجه به غیر خطی بودن مسئله و وارون توموگرافی الکتریکی، نیاز به خطی‌سازی مسئله از طریق برآورد ماتریس حساسیت در هر تکرار الگوریتم IRLS است. به همین منظور از بسط تیلور بهره می‌بریم تا مسئله را به یک مسئله خطی تبدیل کنیم. به عنوان مثال \mathbf{m}_0 را به عنوان مدل اولیه مشخص می‌کنیم و سپس بسط تیلور حول مقدار اولیه را تشکیل می‌دهیم. این روش به ما کمک می‌کند تا مسئله را به صورتی خطی مورد بررسی قرار دهیم و از ابزارهای معمول در حل مسائل خطی

بهره‌برداری کنیم.

$$f(\mathbf{m}_j) = f(\mathbf{m}_0) + \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial f_i(\mathbf{m}_0)}{\partial \mathbf{m}_j} \right) \delta \mathbf{m}_j \quad (13)$$

بطوریکه $i = 1, 2, \dots, m$ و $j = 1, 2, \dots, n$ می‌باشد. در بسط تیلور از جملات مرتبه دوم به بالا چون مقادیر کوچکی دارند صرف نظر می‌شود و در نهایت تابع هدف مسئله وارون ما به شکل زیر می‌شود

$$\Phi_d(\mathbf{d}_i, \mathbf{m}_j) = \sum_{i=1}^n \left[\mathbf{d}_i^{\text{obs}} - f(\mathbf{m}_0) - \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial f_i(\mathbf{m}_0)}{\partial \mathbf{m}_j} \right) \delta \mathbf{m}_j \right]^2 \quad (14)$$

از تابع هدف نسبت به $\delta \mathbf{m}_j$ مشتق گرفته و برابر صفر قرار می‌دهیم و سپس برای انجام فرایند وارون سازی از معادله زیر بهره می‌بریم.

$$\delta \mathbf{d}_i = \left(\frac{\partial f_i}{\partial \mathbf{m}_j} \right) = \mathbf{J} \delta \mathbf{m}_j \quad (15)$$

که $\mathbf{J} = \left(\frac{\partial f_i}{\partial \mathbf{m}_j} \right)$ ماتریس ژاکوبین یا حساسیت گفته می‌شود و به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\mathbf{J} = \left(\frac{\partial f_i}{\partial \mathbf{m}_j} \right) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{m}_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{m}_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial \mathbf{m}_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial \mathbf{m}_n} \end{bmatrix} \quad (16)$$

در مسائل وارون غیر خطی عمدتاً نیز تعداد پارامتر مدل نسبت به تعداد داده‌ها بیشتر و سبب بدوضعی بیشتر مسئله می‌شود؛ لذا در این مسائل نیز نیازمند جمله منظم‌سازی هستیم. در این مطالعه ماتریس حساسیت یا مشتق فرجت براساس رهیافت ماتریس پیشرو ارائه شده در مقاله قناتی و فلاح صفری (۲۰۲۲) محاسبه می‌شود.

و با اضافه شدن این جمله تابع هدف به صورت زیر در می‌آید:

$$\phi(\mathbf{m}) = \|\mathbf{W}_d(\mathbf{d}^{obs} - \mathbf{f}(\mathbf{m}_1 + \mathbf{m}_2))\|_2^2 \quad (20)$$

$$+ \alpha(\|\mathbf{L}_2\mathbf{m}_2\|_2^2 + \beta\|\mathbf{L}_1\mathbf{m}_1\|_1)$$

باتوجه به غیرخطی بودن رابطه (۲۰)، ابتدا نیاز است که مسئله خطی‌سازی شود $(\delta\mathbf{d} = \mathbf{J}(\delta\mathbf{m}_1 + \delta\mathbf{m}_2))$.

بنابراین برای محاسبه کمینه رابطه (۲۰) نیاز به محاسبه مشتق تابع هدف نسبت به $\delta\mathbf{m}_1$ و $\delta\mathbf{m}_2$ است. محاسبه $\delta\mathbf{m}_2$

همانند آنچه که در روش تیخنوف گفته شد محاسبه می‌شود و مقدار $\delta\mathbf{m}_1$ با استفاده از الگوریتم IRLS به دست می‌آید. در نهایت هر دو مدل به دست آمده با هم جمع شده

و مدل نهایی که متشکل از ویژگی‌های هموار و بلوکی به طور هم‌زمان است حاصل می‌شود. α و β پارامترهای منظم سازی می‌باشند که مجموع آن‌ها برابر با یک است. و با توجه به مقداری که برای هر یک از آن‌ها تعیین می‌شود وزن خاصی به هر کدام از مدل‌های هموار و یا لبه دار اختصاص می‌دهد. مقدار پارامترهای منظم سازی α و β براساس تجربه و به کمک آزمون و خطا تعیین می‌گردد.

باتوجه به تابع هدف ارائه شده در معادله (۲۰) و خطی - سازی آن، مقدار $\delta\mathbf{m}_1$ به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\delta\mathbf{m}_1 = \left(\mathbf{J}^T \mathbf{W}_d^T \mathbf{W}_d \mathbf{J} + \left(\frac{\alpha\beta}{2} \right) \mathbf{L}_1^T \mathbf{Q} \mathbf{L}_1 \right)^{-1} \left(\mathbf{J}^T \mathbf{W}_d^T \mathbf{W}_d \delta\mathbf{d} \right) \quad (21)$$

لازم به ذکر است در مسائل دوبعدی \mathbf{L}_1 همانطور که قبلاً اشاره شد در دو بُعد و در راستای x و z (یعنی $\mathbf{L}x_1$ و $\mathbf{L}z_1$ بطوریکه $\mathbf{L}_1 = \mathbf{L}x_1 + \mathbf{L}z_1$) محاسبه می‌شود و معادله به شکل زیر درمی‌آید:

$$\delta\mathbf{m}_1 = \left(\mathbf{J}^T \mathbf{W}_d^T \mathbf{W}_d \mathbf{J} + \left(\frac{\alpha\beta}{2} \right) (\mathbf{L}x_1^T \mathbf{Q} \mathbf{L}x_1 + \mathbf{L}z_1^T \mathbf{Q} \mathbf{L}z_1) \right)^{-1} \left(\mathbf{J}^T \mathbf{W}_d^T \mathbf{W}_d \delta\mathbf{d} \right) \quad (22)$$

و برای $\delta\mathbf{m}_2$ خواهیم داشت:

$$\min \phi(\mathbf{m}) = \min \|\mathbf{W}_d(\delta\mathbf{d} - \mathbf{J}\delta\mathbf{m})\|_2^2 + \alpha\|\mathbf{L}(\mathbf{m} + \delta\mathbf{m})\|_p^p \quad (17)$$

با فرض $P = 2$ از تابع هدف مشتق گرفته برابر صفر قرار می‌دهیم و با اضافه کردن تابع وزنی داده‌ها در نهایت خواهیم داشت:

$$\delta\mathbf{m} = \left(\mathbf{J}^T \mathbf{W}_d^T \mathbf{W}_d \mathbf{J} + \alpha \mathbf{L}^T \mathbf{L} \right)^{-1} \left(\mathbf{J}^T \mathbf{W}_d^T \mathbf{W}_d \delta\mathbf{d} - \alpha \mathbf{L}^T \mathbf{L} \mathbf{m}^{k-1} \right) \quad (18)$$

و در مرحله بعد:

$$\mathbf{m}^k = \mathbf{m}^{k-1} + \delta\mathbf{m} \quad (19)$$

که \mathbf{m}^{k-1} پارامتر مدل برآورد شده از مرحله قبل و \mathbf{m}^k پارامترهای مدل در تکرار جدید است که مقدار آن برای \mathbf{m}_0 جدید جایگذاری می‌شود. در هر مرحله با وجود \mathbf{m}_0 جدید داده‌های محاسباتی با استفاده از عمگکر پیشرو $f(\mathbf{m}_0)$ تولید می‌شود و ماتریس حساسیت به روزرسانی شده و این فرآیند تکرار تا زمانی که یکی از معیارهای توقف اغناء شود ادامه می‌یابد.

۲-۴ منظم‌سازی تیخنوف - تغییرات کلی

باتوجه به توضیحات قبل متوجه شدیم که منظم ساز نرم ۲ برای مناطق هموار و منظم ساز تغییرات کلی برای مناطقی که دارای تغییرات ناگهانی و یا مرزهای لبه دار هستند مناسب است. ساختارهای زمین شناسی اغلب پیچیده بوده و داری مناطق هموار با تغییرات ناگهانی هستند؛ از این رو برای بازسازی چنین مدل‌هایی نیاز به منظم‌سازی داریم که هر دو خاصیت را داشته باشد. ازینرو تابع هدفی متشکل از ویژگی‌های هر دو منظم‌ساز ارائه می‌شود. با استفاده از این منظم‌سازی که آن را منظم‌سازی تیخنوف - تغییرات کلی یا به اختصار (TT) می‌نامیم تابع هدف را به شکل زیر می‌نویسیم (غلامی و حسینی، ۲۰۱۳). هر چند مقاله غلامی و حسینی (۲۰۱۳) صرفاً بر روی مسائل خطی تمرکز دارد و در این مقاله تعمیم این روش بر روی مسائل غیرخطی هدف این مطالعه است.

۳-۱ مثال مدل مصنوعی

مدل مصنوعی شامل یک زمین دولایه‌ای با مقاومت ویژه-های متفاوت بطوریکه در لایه دوم یک آنومالی مستطیلی با رسانندگی بالا قرار داده شده است (شکل ۱). مدل مصنوعی نمایش داده شده در شکل (۱) حاوی یک رولایه با مقاومت ویژه ۲۰۰ اهم‌متر و یک سنگ بستر با مقاومت ویژه ۵۰۰ اهم‌متر که در برگیرنده یک آنومالی رسانا با مقاومت-ویژه ۱۰ اهم‌متر است. مقادیر مقاومت ویژه محیط‌های مختلف مدل مصنوعی در جدول (۱) ارائه شده است. این ساختار مصنوعی به صورت شبکه مستطیلی با فاصله‌های یکسان در جهت افقی و فاصله‌های لگاریتمی در جهت عمق گسسته شده است. با هدف ارزیابی بهتر الگوریتم پیشنهادی لبه‌های آنومالی رسانا از طریق تابع گوسی مقداری هموار شده است. بر همین اساس، مدل زمین شبیه‌سازی شده هم‌زمان دارای ویژگی‌های هموار و بلوکی است که به ترتیب در مرز آنومالی رسانا با محیط میزبان (سنگ بستر) و مرز لایه اول و سنگ بستر که در آن مقاومت ویژه به طور تدریجی تغییر می‌کند دیده می‌شود. داده‌های مقاومت ویژه ظاهری از طریق مدلسازی پیشرو و با استفاده از آرایه دوقطبی-دوقطبی شامل ۸ پرش و ۲۰ ایستگاه و با کمترین فاصله الکترودی ۵ متر تولید می‌شود. سپس پاسخ‌های مقاومت ویژه شبیه‌سازی شده با نوفه گوسی با انحراف معیار ۵ درصد دامنه هر یک از داده‌ها آغشته می‌شود. در مرحله بعد داده‌های مشاهده‌ای توسط الگوریتم‌های منظم‌ساز تیخنوف، تغییرات کلی و تیخنوف-تغییرات کلی وارون می‌شود. نتایج وارون‌سازی با استفاده از روش‌های منظم‌سازی مختلف از بالا به پایین به ترتیب شامل مقطع مقاومت ویژه، شبه‌مقطع داده‌های مشاهده‌ای، شبه‌مقطع محاسباتی است. توزیع مقادیر مقاومت ویژه توسط نوار رنگی با مقیاس لگاریتمی نشان داده می‌شود.

$$\delta \mathbf{m}_2 = (\mathbf{J}^T \mathbf{W}_d^T \mathbf{W}_d \mathbf{J} + \alpha (\mathbf{Lx}_1^T \mathbf{Lx}_1 + \mathbf{Lz}_1^T \mathbf{Lz}_1))^{-1} (\mathbf{J}^T \mathbf{W}_d^T \mathbf{W}_d \delta \mathbf{d}) \quad (23)$$

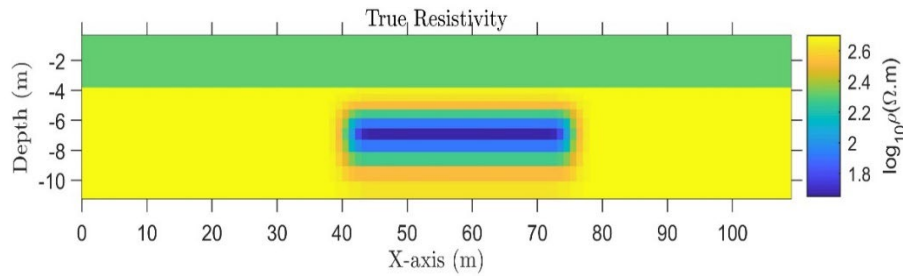
در نهایت با جمع دو مدل به‌دست آمده، مدل نهایی را خواهیم داشت:

$$\delta \mathbf{m} = \delta \mathbf{m}_1 + \delta \mathbf{m}_2 \quad (24)$$

این مدل به‌دست آمده ویژگی‌های هموار ($\delta \mathbf{m}_2$) و بلوکی ($\delta \mathbf{m}_1$) را به‌صورت هم‌زمان خواهد داشت و قادر است تا مدل واقعی تری از زیر سطح زمین را به ما ارائه دهد.

۳ نتایج عددی بر روی داده‌های مصنوعی و واقعی

در این بخش با هدف ارزیابی الگوریتم پیشنهادی، نخست عملکرد آن بر روی داده‌های مصنوعی آغشته به نوفه و سپس توانایی روش بر روی داده‌های واقعی مورد بررسی قرار می‌گیرد. براساس مدلسازی پیشرو، پاسخ مقاومت ویژه ظاهری زمین براساس مدلی با مقادیر دلخواه از رسانندگی الکتریکی محاسبه می‌شود. در این روش یک توزیع خاص برای اجزای زیرسطحی در نظر گرفته می‌شود و در قدم اول فضای زیرسطحی به تعداد زیادی سلول تقسیم می‌شود. سپس پاسخ این مدل تحت آرایش الکترودی موردنظر محاسبه می‌شود (لوک و بارکر، ۱۹۹۶؛ دی و موریسون ۱۹۷۹). مدل‌سازی پیشرو داده‌های مقاومت ویژه را می‌توان با روش‌های عددی مانند تفاضل محدود و المان محدود انجام داد. مدل تفاضل محدود دوبعدی و سه‌بعدی توسط دی و موریسون (۱۹۷۹) تشریح شده است. در این مطالعه از رهیافت تفاضل محدود برای حل عددی توزیع پتانسیل الکتریکی در یک فضای دوبعدی استفاده می‌شود. مدلسازی پیشرو توموگرافی مقاومت ویژه توسط منابع متن‌باز RESIP2DMODE انجام می‌شود (قناتی و همکاران؛ ۲۰۲۰).

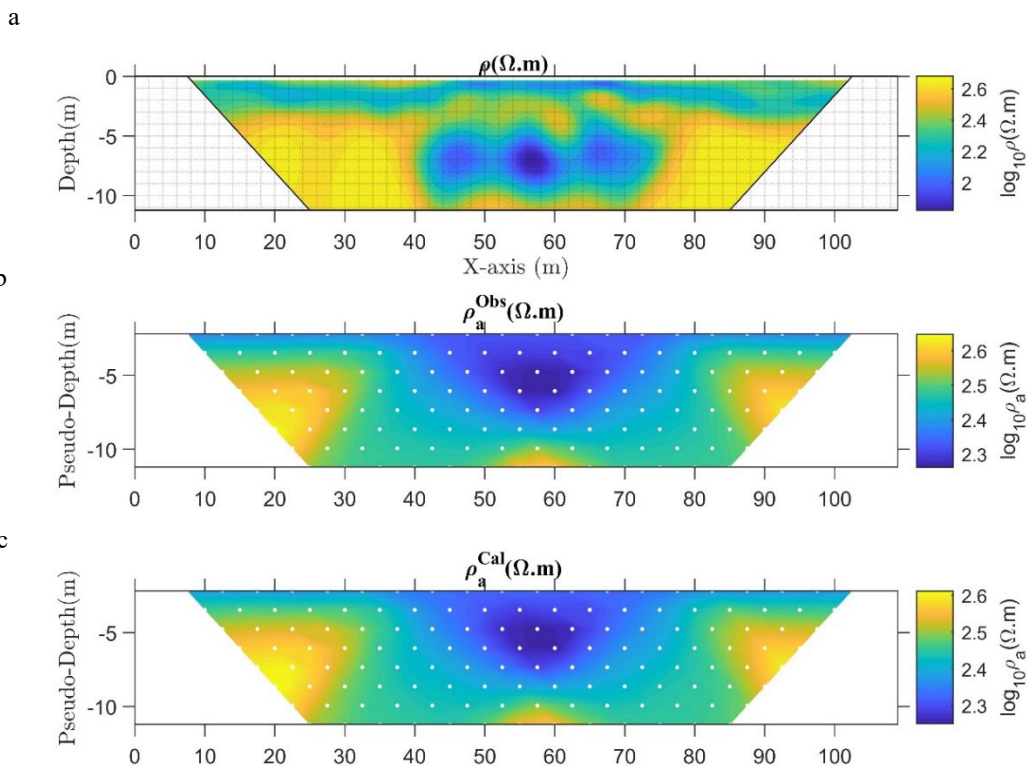


شکل ۱. مدل مصنوعی شامل یک رولایه و سنگ بستر و آنومالی با رسانندگی بالا در مرکز سنگ بستر.

۲-۳ حل مسئله با استفاده از منظم‌سازی تیخنوف

عبارت دیگر شکل هندسی آنومالی رسانا به درستی آشکار نشده است. هرچند که مزیت این روش وارون‌سازی ساده‌تر بودن حل مسئله نسبت به فرایند وارون‌سازی با استفاده از منظم‌سازی تغییرات کلی و تیخنوف - تغییرات کلی است. همچنین تطابق مناسبی بین داده‌های مشاهده‌ای و محاسباتی با $\chi^2 = 1.4$ وجود دارد.

نتایج وارون‌سازی با استفاده از منظم‌سازی تیخنوف در شکل ۲ نمایش داده می‌شود. همانطور که انتظار می‌رفت مرز رولایه و سنگ بستر به درستی تشخیص داده نشده است و مدل برآورد شده تطابق مناسبی با مدل واقعی ندارد. به



شکل ۲. به ترتیب (a) مقطع حاصل شده از وارون‌سازی با استفاده از منظم‌سازی تیخنوف، (b) شبه مقطع مربوط به داده‌های مشاهده‌ای (c) شبه مقطع بازسازی شده داده‌های محاسباتی. نقاط سفیدرنگ نشان‌دهنده محل داده‌های اندازه‌گیری شده در عمق‌های مختلف است.

جدول ۱. مقادیر مقاومت ویژه واقعی در محیط‌های مختلف مدل مصنوعی شامل رولایه، سنگ بستر و آنومالی.

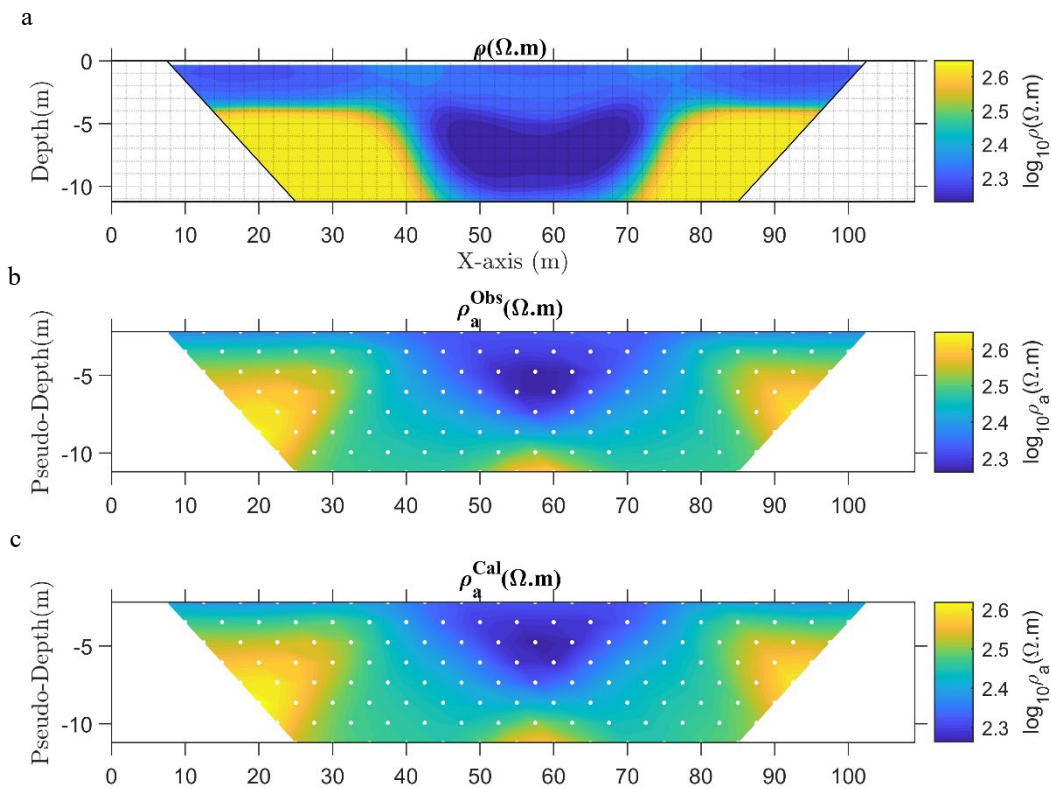
مقدار مقاومت (اهم‌متر)	لایه‌های تشکیل شده
۲۰۰	رولایه
۵۰۰	سنگ بستر
۱۰	آنومالی

منظم‌سازی تیخونف، مرز رولایه و سنگ بستر به‌درستی تشخیص داده می‌شود هرچند تغییرات هموار آنومالی رسانا به خوبی برآورد نشده است. همانند منظم‌سازی تیخونف، تطابق مناسبی بین داده‌های مشاهده‌ای و محاسباتی با $\chi^2 = 1.15$ وجود دارد.

۳-۳ حل مسئله وارون مدل مصنوعی با استفاده از

منظم‌سازی تغییرات کلی

با هدف آشکارسازی بهتر مرز لایه‌ها، نتایج وارون‌سازی با استفاده از منظم‌سازی تغییرات کلی در شکل ۳ نمایش داده می‌شود. همانطور که انتظار می‌رفت در مقایسه با



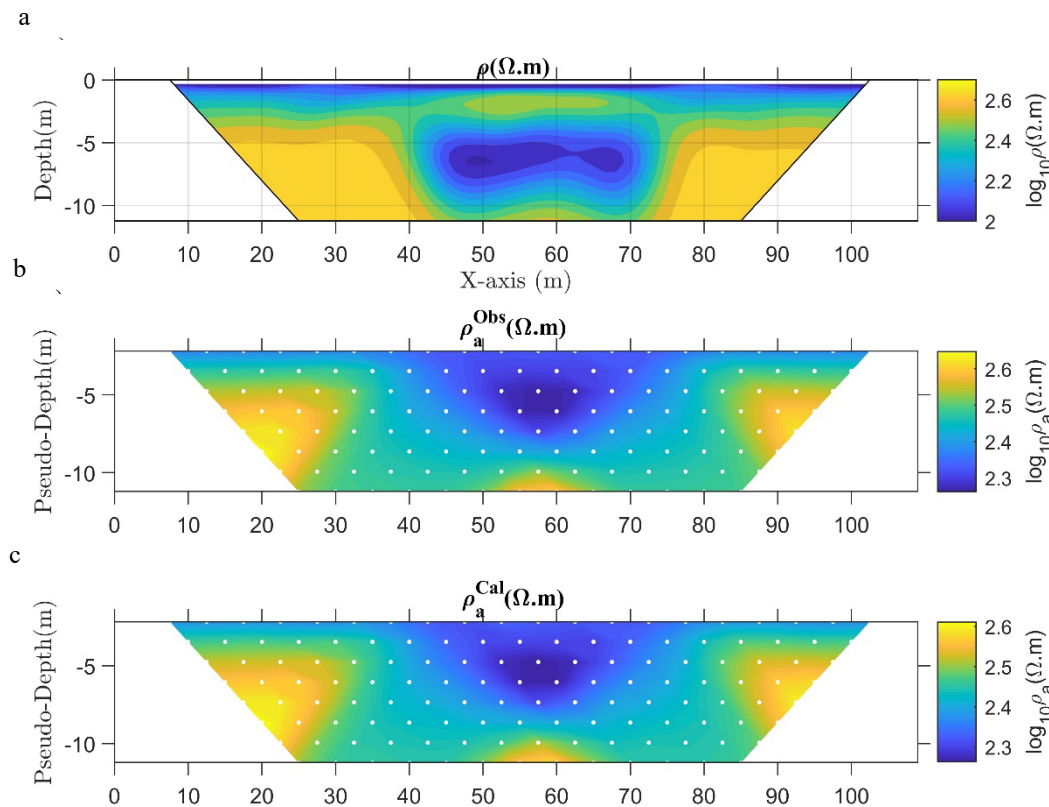
شکل ۳. به ترتیب (a) مقطع حاصل شده از وارون‌سازی با استفاده از منظم‌سازی تغییرات کلی، (b) شبه مقطع مربوط به داده‌های مشاهده‌ای (c) شبه مقطع بازسازی شده داده‌های محاسباتی. نقاط سفیدرنگ نشان‌دهنده محل داده‌های اندازه‌گیری شده در عمق‌های مختلف است.

۳-۴ حل مسئله وارون مدل مصنوعی با استفاده از

منظم‌سازی تیخنوف - تغییرات کلی

پس از بررسی منظم‌سازهای تیخنوف و تغییرات کلی، نتایج وارون‌سازی با استفاده از منظم‌سازی تیخنوف-تغییرات کلی در شکل ۴ نمایش داده می‌شود. در این روش وارون‌سازی، هم مرز لایه اول و سنگ بستر و هم موقعیت هندسی آنومالی به خوبی مشخص شده‌اند و برآورد

دقیق‌تری از مدل واقعی زمین ارائه می‌شود. این روش نسبت به وارون‌سازی با استفاده از منظم‌سازی تغییرات کلی، نیاز به زمان کمتر و تعداد تکرار کمتری برای همگرایی به جواب مسئله دارد. همچنین، نسبت به وارون‌سازی با منظم‌سازی تیخنوف، تصویری ارائه می‌دهد که با واقعیت زمین سازگارتر است.



شکل ۴. به ترتیب (a) مقطع حاصل شده از وارون‌سازی با استفاده از منظم‌سازی تیخنوف - تغییرات کلی، (b) شبه مقطع مربوط به داده‌های مشاهده‌ای (c) شبه مقطع بازسازی شده داده‌های محاسباتی. نقاط سفیدرنگ نشان‌دهنده محل داده‌های اندازه‌گیری شده در عمق‌های مختلف است.

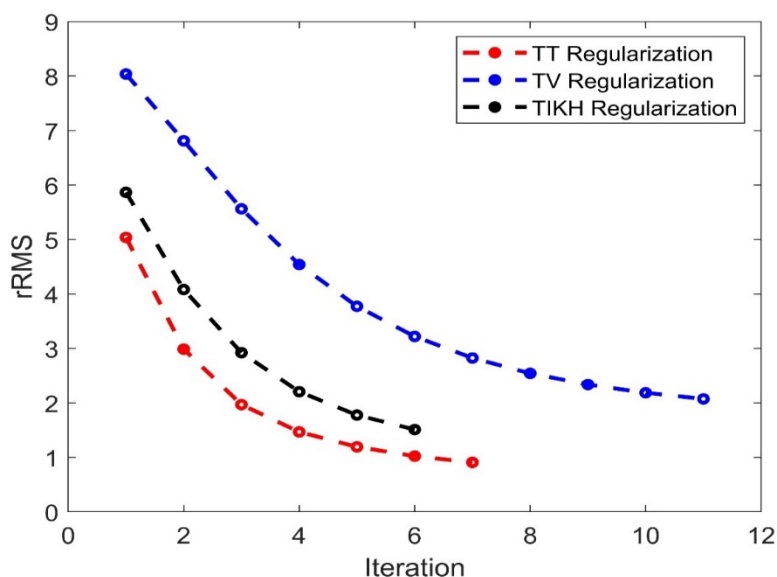
محاسبه می‌شود.

$$\text{rRMS} = 100 \times \sqrt{\frac{1}{m} \|(\mathbf{d}^{obs} - \mathbf{d}^{cal}) / \mathbf{d}^{obs}\|_2^2} \quad (25)$$

براساس نتایج نشان داده شده در شکل ۵، منظم‌سازی

۳-۵ میزان خطای rRMS

جهت ارزیابی بهتر الگوریتم‌های منظم‌سازی مختلف، میزان خطای rRMS برای هر یک از روش‌ها در شکل ۵ نمایش داده می‌شود. مقدار خطای rRMS با استفاده از رابطه زیر



شکل ۵. میزان خطای rRMS در هر تکرار برای مدل بازسازی شده توسط منظم ساز تیخونف (نمودار مشکی)، منظم ساز تغییرات کلی (نمودار آبی) و منظم ساز تیخونف - تغییرات کلی (نمودار قرمز).

۴ مثال داده‌های واقعی

پس از بررسی عملکرد روش پیشنهادی بر روی مدل مصنوعی، جهت بررسی بیشتر کارایی منظم‌سازی تیخونف - تغییرات کلی، از داده‌های صحرائی استفاده می‌شود. برداشت‌های صحرائی در این مطالعه با هدف تصویرسازی توزیع مقاومت ویژه الکتریکی با تزریق آب در لایه‌های زیرسطحی در زمان‌های مختلف انجام شده است. بنابراین در این بررسی، تصویربرداری مقاومت ویژه الکتریکی نه تنها در مکان بلکه در زمان نیز انجام می‌شود. در برخی از مطالعات، تغییرات مقاومت ویژه زیرسطحی با زمان از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. از جمله چنین مطالعاتی می‌توان به بررسی جریان آب در ناحیه غیراشباع، تغییرات در سطح ایستابی به دلیل استخراج از آبخوان، جریان آلاینده‌های شیمیایی و نشت از سدها اشاره کرد. یک آزمایش ساده اما بسیار جالب برای ترسیم جریان آب از سطح به درون زمین و انتقال محلول الکترولیت از ناحیه غیراشباع به محیط اشباع توسط بارکر و مور (۱۹۹۸) انجام

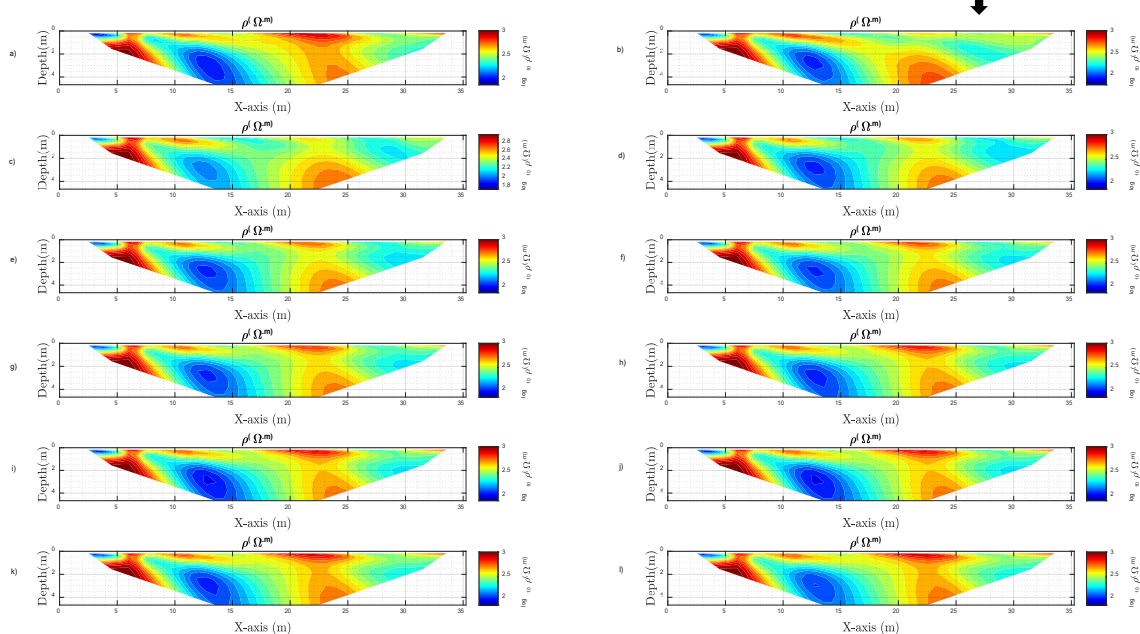
تیخونف - تغییرات کلی با تعداد تکرار کمتری نسبت به دو روش دیگر (تیخونف و تغییرات کلی) به همگرایی می‌رسد و نتیجه قابل‌قبولی را تولید می‌کند. نتایج منتج شده از مدل‌سازی داده‌های مصنوعی نشان داد که استفاده از ترکیب منظم‌سازی تیخونف و تغییرات کلی امکان بازسازی هم‌زمان ویژگی‌های هموار و بلوکی (لبه‌ها) جود دارد. همچنین از نظر دقت، نسبت به دو روش منظم‌سازی تیخونف و تغییرات کلی، نتایج دقیق‌تری ارائه می‌دهد. از طرف دیگر علاوه بر پارامتر هندسی، پارامتر فیزیکی مقاومت ویژه نیز در این فرایند وارون‌سازی به مقادیر واقعی نزدیک‌تر هستند. ترکیب منظم‌سازی تیخونف و منظم‌سازی تغییرات کلی می‌تواند بهبودهای قابل توجهی در عملکرد وارون‌سازی داده‌ها داشته باشد. این ترکیب می‌تواند به صورت جامع‌تری با نقاط ضعف هر دو روش مقابله کند و نقاط قوت آن‌ها را برجسته کند.

از تزریق جریان آب، یک ساعت و نیم بعد از تزریق جریان آب، سه ساعت بعد از تزریق جریان آب، ده ساعت بعد از تزریق جریان آب، چهار ساعت بعد از قطع جریان آب، هشت ساعت بعد از قطع جریان آب، شانزده ساعت بعد از قطع جریان آب، یک روز بعد از قطع جریان آب، شصت و چهار ساعت بعد از قطع جریان آب، پنج روز بعد از قطع جریان آب، یازده روز بعد از قطع جریان آب، و در نهایت شانزده روز بعد از قطع جریان آب است. محل تزریق آب در فاصله ۲۴ متری از ابتدای پروفیل است. همانطور که افزایش زمان تزریق آب میزان مقاومت ویژه لایه‌های زیرسطحی در محل جریان آب کاهش می‌یابد (شکل ۶-a-d) و پس از قطع آب روند توزیع مقاومت ویژه به حالت اولیه خود باز می‌گردد بطوریکه در توموگرام نهایی (۱۶ روز بعد از قطع جریان آب - شکل ۶-l) مقادیر مقاومت ویژه شباهت زیادی به توموگرام قبل از تزریق آب (شکل ۶-a)

شد. در این آزمایش چهل هزار لیتر آب به مدت ۱۰ ساعت روی سطح زمین و در فاصله ۲۴ متری امتداد پروفیل ریخته شد. اندازه‌گیری‌های مقاومت ویژه الکتریکی در قالب یک پروفیل قبل و در حین تزریق آب با استفاده از آرایه ونر با فاصله الکترودی ۱/۵ متر در زمان‌های مختلف انجام گرفته است. پیش از وارون‌سازی کیفیت این داده‌ها مورد ارزیابی قرار گرفت و داده‌های خارج از محدوده میانگین از مجموعه اندازه‌گیری‌ها حذف شد. برای وارون‌سازی این داده‌ها از منظم‌سازی‌های تیخنوف، تغییرات کلی و ترکیب تیخنوف - تغییرات کلی استفاده و نتایج آن با یکدیگر مقایسه می‌شود.

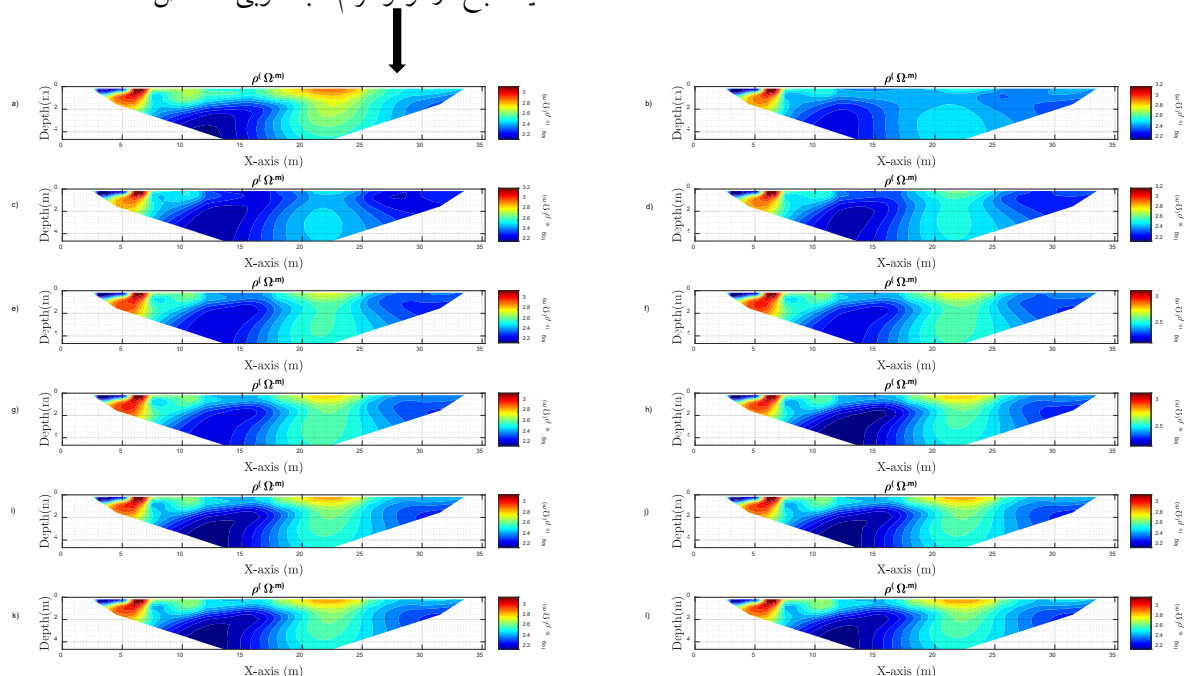
۴-۱ حل مسئله وارون با کمک منظم‌سازی تیخنوف

نتایج وارون‌سازی داده‌های صحرائی با استفاده از منظم‌سازی تیخنوف در شکل ۶ نمایش داده شده است. توموگرام‌های بدست آمده از فرآیند وارون‌سازی به ترتیب مربوط به داده‌های برداشتی در زمان‌های مختلف یعنی قبل



شکل ۶. وارون‌سازی دوازده پروفیل برداشتی در زمان‌های مختلف با آرایه ونر (فاصله الکترودی ۱/۵ متر) با استفاده از منظم‌سازی تیخنوف. به ترتیب داده‌های برداشتی در زمان‌های (a) قبل از تزریق جریان آب (b) یک ساعت و نیم بعد از تزریق جریان آب (c) سه ساعت بعد از تزریق جریان آب (d) ده ساعت بعد از تزریق جریان آب (e) چهار ساعت بعد از قطع جریان آب (f) هشت ساعت بعد از قطع جریان آب (g) شانزده ساعت بعد از قطع جریان آب (h) یک روز بعد از قطع جریان آب (i) شصت و چهار ساعت بعد از قطع جریان آب (j) پنج روز بعد از قطع جریان آب (k) یازده روز بعد از قطع جریان آب و (l) شانزده روز بعد از قطع جریان آب.

وارون‌سازی تغییرات کلی با تغییر زمان در شکل ۷ نمایش داده می‌شود. همانطور که مشاهده می‌شود با افزایش زمان تزریق مقدار مقاومت ویژه لایه‌های زیرسطحی در محل تزریق کاهش می‌یابد و این روند با قطع جریان آب معکوس شده تا جاییکه توزیع مقاومت ویژه در آخرین توموگرام (شکل ۷-۱) شباهت زیادی با توموگرام قبل از تزریق آب (شکل ۶-۱) مشاهده می‌شود. براساس نتایج منتج شده، منظم‌سازی تغییرات کلی توانسته است مرز ناحیه نفوذ آب به لایه‌های سطحی را بازیابی کند. هرچند که ناحیه اشباع در توموگرام‌ها به خوبی مشخص نشده است.



شکل ۷. وارون‌سازی دوازده پروفیل برداشتی در زمان‌های مختلف با آرایه ونر (فاصله الکترودی ۱/۵ متر) با استفاده از منظم‌سازی تغییرات کلی. به ترتیب داده‌های برداشتی در زمان‌های (a) قبل از تزریق جریان آب (b) یک ساعت و نیم بعد از تزریق جریان آب (c) سه ساعت بعد از تزریق جریان آب (d) ده ساعت بعد از تزریق جریان آب (e) چهار ساعت بعد از قطع جریان آب (f) هشت ساعت بعد از قطع جریان آب (g) شانزده ساعت بعد از قطع جریان آب (h) یک روز بعد از قطع جریان آب (i) شصت و چهار ساعت بعد از قطع جریان آب (j) پنج‌روز بعد از قطع جریان آب (k) یازده روز بعد از قطع جریان آب و (l) شانزده روز بعد از قطع جریان آب. محل تزریق آب با فلش مشکی نمایش داده شده است.

داده‌های صحرائی با استفاده از منظم‌سازی تیخنوف - تغییرات کلی وارون شد. نتایج این روش در شکل ۸ با توجه به زمان‌های مختلف نمایش داده می‌شود. همانطور که انتظار می‌رود با افزایش زمان تزریق آب میزان رسانندگی

دارد. هرچند در این مقاطع به دلیل ویژگی‌های منظم‌ساز تیخنوف مرز توده سیال در حال نفوذ به لایه‌های زیرسطحی به درستی قابل تشخیص نیست. مقاطع حاصل به طور متوسط بعد از ۱۶ با تکرار همگرا شده‌اند.

۲-۴ حل مسئله وارون با کمک منظم‌ساز تغییرات کلی

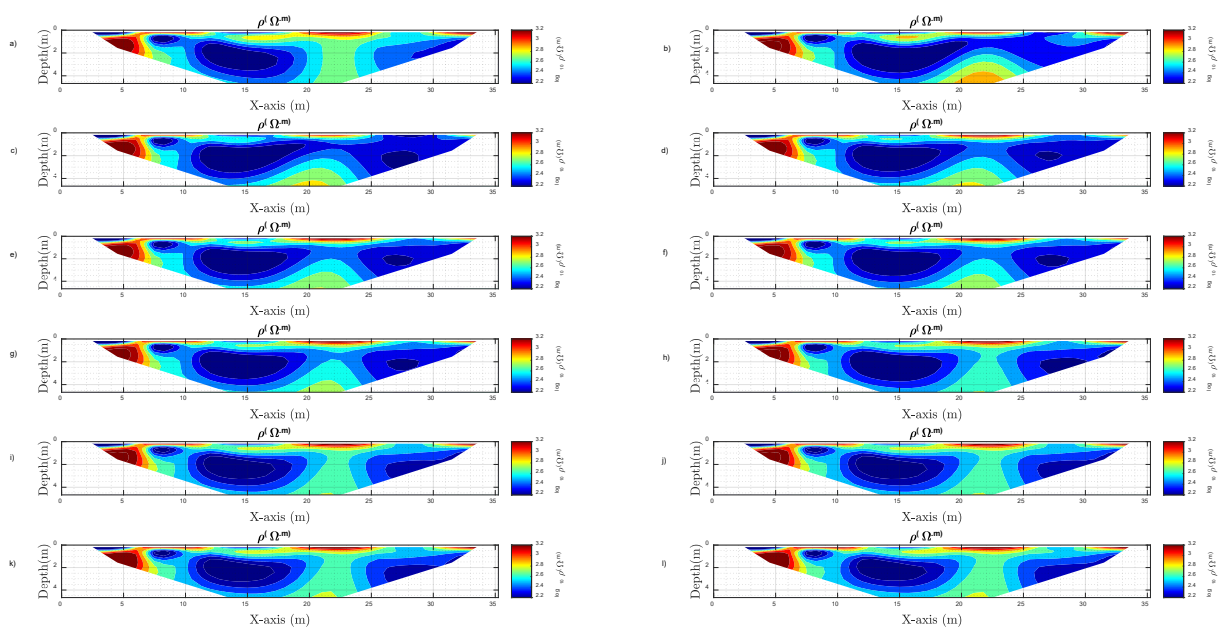
در گام بعدی داده‌های صحرائی با استفاده از منظم‌سازی تغییرات کلی وارون می‌شود. توموگرام‌های حاصل از

۳-۴ حل مسئله وارون با کمک منظم‌ساز تیخنوف - تغییرات کلی

در نهایت با هدف تصویرسازی بهتر از شرایط زیرسطحی،

تغییرات کلی (شکل ۶ و ۷)، نشان می‌دهد که تزریق جریان آب و افزایش آب زیر سطحی در زمان‌های تزریق جریان آب در سطح زمین، و همچنین کاهش مقدار آب زیر سطحی پس از قطع جریان، به طور دقیق‌تر نمایش داده شده‌اند. این نمایش دقیق‌تر نشان‌دهنده قدرت بیشتر ترکیب منظم‌سازی تیخنوف-تغییرات کلی نسبت به دو روش منظم‌سازی تیخنوف و منظم‌سازی تغییرات کلی است.

محیط زیرسطحی در محل تزریق افزایش می‌یابد (شکل ۸ b-d) تا زمانی که جریان آب قطع می‌شود و وارد مرحله بازکاوی می‌شود. در مرحله بازکاوی تغییرات مقاومت ویژه لایه‌های زیرسطحی به حالت اولیه در زمان قبل از تزریق آب می‌رسد (شکل ۸ k-l). همچنین توמוگرام‌های نمایش داده شده در شکل ۸ در مقایسه با توמוگرام‌های منتج شده از منظم‌سازی تیخنوف و



شکل ۸، وارون‌سازی دوازده پروفیل برداشتی در زمان‌های مختلف با آرایه ونر (فاصله الکترودی ۱/۵ متر) با استفاده از منظم‌سازی تیخنوف - تغییرات کلی. به ترتیب داده‌های برداشتی در زمان‌های (a) قبل از تزریق جریان آب (b) یک ساعت و نیم بعد از تزریق جریان آب (c) سه ساعت بعد از تزریق جریان آب (d) ده ساعت بعد از تزریق جریان آب (e) چهار ساعت بعد از قطع جریان آب (f) هشت ساعت بعد از قطع جریان آب (g) شانزده ساعت بعد از قطع جریان آب (h) یک روز بعد از قطع جریان آب (i) شصت و چهار ساعت بعد از قطع جریان آب (j) پنج‌روز بعد از قطع جریان آب (k) یازده روز بعد از قطع جریان آب و (l) شانزده روز بعد از قطع جریان آب. محل تزریق آب با فلش مشکی نمایش داده شده است.

این که بسیاری از مسائل ژئوفیزیکی به صورت غیرخطی و بدوضع هستند، ابتدا باید آنها را خطی‌سازی کرده و با استفاده از روش کمترین مربعات به همراه منظم‌سازی، آنها را به صورت یک الگوریتم تکراری حل کرد. به دلیل این که ساختارهای زمین معمولاً متنوع و ترکیبی از لایه‌ها به صورت هموار و لبه‌دار بوده، نیاز به منظم‌سازی وجود دارد تا بتواند تمام این ساختارها را بازسازی و نمایش

۵ نتیجه‌گیری

باتوجه به اهمیت بررسی‌های ژئوفیزیکی و اندازه‌گیری توמוگرافی مقاومت ویژه الکتریکی، ارائه الگوریتم‌های وارون با ویژگی‌های مناسب به منظور مدل‌سازی‌های بهتر ساختارهای زیرسطحی، یک ضرورت قلمداد می‌شود. همان‌طور که ذکر شد، حل مسائل وارون به دلیل ویژگی‌های خاصی که دارد، چالش‌برانگیز است. باتوجه به

- of time-lapse electrical tomography in groundwater studies. *The Leading Edge*, 17(10), 1454-1458.
- Chen, B., Abascal, J. F. P. J., and Soleimani, M. (2018). Electrical Resistance Tomography for Visualization of Moving Objects Using a Spatiotemporal Total Variation Regularization Algorithm. *Sensors*, 18(6), 1704.
- Dahlin, T. (1996). 2D resistivity surveying for environmental and engineering applications. *First break*, 14(7).
- Dahlin, T. and Zhou, B. (2001). A numerical comparison of 2D resistivity imaging with eight electrode arrays. In 7th Meeting of the Environmental and Engineering Geophysical Society (European Section), pages 977-983.
- Daubechies, I., DeVore, R., Fornasier, M., and Güntürk, C. S. (2010). Iteratively reweighted least squares minimization for sparse recovery. *Communications on Pure and Applied Mathematics: A Journal Issued by the Courant Institute of Mathematical Sciences*, 63(1), 1-38.
- Dey, A. and Morrison, H. F. (1979). Resistivity modelling for arbitrarily shaped two-dimensional structures. *Geophysical prospecting*, 27(1), pp.106-136.
- Farquharson, C. G. (2008). Constructing piecewise-constant models in multidimensional minimum-structure inversions. *Geophysics*, 73(1), K1-K9.
- Ghanati, R., Azadi, Y., and Fakhimi, R. (2020). RESIP2DMODE: A MATLAB-Based 2D Resistivity and Induced Polarization Forward Modeling Software. *Iranian Journal of Geophysics*, 13(4), 60-78.
- Ghanati, R., and Fallahsafari, M. (2022). Fréchet Derivatives calculation for electrical resistivity imaging using forward matrix method. *Iranian Journal of Geophysics*, 15(4), 153-163.
- Gholami, A., and Hosseini, S. M. (2013). A balanced combination of Tikhonov and total variation regularizations for reconstruction of piecewise-smooth signals, *Signal Processing*, vol.93, no.7, pp.1945-1960, 2013.
- Günther, T. (2004). Inversion methods and resolution analysis for the 2D/3D reconstruction of resistivity structures from DC measurements. PhD thesis, Freiberg University of Mining and Technology.
- Günther, T., Rücker, C., Spitzer, K. (2006). Three-dimensional modelling and inversion of DC resistivity data incorporating topography - II. Inversion. *Geophysical Journal International*, واقعی تری از زمین را نمایان کند. از این‌رو، منظم‌سازی تیخنوف - تغییرات کلی در این مطالعه به‌عنوان یک روش مؤثر انتخاب شد و برای حل این مسائل از الگوریتم IRLS نیز بهره برده شد. الگوریتم پیشنهادی ابتدا روی داده‌ی مصنوعی اعمال شد و سپس برای ارزیابی بهتر، از داده‌های واقعی نیز استفاده شد. برای مقایسه این منظم‌ساز و صحت سنجی آن تمامی مدل‌ها با استفاده از منظم‌ساز تیخنوف و منظم‌ساز تغییرات کلی نیز به دست آمد. نتایج نشان داده‌شده حاکی از آن بود که وارون‌سازی با استفاده از منظم‌ساز تیخنوف - تغییرات کلی نسبت به وارون‌سازی با استفاده از منظم‌سازی تیخنوف و یا تغییرات کلی بهتر بوده و جواب قابل قبول‌تری را به ما ارائه می‌دهد و نقاط قوت هر دو منظم‌ساز را به طور هم‌زمان دارا می‌باشد. در مثال مصنوعی زمانی که تغییرات زمین هم‌زمان هموار و لبه‌دار باشد مشاهده شد منظم‌سازی تیخنوف در تشخیص لایه با مرز تیز دچار مشکل بوده و منظم‌ساز تغییرات کلی در تشخیص ناحیه هموار دچار ضعف است ولی منظم‌ساز تیخنوف - تغییرات کلی توانست هم مرز تیز و هم قسمت هموار را بازسازی کند. در مرحله بعد به بررسی داده‌های واقعی پرداخته شد. توموگرام‌های الکتریکی منتج شده از وارون داده‌های در زمان‌های مختلف نشان داد که الگوریتم منظم‌ساز پیشنهادی نسبت به سایر منظم‌سازها تصویر قابل قبول‌تری از تغییرات رسانندگی محیط زیرسطحی در زمان‌های مختلف ارائه می‌دهد. هرچند تعیین پارامترهای منظم‌ساز در این حالت دشوار بوده و همچنین هزینه محاسباتی با این روش نسبتاً زیاد است.

منابع

- Aster, R. C., Borchers, B., and Thurber, C. H. (2018). *Parameter estimation and inverse problems*. Elsevier.
- Auken, E., and Christiansen, A. V. (2004). Layered and laterally constrained 2D inversion of resistivity data. *Geophysics*, 69, 752-761.
- Barker, R. and Moore, J. (1998). *The application*

- 166(2), 506–517.
- Herring, T, Heagy L. J. Pidlisecky, A. Cey, E. (2021). Hybrid parametric/smooth inversion of electrical resistivity tomography data. *Computational Geoscience*, 159, 104986.
- Khabaz, Z. T., Ghanati, R., Bérubé, C. L., (2024). Uncertainty quantification in electrical resistivity tomography inversion: hybridizing block-wise bootstrapping with geostatistics, *Geophysical Journal International*, 239(3), 1576–1596.
- Loke, M. H., Acworth, I., and Dahlin, T. (2003). A comparison of smooth and blocky inversion methods in 2D electrical imaging surveys. *Exploration geophysics*, 34(3), 182-187.
- Loke, M.H. Barker, R.D., (1996). Rapid least-squares inversion of apparent resistivity pseudo-sections by a quasi-Newton method. *Geophysical Prospecting*, 44, 131–152.
- Loke, M. H., and Barker, R. D. (1995). Least-squares deconvolution of apparent resistivity pseudosections. *Geophysics*, 60(6), 1682-1690.
- Pang, Y., Nie, L., Liu, B., Liu, Z., Wang, N., (2020). Multiscale resistivity inversion based on convolutional wavelet transform, *Geophysical Journal International*, 22(1), 132–143.
- Smith, N.C., Vozoff, K. (1984). Two dimensional DC resistivity inversion for dipole-dipole data *IEEE Trans. Geomeasurement and Remote Sensing*, 22 21-8
- Wilkinson, P.B., Chambers, J.E., Lelliott, M., Wealthall, G.P., Ogilvy, R.D., (2008). Extreme sensitivity of cross-hole electrical resistivity tomography measurements to geometric errors. *Geophysical Journal International*, 173 (1), 49–62.

Simultaneous estimation of smooth and blocky structures in tomographic inversion of electrical resistivity data

Pardis Salehi¹ and Reza Ghanati^{2*}

¹*M.Sc. Graduated, Institute of Geophysics, University of Tehran, Tehran, Iran*

²*Associate Professor, Institute of Geophysics, University of Tehran, Tehran, Iran*

(Received: 26 November 2024, Accepted: 19 January 2025)

Abstract

Electrical resistivity tomography is a non-invasive, near-surface geophysical technique commonly used for creating detailed images of the subsurface. It plays a crucial role in diverse geoscientific fields, such as subsurface resource exploration, environmental and engineering studies, soil characteristics determination, mapping hydrogeophysical properties. Electrical resistivity tomography is a technique that allows the spatial distribution of electrical conductivity (or equivalently resistivity) to be determined by passing an electric current through the Earth subsurface and measuring the Earth's response in terms of electrical voltage. Subsequently, numerical methods are used to solve nonlinear inverse problems and interpret the results. The method's adaptability and precision have made it indispensable in applications ranging from groundwater exploration and contamination assessment to archaeological investigations and infrastructure stability evaluations. Recent advancements in Electrical resistivity tomography technology, including higher resolution imaging and improved inversion algorithms, have further expanded its utility and accuracy in complex geology. In this study, the focus is on achieving a more accurate characterization of the physical properties of the subsurface Earth. The goal is to develop a model that can accurately predict the characteristics of smooth and sharp anomalies as well as the boundaries of subsurface layers. Two regularization methods including Tikhonov regularization and total variation regularization are considered. Tikhonov regularization utilizes the Gauss-Newton technique, while total variation regularization employs the Iteratively Reweighted Least Squares (IRLS) algorithm as a fast and practical approach for minimizing the overall objective function and obtaining the final model. IRLS is an optimization technique commonly used to solve problems where the objective function can be expressed as a weighted least squares problem. Tikhonov regularization leads to a smooth model of subsurface structures, while total variation regularization emphasizes edge enhancement. Since subsurface layers may simultaneously contain smooth and sharp (edge-like) structures, using only one of these methods would result in the loss of the other features. Therefore, to preserve both characteristics, this study proposes a novel strategy based on the simultaneous use of both Tikhonov and total variation regularization within a common objective function to obtain a model of electrical conductivity variations in subsurface layers that closely matches reality. The performance of the proposed algorithm is first evaluated on several synthetic models with different features. Then, its functionality is assessed through its application to field data. Numerical results demonstrate that the proposed approach enables the creation of a model of subsurface electrical conductivity distribution that bears a closer resemblance to subsurface reality.

Keywords: Electrical resistivity tomography, tikhonov regularization, total variation, ill-posedness, IRLS, Gauss-Newton