

مقایسه رویکردهای کمترین مربعات استاندارد و کمترین نرم کامل ساختار یافته برای وارون سازی مدل های ژئوفیزیکی

اصغر راست بود^{۱*}، بهنام رستمی^۲ و ابوالفضل رنجبر^۳

^۱ استادیار، گروه مهندسی نقشه برداری، دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه تبریز، تبریز، ایران

^۲ دانشجوی کارشناسی ارشد، گروه مهندسی نقشه برداری، دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه تبریز، تبریز، ایران

^۳ استادیار، گروه مهندسی نقشه برداری، دانشکده مهندسی مرنده، دانشگاه تبریز، تبریز، ایران

(دریافت: ۱۴۰۳/۰۷/۰۶، پذیرش: ۱۴۰۳/۱۱/۰۷)

چکیده

وارون سازی صحیح مدل یکی از چالش های مهم در علوم ژئوفیزیک است. صرف نظر از اینکه مسئله در قالب قطعی یا احتمالاتی مطرح شده باشد، می توان آن را با کمینه سازی یک تابع هزینه مناسب نسبت به پارامترهای مجهول حل کرد. معمولاً پیچیدگی مدل های دخیل، قابلیت استفاده از تکنیک های مبتنی بر مشتق را برای بهینه سازی در این مسائل محدود می کند. برای رفع این محدودیت، در این تحقیق از جبر رایانه ای برای محاسبه خودکار مشتقات مورد نیاز استفاده شده است. دو رویکرد کمترین مربعات و کمترین نرم کامل ساختار یافته برای وارون سازی دو مدل متفاوت تغییر شکل زمین، یعنی مدل های موگی و اوکادا مورد مقایسه قرار گرفته است. بدین منظور با فرض معلوم بودن مشخصات مدل مرجع آتشفشان و گسل، جایجایی های ارتفاعی برای هر دو مدل در سطح زمین شبیه سازی شده و وارون سازی با جایجایی های ارتفاعی بدون خطا، با خطای گاوسی و با چندین داده پرت انجام شده است. نتایج نشان می دهد که افزودن خطای گاوسی به مشاهدات شبیه سازی، تعداد تکرارها و مدت زمان پردازش را برای کمترین نرم کامل ساختار یافته افزایش می دهد. ولی میزان صحت بازیابی پارامترهای منبع با هر دو رویکرد تقریباً یکسان است. همچنین، رویکرد کمترین نرم کامل ساختار یافته با وجود داده های پرت در مشاهدات، نتایج خیلی صحیح تری نسبت به کمترین مربعات ارائه می دهد، هر چند تعداد تکرارها و مدت زمان محاسبات برای کمترین نرم کامل ساختار یافته نسبت به کمترین مربعات بیشتر است. مطابق نتایج حاصل حتی در حالت غیرخطی، استفاده از کمترین نرم کامل ساختار یافته منجر به الگوریتمی می شود که قادر به بازیابی صحیح تر مجهولات در حضور خطاهای بزرگ در چندین مشاهده است. نتایج عملکرد هر دو رویکرد برای دو مدل موگی و اوکادا تقریباً یکسان است. فقط با توجه به اینکه مدل اوکادا پیچیده تر از مدل موگی است، تعداد تکرارها و مدت زمان محاسبات برای این مدل در هر دو رویکرد بیشتر است.

کلمه های کلیدی: بهینه سازی، مسئله معکوس، جبر کامپیوتری، وارون سازی داده های ژئودتیکی، کمترین نرم کامل ساختار یافته.

۱ مقدمه

از جمله کارهای قبلی در این زمینه می‌توان به تحقیق انجام شده توسط بیفولکو و همکاران (۲۰۰۹) اشاره کرد. این مقاله به بررسی استفاده از نرم‌افزارهای جبر رایانه‌ای مانند MATLAB برای حل مسائل معکوس‌سازی مدل‌های ژئوفیزیکی با استفاده از کمترین مربعات و کمترین نرم کامل ساختاریافته می‌پردازد. روش‌های کمترین مربعات و کمترین نرم کامل ساختاریافته به‌عنوان دو رویکرد متداول برای معکوس‌سازی مدل‌های ژئوفیزیکی توضیح داده می‌شوند و مزایا و محدودیت‌های هر یک از این روش‌ها ارزیابی می‌شود. از جمله تحقیقات انجام شده قبلی درباره کاربرد مشتق‌گیری خودکار برای وارون‌سازی مدل‌های ژئوفیزیکی می‌توان به راث و همکاران (۲۰۰۶) اشاره کرد.

در تحقیق دیگری روزن و همکاران (۱۹۹۸) به بررسی استفاده از روش کمترین نرم کامل ساختاریافته برای حل مسائل غیرخطی می‌پردازند. کمترین نرم کامل ساختاریافته یک روش بهینه‌سازی است که به حل مسائل معکوس غیرخطی کمک می‌کند. مطابق نتایج این تحقیق روش کمترین نرم کامل ساختاریافته به‌طور مؤثر خطاها را در متغیرهای ورودی و خروجی در نظر می‌گیرد. این روش قادر است ساختار ویژه مسأله را در فرایند بهینه‌سازی حفظ کند. این مقاله به بررسی ویژگی‌ها و مزایای روش کمترین نرم کامل ساختاریافته در مقایسه با سایر روش‌های موجود می‌پردازد و به این نتیجه می‌رسد که این روش می‌تواند به‌عنوان یک جایگزین مناسب برای روش‌های معمول کمترین مربعات غیرخطی استفاده شود. به‌طور کلی، این مقاله نشان می‌دهد که کمترین نرم کامل ساختاریافته یک روش قدرتمند و مؤثر برای حل مسائل معکوس غیرخطی است که می‌تواند به‌طور مؤثری خطاها را در داده‌های ورودی

مسئله برآورد مقادیر پارامترهای فیزیکی زیر سطحی از داده‌های مشاهداتی سطحی یک موضوع بسیار مهم در هر تحقیق ژئوفیزیکی است. در ادبیات ژئوفیزیکی این مسئله با عنوان وارون‌سازی مدل بیان شده است. هدف از وارون‌سازی مدل ترکیب اطلاعات ناشی از تئوری‌های ژئوفیزیکی و مشاهداتی سطحی به منظور استنتاج برخی از ویژگی‌های زیرسطحی زمین است. رویکرد کمترین نرم کامل ساختاریافته به‌عنوان یک ابزار کارآمد در حل مسائل معکوس در علوم ژئوفیزیک شناخته می‌شود. این روش به‌خصوص در شرایطی که داده‌ها تحت تأثیر نویز، مقادیر پرت یا عدم قطعیت قرار دارند، کاربرد فراوانی دارد. هدف اصلی این رویکرد، بازیابی صحیح ویژگی‌های زیرسطحی زمین از داده‌های مشاهده‌شده است. مزیت عمده این روش، توانایی آن در مواجهه با خطاهای بزرگ در مشاهدات است. با استفاده از این روش، می‌توان پارامترهای زیرسطحی را با صحت بیشتری به‌ویژه در شرایط غیرخطی و پیچیده، بازیابی کرد. این رویکرد به محققان این امکان را می‌دهد که به تحلیل‌های صحیح‌تری از ساختارهای زیرسطحی بپردازند و درک بهتری از فرآیندهای ژئوفیزیکی به‌دست آورند. روش‌های سنتی مانند کمترین مربعات ممکن است در حضور نویز و مقادیر پرت صحت کمتری داشته باشند، زیرا این روش‌ها به‌طور کلی بر اساس میانگین‌گیری عمل می‌کنند و به‌راحتی تحت تأثیر داده‌های پرت قرار می‌گیرند. هدف تحقیق حاضر مقایسه دو رویکرد کمترین نرم کامل ساختاریافته و کمترین مربعات از لحاظ تعداد تکرار و مدت زمان اجرا و میزان صحت وارون‌سازی برای دو مدل ساده و پیچیده ژئوفیزیکی در شرایط مختلف وجود خطا در مشاهدات و بررسی مزایا و معایب هر کدام از آنهاست.

و خروجی در نظر بگیرد.

در تحقیق دیگری روزن و همکاران (۲۰۰۰) به بررسی استفاده از کمینه‌سازی نرم L_1 برای حل معادلات خطی با تعداد معادله بیشتر از تعداد مجهولات (فرامعین) که شامل خطا هستند، می‌پردازند. مطابق این تحقیق در بسیاری از مسائل واقعی، داده‌های اندازه‌گیری شده دارای خطا هستند که این خطاها می‌توانند بر روی نتایج معکوس‌سازی تأثیر بگذارند. روش‌های کمترین مربعات معمولی برای چنین مسائلی ممکن است به جواب‌های نامطلوب منجر شوند. این مقاله نشان می‌دهد که استفاده از کمینه‌سازی نرم L_1 می‌تواند جواب‌های دقیق‌تری را در مقایسه با روش‌های کمترین مربعات ارائه دهد. این مقاله به بررسی ویژگی‌ها و مزایای استفاده از نرم L_1 برای این نوع مسائل می‌پردازد. همچنین، نتایج عددی برای مثال‌هایی از مسائل پردازش سیگنال ارائه شده است که توانایی استفاده از نرم L_1 را نشان می‌دهد. در مجموع، این مقاله نشان می‌دهد که استفاده از کمینه‌سازی نرم L_1 می‌تواند جواب دقیق‌تری را برای معادلات خطی فرامعین با خطا ارائه دهد.

مقاله دیگری از روزن و همکاران (۱۹۹۶) به بررسی استفاده از روش کمترین نرم کامل برای حل مسائل با ساختار خاص می‌پردازد. کمترین نرم کامل یک روش بهینه‌سازی است که برای رفع محدودیت‌های روش کمترین مربعات معمول ارائه شده است. مطابق بررسی‌های انجام شده در این تحقیق در بسیاری از مسائل واقعی، داده‌های اندازه‌گیری شده دارای خطا در متغیرهای ورودی و خروجی هستند. روش‌های کمترین مربعات معمول به خوبی با این مسئله کنار نمی‌آیند. کمترین نرم کامل به‌طور مؤثر خطاهای موجود در داده‌های ورودی و خروجی را در نظر می‌گیرد و جواب‌های بهتری را ارائه می‌دهد. این مقاله فرمول‌بندی کمترین نرم کامل را برای مسائل با ساختار خاص ارائه

می‌کند و الگوریتم‌های کارآمدی را برای حل آن توسعه می‌دهد. همچنین به بررسی ویژگی‌ها و مزایای کمترین نرم کامل نسبت به سایر روش‌ها می‌پردازد. نتایج عددی برای چندین مثال واقعی از پردازش سیگنال ارائه شده است که توانایی کمترین نرم کامل را در حل این مسائل نشان می‌دهد. در مجموع، این مقاله نیز نشان می‌دهد که کمترین نرم کامل یک روش قدرتمند برای حل مسائل با ساختار خاص است که می‌تواند خطاهای موجود در داده‌های ورودی و خروجی را به‌طور مؤثری در نظر بگیرد.

تحقیق دیگری توسط روزن و همکاران (۲۰۰۰) به ارائه یک الگوریتم مبتنی بر کمترین نرم L_1 برای شناسایی سیگنال‌های ترکیبی می‌پردازد. مطابق نکات مطرح شده در این تحقیق در بسیاری از کاربردها مانند پردازش سیگنال و تصویر، نیاز به شناسایی و جداسازی سیگنال‌های ترکیبی وجود دارد. روش‌های مرسوم مانند کمترین مربعات برای این مسئله مناسب نیستند زیرا فرض می‌کنند که نویز موجود در داده‌ها گاوسی است. در این مقاله، یک الگوریتم مبتنی بر کمترین نرم L_1 ارائه شده است که می‌تواند سیگنال‌های ترکیبی را با انواع مختلف نویز شناسایی کند. نرم L_1 به‌طور مؤثرتر از نرم L_2 (کمترین مربعات) با وجود نویزهای غیرگاوسی مانند نویز پراکنده کنار می‌آید. الگوریتم پیشنهادی از یک رهیافت بهینه‌سازی محدود استفاده می‌کند تا سیگنال‌های ترکیبی را شناسایی کند. نتایج شبیه‌سازی و آزمایشی روی داده‌های واقعی نشان می‌دهد که این الگوریتم در مقایسه با روش‌های متداول عملکرد بهتری دارد. در مجموع، این مقاله یک الگوریتم قدرتمند مبتنی بر کمترین نرم L_1 را برای شناسایی سیگنال‌های ترکیبی با انواع مختلف نویز ارائه می‌کند.

تحقیق دیگری توسط ون‌هافل و همکاران (۱۹۹۶) به بررسی استفاده از روش کمترین نرم کامل برای برآورد

پارامترها در مسائل با ساختار خاص می‌پردازد. این تحقیق به ذکر این نکات می‌پردازد که در بسیاری از مسائل واقعی مانند پردازش سیگنال و تصویر، داده‌های اندازه‌گیری شده دارای خطا در متغیرهای ورودی و خروجی هستند و روش‌های کمترین مربعات معمول نمی‌توانند به خوبی با این نوع خطاهای موجود در داده‌ها کنار بیایند. در ادامه روش کمترین نرم کامل به عنوان یک رویکرد جایگزین معرفی شده است که به طور مؤثر خطاهای ورودی و خروجی را در نظر می‌گیرد. سپس فرمول‌بندی کمترین نرم کامل را برای مسائل با ساختار خاص ارائه می‌کند و الگوریتم‌های کارآمد برای حل آن را توسعه می‌دهد. یک الگوریتم بهینه‌سازی برای حل مسائل کمترین نرم کامل با ساختار خاص ارائه شده است. نتایج عددی برای چندین مثال واقعی از مسائل پردازش سیگنال نشان می‌دهد که کمترین نرم کامل نسبت به روش‌های معمول عملکرد بهتری دارد. در مجموع، این مقاله نشان می‌دهد که کمترین نرم کامل یک روش قدرتمند برای برآورد پارامترها در مسائل با ساختار خاص است که می‌تواند خطاهای موجود در داده‌های ورودی و خروجی را به طور مؤثری در نظر بگیرد.

مقاله‌ای از ژانگ و همکاران (۲۰۱۷) به مسئله برآورد پارامترها در یک مدل خطی با خطا در متغیرها (EIV) و ساختار خاص می‌پردازد. در بسیاری از مسائل مهندسی و علمی، مدل‌های خطی با خطای در متغیرهای ورودی و خروجی مورد استفاده قرار می‌گیرند. روش‌های کمترین مربعات معمول برای برآورد پارامترها در این مدل‌ها مناسب نیستند زیرا فرض می‌کنند که فقط خطا در متغیرهای خروجی وجود دارد. در این مقاله، یک رویکرد مبتنی بر کمترین نرم کامل برای برآورد پارامترها در مدل‌های خطی با ساختار خاص ارائه شده است. این رویکرد خطاهای موجود در متغیرهای ورودی و خروجی را به طور همزمان در نظر می‌گیرد و به طور موثرتری پارامترها را برآورد می‌کند. یک الگوریتم کارآمد برای حل مسئله بهینه‌سازی مربوطه ارائه شده است. نتایج شبیه‌سازی و آزمایش بر روی داده‌های واقعی نشان داده است که رویکرد ارائه شده نسبت به روش‌های کمترین مربعات عملکرد بهتری دارد. در مجموع، این مقاله یک رویکرد مبتنی بر کمترین نرم کامل را برای برآورد پارامترها در مدل‌های خطی EIV با ساختار خاص معرفی می‌کند که می‌تواند خطاهای موجود در متغیرها را به طور مؤثر در نظر بگیرد.

مقاله‌ای از زی و همکاران (۲۰۲۴) به ارائه روشی برای حل مسئله خطا در متغیرها در مدل‌های خطی

پارامترها در مسائل با ساختار خاص می‌پردازد. این تحقیق به ذکر این نکات می‌پردازد که در بسیاری از مسائل واقعی مانند پردازش سیگنال و تصویر، داده‌های اندازه‌گیری شده دارای خطا در متغیرهای ورودی و خروجی هستند و روش‌های کمترین مربعات معمول نمی‌توانند به خوبی با این نوع خطاهای موجود در داده‌ها کنار بیایند. در ادامه روش کمترین نرم کامل به عنوان یک رویکرد جایگزین معرفی شده است که به طور مؤثر خطاهای ورودی و خروجی را در نظر می‌گیرد. سپس فرمول‌بندی کمترین نرم کامل را برای مسائل با ساختار خاص ارائه می‌کند و الگوریتم‌های کارآمد برای حل آن را توسعه می‌دهد. یک الگوریتم بهینه‌سازی برای حل مسائل کمترین نرم کامل با ساختار خاص ارائه شده است. نتایج عددی برای چندین مثال واقعی از مسائل پردازش سیگنال نشان می‌دهد که کمترین نرم کامل نسبت به روش‌های معمول عملکرد بهتری دارد. در مجموع، این مقاله نشان می‌دهد که کمترین نرم کامل یک روش قدرتمند برای برآورد پارامترها در مسائل با ساختار خاص است که می‌تواند خطاهای موجود در داده‌های ورودی و خروجی را به طور مؤثری در نظر بگیرد.

مقاله دیگری از جین و همکاران (۲۰۱۵) به بررسی روش‌های برآورد پارامترها در مدل تبدیل مختصات با ماتریس پارامتر ساختاردار می‌پردازد. در مسائل تبدیل مختصات، معمولاً داده‌های اندازه‌گیری شده دارای خطا هستند که باید در نظر گرفته شود. روش‌های کمترین مربعات معمول برای برآورد پارامترها مناسب نیستند زیرا فرض می‌کنند که خطای داده‌ها گاوسی است. در این مقاله، دو رویکرد مبتنی بر کمترین نرم L_1 و L_2 برای تخمین پارامترها در مدل تبدیل مختصات با ماتریس پارامتر ساختاردار ارائه شده است. رویکرد حداقل نرم L_1 مقاوم در برابر نویزهای غیرگاوسی است و به طور مؤثرتری با آنها کنار می‌آید. رویکرد کمترین نرم L_2

مسئله کمترین نرم کامل وزن‌دار ارائه می‌دهد که به طور قابل توجهی بر کارایی محاسباتی آن می‌افزاید. در تحقیق دیگری هو و همکاران (۲۰۲۴) مدل عمومی خطا در متغیرها (EIV) را تجزیه و تحلیل کردند، که به ماتریس ضرایب نامشخص و ماتریس پراکندگی اجازه می‌دهد تا دارای کمبود مرتبه باشند. آنها جواب کمترین مربعات کامل وزنی (WTLS) را در حالت کلی بدست آورده و با شرایط سازگاری مدل دریافتند که اگر ماتریس ضرایب دارای مرتبه ستونی کامل باشد، بردار پارامتر و بردار باقیمانده را می‌توان به طور منحصر به فرد مستقل از تکنیک ماتریس پراکندگی تعیین کرد. در حالت کمبود مرتبه، توابع قابل تخمین و بردار باقیمانده را می‌توان به طور منحصر به فرد تعیین کرد. در نتیجه، یک رویکرد واحد برای WTLS با استفاده از ماتریس‌های معکوس تعمیم‌یافته به عنوان ابزار اصلی ارائه می‌کنند. این روش یکپارچه است زیرا کلیات تنظیم مدل مانند تکنیک ماتریس پراکندگی و چند خطی بودن ماتریس ضرایب را به طور کامل در نظر می‌گیرد و انعطاف پذیر است زیرا نیازی به تشخیص حالت‌های مختلف قبل از تعدیل ندارد. هان و همکاران (۲۰۲۰) به ارائه یک مدل جامع برای مسئله خطای جزئی در متغیرها و همچنین یک الگوریتم جدید مبتنی بر کمترین نرم کامل وزن‌دار برای حل آن می‌پردازند. در مسئله خطای جزئی در متغیرها، فرض می‌شود که خطا تنها در برخی از متغیرهای مستقل وجود دارد و نه در همه آنها. این مدل واقع‌بینانه‌تر از مدل‌های کلاسیک خطای در متغیرها است که همه متغیرها خطا دار فرض می‌شوند. مقاله ابتدا این مدل جامع را به طور ریاضی توصیف می‌کند. سپس یک الگوریتم جدید مبتنی بر کمترین نرم کامل وزن‌دار ارائه می‌دهد که قادر است این مدل را حل کند. نتایج شبیه‌سازی و مثال‌های عددی نشان می‌دهند که الگوریتم پیشنهادی در مقایسه با روش‌های موجود، برآورد دقیق‌تری از پارامترهای مدل

می‌پردازد. مسئله به این صورت است که در یک مدل خطی، نه تنها خطا در متغیر وابسته وجود دارد، بلکه خطاهایی در متغیرهای مستقل نیز وجود دارد. مقاله یک رویکرد مبتنی بر کمترین نرم کامل را پیشنهاد می‌کند. این روش به صورت همزمان خطاهای موجود در متغیرهای ورودی و خروجی را در نظر می‌گیرد و پارامترهای مدل را به گونه‌ای برآورد می‌کند که مجموع نرم‌های خطاها کمینه شود. الگوریتم ارائه شده مبتنی بر روش نقطه داخلی (interior point method) است و به‌طور مؤثرتری نسبت به روش‌های کمترین مربعات معمول می‌تواند پارامترهای مدل را برآورد کند. نتایج شبیه‌سازی و آزمایش بر روی داده‌های واقعی این برتری را نشان می‌دهد. در مجموع، این مقاله یک رویکرد جدید و کارآمد برای حل مسئله خطای در متغیرها در مدل‌های خطی ارائه می‌دهد.

وانگ و همکاران (۲۰۲۱) به بررسی مسئله کمترین نرم کامل وزن‌دار می‌پردازند. در این مسئله هدف، برآورد پارامترهای مدل خطی در حضور خطا در متغیرهای ورودی و خروجی است، با این تفاوت که به هر یک از این خطاها وزن متفاوتی داده می‌شود. مقاله ابتدا روش کمترین نرم کامل وزن‌دار را به‌طور کامل توضیح می‌دهد. سپس برای افزایش کارایی محاسباتی این روش، یک رویکرد جدید ارائه می‌کند. مزیت اصلی این رویکرد جدید، کاهش بار محاسباتی و زمان اجرا در مقایسه با روش‌های معمول کمترین نرم کامل وزن‌دار است. این مزیت به ویژه در حل مسائل بزرگ مقیاس و زمان واقعی مشهود است. نتایج شبیه‌سازی و مثال‌های عددی نشان می‌دهند که رویکرد پیشنهادی تا ۵۰٪ کارایی محاسباتی بهتری نسبت به روش‌های قبلی دارد. همچنین این مقاله نتایج آزمایش بر روی داده‌های واقعی را نیز ارائه می‌کند که مزیت این روش را تایید می‌کند. در مجموع، این مقاله یک الگوریتم کارآمد برای حل

شبهه‌سازی شده و وارون‌سازی با دو رویکرد کمترین مربعات و کمترین نرم کامل ساختاریافته انجام می‌شود. مطابق نتایج حاصله علی‌رغم پیچیدگی محاسباتی بیشتر، برتری رویکرد کمترین نرم کامل ساختاریافته نسبت به کمترین مربعات در بازیابی صحیح‌تر پارامترهای مجهول بویژه در حالتی که تعدادی از مشاهدات دارای خطای بزرگ باشند، ثابت می‌شود.

۲ وارون‌سازی

تئوری‌های ژئوفیزیکی در حالت کلی با مجموعه‌ای از معادلات که مقادیر پارامترهای مجهول را به مشاهدات فیزیکی مرتبط می‌کنند، نشان داده می‌شوند. مجموعه معادلات، مدل را تشکیل می‌دهند:

$$y_i = f_i(\theta), \quad (1)$$

$$\theta \in \Theta, i = 1, 2, \dots, N$$

در معادله (۱) به دلیل تعداد محدود اندازه‌گیری‌هایی که از مشاهده می‌توان به دست آورد، بر ماهیت محدود داده‌های مشاهداتی تأکید شده است. مجموعه پارامترهای مجهول دارای حالت عمومی‌تری است زیرا برخی از مجهولات به صورت توابع پیوسته بیان می‌شوند. در حالت کلی نمی‌توان یک تابع پیوسته را از مجموعه‌ای محدود و گسسته از داده‌های مشاهداتی برآورد کرد و در این حالت، مسئله وارون‌سازی تنها در صورتی قابل حل است که اطلاعات پیشینی مناسب بیشتری در مورد پارامترهای مجهول θ در دسترس باشد.

در این تحقیق فقط حالتی در نظر گرفته می‌شود که در آن مجموعه پارامتر Θ زیرمجموعه‌ای از یک فضای با ابعاد محدود است که با مسئله وارون‌سازی مدل محدود سروکار دارد. علاوه بر این، در غیاب قیود صریح (قیود قابل قبول فیزیکی یا اطلاعات پیشینی) روی مقادیر پارامترهای مجهول، کل فضای R^n , ($n < N$) برای Θ در نظر گرفته می‌شود.

مشاهدات ژئودتیکی و ژئوفیزیکی به دلیل نویز ناشی

ارائه می‌دهد. همچنین مقاله نتایج آزمایش بر روی داده‌های واقعی را نیز ارائه می‌کند که مزیت این روش را تایید می‌کند. در مجموع، این مقاله یک مدل جامع برای خطای جزئی در متغیرها و یک الگوریتم کارآمد برای حل آن ارائه می‌دهد که می‌تواند در کاربردهای مختلف مورد استفاده قرار گیرد.

نعیمی و وثوقی (۲۰۲۰) به معرفی یک الگوریتم تکراری اصلاح شده برای حل مسئله کمترین نرم کامل وزن‌دار می‌پردازند. مسئله کمترین نرم کامل وزن‌دار یک روش مهم برای برآورد پارامترهای مدل در حضور خطا در همه متغیرها است. این مقاله بر روی بهبود و سرعت بخشیدن به الگوریتم حل این مسئله تمرکز دارد. مقاله ابتدا مسئله کمترین نرم کامل وزن‌دار و ویژگی‌های آن را به‌طور ریاضی توصیف می‌کند. سپس یک الگوریتم تکراری اصلاح شده برای حل این مسئله ارائه می‌دهد. این الگوریتم در مقایسه با روش‌های موجود، از سرعت همگرایی بالاتری برخوردار است. همچنین مقاله نتایج شبهه‌سازی و مثال‌های عددی را ارائه می‌دهد که برتری این روش را نسبت به روش‌های قبلی نشان می‌دهد. در مجموع، این مقاله یک الگوریتم جدید و کارآمد برای حل مسئله کمترین نرم کامل وزن‌دار معرفی می‌کند که می‌تواند در کاربردهای مختلف مورد استفاده قرار گیرد. در تحقیق حاضر نخست روند حل مسائل معکوس در ژئوفیزیک و چالش‌های آن بررسی می‌شود. سپس رویکرد کمترین نرم کامل ساختاریافته همراه با الگوریتم‌های بهینه‌سازی و جبر رایانه‌ای جهت مشتق‌گیری خودکار برای حل این مسائل مطرح می‌شود. برای ساخت ماتریس ژاکوبین از جبر رایانه‌ای استفاده می‌شود. در ادامه دو مدل متداول ژئوفیزیکی یعنی موگی برای آتشفشان و اوکادا برای گسل معرفی شده و جایجایی‌های ارتفاعی ناشی از آنها در سه حالت بدون خطا، با خطای اتفاقی و چندین داده پرت در سطح زمین

است نوعی تکنیک منظم‌سازی استفاده شود، به‌عنوان مثال، اضافه کردن یک عبارت جریمه به تابع هزینه برای وزن‌دهی عدم تطابق مابین پارامترهای برآورد شده و برخی اطلاعات پیشینی در مورد آنها، که منجر به رابطه‌ای شبیه به رابطه زیر می‌شود:

$$\hat{\theta} = \arg \min \{L(\theta) + G(\theta - \theta^0)\} \quad (6)$$

اگر توزیع احتمال نویز و یا توزیع پیشینی θ معلوم باشد، هر دو مسئله (۳) و (۶) را می‌توان با استفاده از یک قالب آماری حل کرد. در این حالت می‌توان از فرمولاسیون بایزین (تاراتولا، ۱۹۸۷) مسئله استفاده کرد و نسبت به θ کمینه‌سازی نمود:

$$L(\theta) = (Z - F(\theta))' C_{ee}^{-1} (Z - F(\theta)) + (\theta - \theta^0)' C_{\theta\theta}^{-1} (\theta - \theta^0) \quad (7)$$

در رابطه (۷) C_{ee} و $C_{\theta\theta}$ به ترتیب ماتریس‌های نویز و کوواریانس پیشینی پارامترهای مجهول هستند. همین رابطه را می‌توان به‌عنوان رویکرد کمترین مربعات قطعی با یک جمله منظم‌سازی تیخونوف در نظر گرفت (تیخونوف و آرسنین، ۱۹۷۷).

۳ رویکرد کمترین نرم کامل ساختاریافته

رویکرد کمترین نرم خطی کلاسیک برای مدل (۵) فرض می‌کند که ماتریس Φ کاملاً معلوم است و منبع هرگونه خطای اتفاقی یا جنبه‌های آماری مسئله به e_i محدود می‌شود. علاوه بر این، انتخاب نرم L_2 با این فرض سازگار است که خطاهای e_i از توزیع گاوسی پیروی می‌کنند. در صورتی که ماتریس Φ تحت تأثیر خطاهای ناشناخته ولی ساختاریافته $\Delta\Phi$ قرار داشته باشد، مسئله را می‌توان به‌فرم کمترین نرم کامل ساختاریافته (STLN) فرموله کرد:

$$\min_{\theta, \Delta Z, \Delta\Phi} \|(\Delta\Phi, \Delta Z)\|$$

تحت قیود:

$$(\Phi + \Delta\Phi)\theta = Z + \Delta Z$$

در رابطه فوق $\Delta\Phi$ دارای ساختار است و $\| \cdot \|$ نشان‌دهنده

از عدم دقت ذاتی فرآیند اندازه‌گیری و خطاهای سیستماتیک ناشی از پدیده‌های مدل‌سازی نشده، همیشه داده‌های آلوده‌ای ارائه می‌دهند. با فرض اینکه e_i نشان‌دهنده کل نویز موجود در مشاهده i ام باشد، معادله (۱) را می‌توان به‌صورت زیر بازنویسی کرد:

$$z_i = f_i(\theta) + e_i \quad (2)$$

که $z_i, i = 1, \dots, N$ نشان‌دهنده داده‌های اندازه‌گیری شده است. با پیروی از رویکرد کلاسیک معیار کمترین خطای خروجی، مسئله به یک مسئله بهینه‌سازی تبدیل می‌شود. برآورد بهینه برای پارامتر θ از بهترین برازش داده‌های مشاهداتی، یعنی با کمینه‌سازی یک تابع هزینه مناسب که بر روی تمام خطاهای مشاهداتی ارزیابی می‌شود، حاصل می‌گردد:

$$\hat{\theta} = \arg \min \{L(\theta) | \theta \in \Theta\} \quad (3)$$

در حالت معیار کمترین نرم، تابع هزینه به‌صورت یک نرم در فضای R^N انتخاب می‌شود:

$$L(\theta) = \|Z + F(\theta)\|_p \quad (4)$$

با

$$Z = [z_1 \ z_2 \ \dots \ z_N]' \\ F(\theta) = [f_1(\theta) \ f_2(\theta) \ \dots \ f_N(\theta)]'$$

مقدار حقیقی p نشان‌دهنده نوع نرم استفاده شده است، $1 \leq p \leq \infty$. انتخاب متداول $p = 2$ معیار کمترین مربعات را تعریف می‌کند. یک حالت خاص مرتبط، وارون‌سازی مدل خطی است، که در آن

$$F(\theta) = \Phi\theta \quad (5)$$

یک سؤال در ارتباط با رابطه (۳) در مورد خوش‌وضع بودن مسئله است. در واقع، حتی اگر بعد n فضای پارامترهای مجهول بزرگتر از بعد فضای مشاهدات N باشد، مقادیر مختلف پارامترهای مجهول می‌توانند به مقدار یکسانی از تابع هزینه منجر شوند (منحصربه‌فرد نبودن)، یا تغییرات کوچک در Z می‌تواند باعث ایجاد تغییرات بزرگ در θ شود (ناپایداری). به این دلایل، لازم

که اگر $C_{\theta\theta}^{-1}$ یا Φ و C_{ee}^{-1} مرتبه کامل باشند خوش تعریف است. محاسبات عددی قابل اعتماد $\hat{\theta}$ می‌تواند کار بسیار دشواری باشد به‌ویژه برای مسائل با ابعاد بزرگ و زمانی که ماتریس ضرایب بدشرط باشد (بیورک، ۱۹۹۶؛ هانسن، ۱۹۹۸).

در هر حالت دیگری باید از یک الگوریتم بهینه‌سازی مناسب برای حل (۳) یا (۶) استفاده شود. به‌منظور مقابله با یک حالت خاص، ماهیت تابع برای شناسایی مناسب‌ترین رویکرد بررسی می‌شود. آیا تابع هزینه محدب است؟ هموار است؟ آیا مسئله مقید است یا نامقید؟ و چه نوع قیدهایی وجود دارد؟

ساده‌ترین حالت در حضور یک تابع هزینه منظم و کاملاً محدب است که باید در کل فضای پارامتر کمینه شود. الگوریتم‌های زیادی برای حل این مسئله وجود دارد (ولف، ۱۹۷۸؛ دنیس و شنابل، ۱۹۹۶؛ نوسدال و رایت، ۱۹۹۹). در صورتی که هیچ‌یک از این فرضیه‌ها تأیید نشود، یک روش مناسب مبتنی بر برنامه‌ریزی غیرخطی (بازارا و همکاران، ۱۹۹۳؛ برتسکاس، ۱۹۹۹) یا بهینه‌سازی سراسری (هورست و پارداالوس، ۱۹۹۵؛ پارداالوس و روماین، ۲۰۰۲) باید اجرا شود. مهم نیست از چه نوع الگوریتمی استفاده می‌شود، اقدام اساسی (که کل مسئله را حل می‌کند یا به‌عنوان بلوک ساختاری برای الگوریتم پیچیده‌تر استفاده می‌شود) یک جستجوی محلی است که شامل یافتن کمینه محلی تابع هزینه است که از یک عدد نقطه معلوم شروع می‌شود.

با فرض اینکه تابع به اندازه کافی هموار باشد، آخرین کار ذکر شده را می‌توان با چندین روش انجام داد (نوسدال و رایت، ۱۹۹۹). بسیاری از این روش‌ها مستلزم آگاهی از مشتقات مرتبه اول و در برخی موارد مرتبه بالاتر تابع هزینه نسبت به پارامترها هستند. از آنجایی که معادلات مدل به دست آمده از قوانین ژئوفیزیکی می‌تواند بسیار پیچیده باشد، انجام این محاسبه به‌صورت

یک نرم ماتریس مناسب است. اگر $\| \cdot \|_0$ نرم فروبنیوس باشد، مسئله کمترین مربعات کامل ساختاریافته نامیده می‌شود (گلوب و ون لان، ۱۹۸۰).

هر مدل به فرم کلی رابطه (۸) در نظر گرفته می‌شود:

$$y = \Phi(\alpha)\theta \quad (8)$$

که در آن بردار θ پارامترهای مجهولی را نشان می‌دهد که به صورت خطی ظاهر می‌شوند و بردار α پارامترهای مؤثر بر ساختار غیرخطی مدل را نشان می‌دهد (یعنی اغتشاشات ساختاریافته ماتریس Φ را تعریف می‌کند). با توجه به برآورد پیشینی $\hat{\alpha}$ ، مسئله شناسایی را می‌توان به عنوان یک STLN مطرح کرد:

$$\min_{\theta, \alpha} \left\| \Phi(\alpha)\theta - Z \right\|_p, \quad p = 1, 2, \infty \quad (9)$$

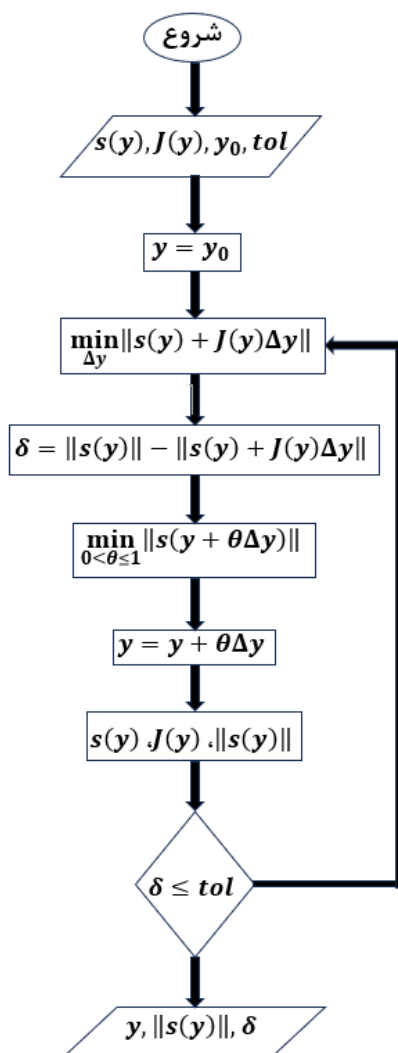
که در آن D یک ماتریس وزن قطری مثبت است و نرم p باید براساس ویژگی‌های خطای مورد انتظار انتخاب شود. برای $p = 2$ توزیع احتمال خطای گاوسی (یا نزدیک به گاوسی) مناسب است، $p = \infty$ باید در حضور خطاهای ناشناخته اما محدود انتخاب شود زمانی که یک رویکرد برآورد حداقل - حداکثر به نتایج خوبی منجر می‌شود (نورتون، ۱۹۹۴، ۱۹۹۵). در نهایت $p = 1$ زمانی که انتظار می‌رود تعداد کمی از داده‌های اندازه‌گیری تحت تأثیر خطاهای بسیار بزرگ قرار دارند، انتخاب مناسبی است.

۴ الگوریتم‌های بهینه‌سازی

مسئله بهینه‌سازی را می‌توان به‌راحتی با یک رویکرد تحلیلی حل کرد، تنها در صورتی که تابع هزینه شامل پارامترهای مدل به‌صورت خطی یا درجه دوم باشد. برای مدل (۵) و تابع هزینه (۷) جواب مسئله به صورت بسته زیر بیان می‌شود:

$$\hat{\theta} = (\Phi' C_{ee}^{-1} \Phi + C_{\theta\theta}^{-1})^{-1} (\Phi' C_{ee}^{-1} Z + C_{\theta\theta}^{-1} \theta^0) \quad (10)$$

خطی (LP) است.



شکل ۱. الگوریتم کمترین نرم (LN).

۵ مدل‌های ژئوفیزیکی مورد آزمون

در این بخش دو نوع مدل ژئوفیزیکی مورد استفاده برای آزمون رویکرد پیشنهادی معرفی می‌شوند که یکی مربوط به جابجایی‌های سطحی ناشی از یک گسل (اوکادا، ۱۹۸۵) و دیگری ارتباط فشار یک مخزن ماگما به جابجایی‌های سطحی (موگی، ۱۹۸۵) است. این دو مدل مربوط به پدیده‌های ژئوفیزیکی متفاوتی بوده و از نظر پیچیدگی‌های محاسباتی نیز یکسان نیستند و بطور

تحلیلی با دست ممکن است تقریباً غیرممکن باشد. این اغلب منجر به استفاده از مشتق‌گیری تقریبی (نوسدال و رایت، ۱۹۹۹) یا روش‌های بهینه‌سازی سراسری می‌شود که نیازی به مشتق‌گیری ندارند، مانند روش‌هایی که مبتنی بر ژنتیک یا شبیه‌سازی تبرید هستند (کرک پاتریک و همکاران، ۱۹۸۳؛ گلدبرگ، ۱۹۸۹). رویکرد اول، مبتنی بر روش تفاضل محدود (FD)، زمانی که دقت تابع هدف رضایت‌بخش نیست، می‌تواند مشکل‌ساز باشد و خطاهایی ایجاد کند که پیش‌بینی آنها دشوار است و باعث عدم همگرایی شود. رویکرد دوم پایدار است اما می‌تواند بسیار زمان‌بر باشد زیرا کاهش تابع هزینه، کم و بیش به یک راهبرد تصادفی واگذار می‌شود.

هر دو روش مورد استفاده در تحقیق حاضر نیاز به محاسبه مشتقات دارند. به‌ویژه، مسئله کمترین مربعات غیرخطی توسط الگوریتم‌های استاندارد مانند گاوس-نیوتن و لوونبرگ-مارکوارت حل می‌شود، که شامل حل تکراری یک مسئله کمترین مربعات خطی بر اساس ژاکوبین $F(\theta)$ است (بیورک، ۱۹۹۶).

در روزن و همکاران (۲۰۰۰) یک الگوریتم بسیار کلی برای حل مسئله $STLN$ (۹) ارائه شده است. با تعریف

$$y = \begin{pmatrix} \alpha \\ \theta \end{pmatrix}, \quad s(y) = \begin{pmatrix} \Phi(\alpha)\theta - Z \\ D(\alpha - \hat{\alpha}) \end{pmatrix} \quad (11)$$

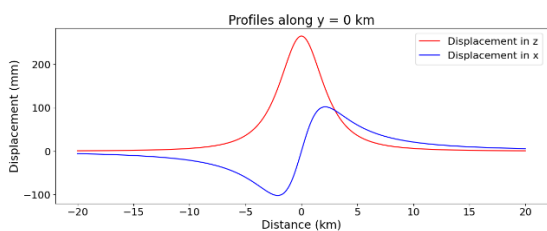
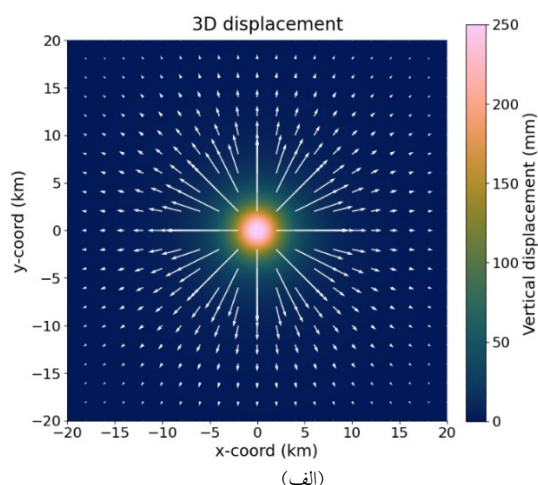
و در نظر گرفتن $J(y)$ به‌عنوان ژاکوبین ماتریس $s(y)$ ، الگوریتم کمترین نرم به‌صورت شکل ۱ است.

در روزن و همکاران (۲۰۰۰) ثابت شده است که الگوریتم کمترین نرم با فرض‌های صحیح به دنباله $\{y_k\}$ همگرا به یک نقطه ایستای $\|s\|$ منجر می‌شود. به‌ازای $p = 2$ الگوریتم معادل رویکرد گاوس-نیوتن با جستجوی خطی و به‌ازای $p = 1$ یعنی نرم L_1 ، الگوریتم دربرگیرنده حل تکراری یک مسئله برنامه‌ریزی

با در نظر گرفتن رابطه (۲) و $d_i^2 = (x_i - x_0)^2 + (y_i - y_0)^2$ تابع هزینه رویکرد کمترین مربعات استاندارد به صورت زیر خواهد بود:

$$L(\theta) = \sum_{i=1}^N e_i^2(\theta) \quad (14)$$

$$e_i = u_i - \frac{3V\xi}{4\pi\sqrt{(\xi^2 + (x_i - x_0)^2 + (y_i - y_0)^2)^3}} \quad (15)$$



شکل ۲. الف) مؤلفه‌های قائم و شعاعی تغییرشکل زمین محاسبه شده براساس مدل موگی برای منبع انبساطی آتشفشانی با تقارن شعاعی و ب) پروفیل مؤلفه‌های قائم و شعاعی در امتداد $y = 0$.

الگوریتم‌های گاوس-نیوتن یا لوبنرگ-مارکوارت برای رویکرد کمترین مربعات غیرخطی برای حل این مسئله مناسب هستند. اجرای آنها مستلزم داشتن المان‌های ماتریس ژاکوبین $\partial e_i / \partial \theta_j, i = 1, 2, \dots, N, j = 1, 2, 3, 4$ است. در این مورد خاص، بیان مدل نسبتاً ساده است و مشتقات مورد نیاز را می‌توان به صورت دستی محاسبه کرد:

گسترده در عمل مورد استفاده قرار می‌گیرند. رویکرد پیشنهادی برای بسیاری از مدل‌های دیگر و پیچیده‌تر نیز قابل اجرا است.

۵-۱ مدل موگی

در مدل اول جابجایی‌های لرزه‌ای ناشی از یک منبع انبساطی در نظر گرفته می‌شود. مطابق موگی (۱۹۵۸)، زمین به صورت یک نیم‌فضای کشسان و همسانگرد همگن که با ثابت لامه λ و مدول برشی μ مشخص می‌شود، مدل‌سازی می‌گردد. منبع با یک کره در حال انبساط نشان داده می‌شود که با شعاع a عمق ξ و افزایش فشار ΔP مشخص می‌شود. با ساده‌سازی‌های جزئی $\lambda = \mu$ و $a \ll \xi$ ، مدل یک جابجایی کاملاً شعاعی را در سطح پیش‌بینی می‌کند (شکل ۲-الف و ب). مطابق این مدل جابجایی‌های قائم و شعاعی در یک نقطه معین از سطح را می‌توان به صورت زیر بیان کرد (سگال، ۲۰۱۹):

$$u_z = \frac{3V\xi}{4\pi\sqrt{(\xi^2 + d^2)^3}}, \quad V = \frac{\pi a^3 P}{\mu} \quad (12)$$

$$u_d = \frac{3Vd}{4\pi\sqrt{(\xi^2 + d^2)^3}}$$

که d فاصله شعاعی از نقطه محاسباتی بوده و تصویر مرکز منبع روی سطح زمین (x_0, y_0) است.

در این حالت، مسئله معکوس شامل برآورد پارامترها و موقعیت منبع با تجزیه و تحلیل مکانی تعدادی از اندازه‌گیری‌های قائم است که احتمالاً آلوده به خطا هستند. با بررسی معادله (۱۲)، بدیهی است که پارامترهای a و P را نمی‌توان از اندازه‌گیری‌های جابجایی تعیین کرد، زیرا به صورت ضربی بر مدل تأثیر می‌گذارند. به همین دلیل، بردار پارامترها به صورت زیر انتخاب می‌شوند:

$$\theta = [V \ \xi \ x_0 \ y_0]' \quad (13)$$

$$u_z = -\frac{U_2}{2\pi} \left[\frac{\tilde{d}q}{R(R+\xi)} + \sin\delta \tan^{-1} \frac{\xi\eta}{qR} - I_5 \sin\delta \cos\delta \right] \quad (17)$$

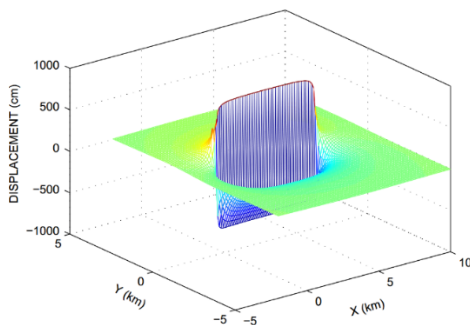
که در آن $\|$ نماد چینی را نشان می‌دهد:

$$f(\xi, \eta) = f(x, p) - f(x, p - W) - f(x - L, p) + f(x - L, p - W) \quad (18)$$

در رابطه (۱۷) داریم:

$$I_5 = \frac{2\mu}{\cos\delta(\lambda + \mu)} \tan^{-1} \frac{\eta(X + q\cos\delta) + X(R + X)\sin\delta}{\xi(R + X)\cos\delta}$$

تأکید می‌شود که مخرج رابطه (۱۸) زمانی که زاویه شیب δ دارای مقدار $90^\circ > \delta > 0$ درجه باشد صفر می‌شوند (گسل قائم). در شبیه‌سازی‌های این تحقیق فقط مدل شیب‌لغز (شکل ۴) با $0 < \delta < 90^\circ$ در نظر گرفته می‌شود. محاسبه تابع هدف برای مدل اوکادا به‌اندازه مدل موگی ساده نیست و محاسبات ماتریس ژاکوبین به‌صورت دستی می‌تواند چالش قابل توجهی ایجاد کند. این حالتی است که استفاده از یک ابزار خودکار برای انجام محاسبات باعث بهبود قابل توجهی می‌شود. از آنجایی که محاسبه تابع هدف نسبتاً پیچیده است، تقریب عددی مشتقات بیشتر تحت تأثیر عدم دقت ناشی از خطاهای تقریب عددی است. در این حالت، بهبود قابل توجهی از رویکرد مبتنی بر محاسبات ترکیبی نمادین-عددی مورد انتظار است.



شکل ۴. تغییر شکل سطحی ناشی از یک گسل مستطیلی محاسبه شده توسط مدل اوکادا (۱۹۸۵).

$$\frac{\partial e_i}{\partial V} = -\frac{3}{4\pi} \frac{\xi}{\sqrt{(\xi^2 + d_i^2)^3}} \quad (16-الف)$$

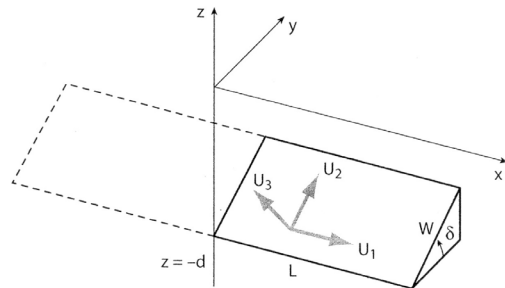
$$\frac{\partial e_i}{\partial \xi} = -\frac{3}{4\pi} \frac{V(2\xi^2 - d_i^2)}{\sqrt{(\xi^2 + d_i^2)^3}(\xi^2 + d_i^2)} \quad (16-ب)$$

$$\frac{\partial e_i}{\partial x_0} = -\frac{9}{4\pi} \frac{V\xi(x_i - x_0)}{\sqrt{(\xi^2 + d_i^2)^3}(\xi^2 + d_i^2)} \quad (16-ج)$$

$$\frac{\partial e_i}{\partial y_0} = -\frac{9}{4\pi} \frac{V\xi(y_i - y_0)}{\sqrt{(\xi^2 + d_i^2)^3}(\xi^2 + d_i^2)} \quad (16-د)$$

۵-۲ مدل اوکادا

در مقاله اوکادا (۱۹۸۵ و ۱۹۹۲)، توسعه کاملی از محاسبه تغییر شکل‌های داخلی و سطحی ناشی از یک گسل مستطیل شکل برای هر نقطه از یک نیمه‌فضای همگن کُشسان نامتناهی ارائه شده است. کمیت‌های هندسی مشخص‌کننده گسل در شکل ۳ نشان داده شده است. با توجه به اینکه در گسل‌های شیب‌لغز جابجایی‌های قائم در محدوده ابعاد گسل رخ داده و توسط ابزارهای ژئودتیکی قابل مشاهده هستند، لذا در این تحقیق نیز شبیه‌سازی جابجایی‌های قائم برای گسل شیب‌لغز انجام گرفت و در ادامه فقط روابط مؤلفه قائم جابجایی گسل شیب‌لغز ذکر می‌شود.



شکل ۳. مدل اوکادا: هندسه گسل مستطیلی.

۳-۵ شبیه‌سازی

در مرحله شبیه‌سازی میدان تغییر شکل مرتبط با مخزن انبساطی آتشفشانی با تحلیل یک مجموعه داده به شکل ماتریسی با ابعاد $N \times 2$ محاسبه می‌شود، که سطر i ام آن نشان‌دهنده یک نقطه مکانی با مختصات (x_i, y_i) است. مدل‌های ارائه شده در این تحقیق عبارتند از: منبع انبساطی آتشفشانی کروی (موگی، ۱۹۵۸) و گسل مستطیلی (اوکادا، ۱۹۸۵). علاوه بر مدل‌های ارائه شده، می‌توان مدل خاصی را به‌عنوان مثال به‌منظور توصیف هندسه‌های پیچیده‌تر برای منبع تعریف کرد. نتایج شبیه‌سازی به‌صورت متنی با قالب $(x_i, y_i, displ_i)$ و یا در یک شکل سه بعدی نمایش داده می‌شوند.

۴-۵ وارون‌سازی

همانطور که در بخش قبل توضیح داده شد، دو رویکرد برای وارون‌سازی استفاده شده است: کمترین مربعات استاندارد (LS) و کمترین نرم کامل ساختاریافته (STLN). برای رویکرد LS از تابع `lsqnonlin` ارائه شده توسط جعبه‌ابزار بهینه‌سازی متلب استفاده می‌شود که روش‌های گاوس-نیوتن و لونبرگ-مارکوارت را پیاده‌سازی می‌کند. الگوریتم با شروع از یک نقطه معلوم که برابر با میانگین مقادیر مورد انتظار برای پارامتر است، اجرا می‌شود. الگوریتم با استفاده از ژاکوبین محاسبه شده توسط جبر کامپیوتری اجرا می‌شود. الگوریتم STLN فقط در نرم L_1 پیاده‌سازی شده است زیرا بررسی‌های اولیه نشان داد، STLN در نرم L_2 تقریباً معادل گاوس-نیوتن است. همچنین فرض شده است که برای هر پارامتر حدود بالا و پایین مشخص است:

$$y_l \leq y \leq y_u$$

در حالت نرم L_1 مرحله اول الگوریتم LN شامل حل یک مسئله برنامه‌ریزی خطی (LP) است. فرض کنید $c' = [1 \ 1 \ \dots \ 1]$ بردار هزینه باشد، مسئله

برنامه‌ریزی خطی به‌صورت زیر است:

$$\min_{w, \Delta y} c'w \quad (19)$$

تحت قیود:

$$\begin{aligned} -w \\ \leq s(y) + J(y)\Delta y \\ \leq w \end{aligned} \quad (20)$$

$$y_l - y \leq \Delta y \leq y_u - y \quad (21)$$

جستجوی خطی در مرحله اول الگوریتم LN با استفاده از

تابع `linprog` ارائه شده توسط جعبه‌ابزار بهینه‌سازی MATLAB انجام می‌شود. قالب استاندارد مسئله LP

به‌صورت زیر است (ژانگ، ۱۹۹۸):

$$\min_x f^T x$$

که در آن

$$Ax \leq b$$

$$x_l \leq x \leq x_u$$

در واقع رابطه (۲۰) را می‌توان از طریق جایگزینی‌های

زیر که در آن I ماتریس همانی است

$$x = \begin{pmatrix} \Delta y \\ w \end{pmatrix} \in R^{n+N}, \quad A = \begin{pmatrix} J(y) & -I \\ -J(y) & -I \end{pmatrix} \in R^{2N \times (n+N)}$$

$$b = \begin{pmatrix} -s(y) \\ s(y) \end{pmatrix} \in R^{2N}, \quad f = \begin{pmatrix} 0 \\ c \end{pmatrix} \in R^{n+N}$$

$$x_l = y_l - y \in R^{n+N}, \quad x_u = y_u - y \in R^{n+N}$$

به این صورت بازنویسی کرد:

$$J(y)\Delta y - w \leq -s(y)$$

$$-J(y)\Delta y - w \leq s(y)$$

و برای هر الگوریتم انتخابی، تنظیم یک سری پارامترها

مورد نیاز است: مرزهای مجهولات، محدوده جواب‌ها، و

غیره. نتایج روش وارون‌سازی نیز شامل جواب‌ها، تعداد

تکرارها، بردار باقیمانده‌ها، و غیره است.

۶ نتایج عددی

به‌منظور بررسی کارایی روش پیشنهادی، چندین مسئله وارون‌سازی برای دو مدل موگی و اوکادا حل می‌شود. الگوریتم‌های کمترین نرم کامل ساختاریافته و کمترین

۱-۶ شبیه‌سازی و وارون‌سازی داده‌ها برای مدل

موگی

مطابق جدول ۱، نخست مشخصات مدل مرجع موگی با بازه در نظر گرفته شده برای هر پارامتر برای منبع آتشفشانی انتخاب می‌شوند. با استفاده از رابطه (۱۲) جابجایی‌های ارتفاعی و شعاعی در ۱۰۰ نقطه توزیع شده بر روی یک شبکه منظم در دامنه $(x, y) \in [-10, 10] \times [-10, 10]$ بدون خطا شبیه‌سازی می‌شوند.

جدول ۱. مشخصات مدل مرجع موگی برای آتشفشان.

θ	پارامتر	حد پایین	حد بالا
V	6.400×10^3	10^3	10^4
ξ (km)	2.7	1	7
x_0 (m)	0.0	-7	7
y_0 (m)	0.0	-7	7

ادامه تعداد مشاهدات به ۲۵۰۰ نقطه با ابعاد شبکه ۵۰ در ۵۰ افزایش داده شد و شبیه‌سازی داده‌های ارتفاعی بدون خطا انجام گردید. حل مسئله معکوس با هر دو رویکرد مجدداً انجام گرفت. نتایج در جداول ۴ و ۵ ارائه شده است. نتایج نشان می‌دهد که مشخصات منبع مجدداً به صورت کاملاً صحیح توسط هر دو رویکرد برآورد می‌شود. در روش STLN تعداد تکرارها یکی بیشتر شده و زمان اجرا نیز به ۵/۹۸ ثانیه افزایش می‌یابد. برای روش LS تعداد تکرارها و مدت زمان اجرا تغییری نکرد. برای داده‌های بدون خطا روش کمترین مربعات نسبت به روش STLN به تعداد تکرار بیشتر ولی مدت زمان کمتری برای بازیابی پارامترهای منبع نیاز دارد.

مربعات برای تجزیه و تحلیل داده‌های شبیه‌سازی شده مورد ارزیابی قرار می‌گیرند. کلیه محاسبات با برنامه‌نویسی در محیط نرم‌افزار MATLAB 2024b با استفاده از جعبه‌ابزار Symbolic Math Toolbox در یک دستگاه کامپیوتر با سیستم عامل ویندوز با شانزده گیگابایت RAM و پردازنده Intel(R) Core(TM) i5-6600 CPU @ 3.30GHz 3.31GHz انجام گرفت.

ماتریس ژاکوبین لازم برای وارون‌سازی با استفاده از جبر رایانه‌ای محاسبه می‌شود. روند اجرای رویکرد STLN با نرم L_1 در شبکه ۱۰ در ۱۰ با مشخصات مدل بازیابی شده با جابجایی‌های ارتفاعی بدون خطا در جدول ۲ ارائه شده است. مشخصات صحیح منبع در ۶ تکرار در مدت ۰/۸۸ ثانیه به طور کاملاً صحیح توسط روش STLN بازیابی شده است. همین روند برای جابجایی‌های شعاعی تکرار می‌شود. مشخصات صحیح منبع با ۸ تکرار در مدت ۱/۹۶ ثانیه بازیابی می‌شوند. همچنین مطابق جدول ۳ با داده‌های ارتفاعی شبیه‌سازی شده بدون خطا مشخصات صحیح منبع در ۱۶ تکرار و در مدت ۰/۸۹ ثانیه به طور کاملاً صحیح توسط روش LS بازیابی شد. در

جدول ۲. نتایج وارون‌سازی با روش کمترین نرم کامل ساختاریافته برای جابجایی‌های ارتفاعی مدل موگی با شبکه ۱۰ در ۱۰.

θ	بدون خطا		با خطای گاوسی			
	$\sigma = 0$	$\sigma = 2$	$\sigma = 100$	$n = 10$	$\sigma = 100$	$n = 20$
V	6.400×10^3	6.4372×10^3	6.3876×10^3		6.3871×10^3	
ξ (km)	2.700 km	2.7189 km	2.6978		2.6977 km	
x_0 (m)	4.7200×10^{-9}	0.0049	-8.5797×10^{-5}		6.1383×10^{-11}	
y_0 (m)	3.7414×10^{-9}	1.2879×10^{-4}	8.5796×10^{-5}		2.0994×10^{-10}	
$L(\theta)$	1.7295×10^{-4}	150.0103	802.2676		1.5808×10^3	
iter	6	21	7		8	
T(sec)	0.8761	2.2458	1.0754		1.3675	

جدول ۳. نتایج وارون‌سازی با روش کمترین مربعات برای جابجایی‌های ارتفاعی مدل موگی با شبکه ۱۰ در ۱۰.

θ	بدون خطا		با خطای گاوسی			
	$\sigma = 0$	$\sigma = 2$	$\sigma = 100$	$n = 10$	$\sigma = 100$	$n = 20$
V	6.400×10^3	6.3913×10^3	6.2626×10^3		4.6454×10^3	
ξ (km)	2.700	2.6971	2.6110		2.1858	
x_0 (m)	$-3.3925332 \times 10^{-18}$	0.0017	-0.0698		0.2753	
y_0 (m)	$-3.5254597 \times 10^{-18}$	-0.0018	0.1269		0.0415	
$L(\theta)$	4.4507674×10^{-9}	9.6127×10^3	8.7950×10^4		2.2293×10^5	
iter	16	16	5		7	
$T(sec)$	0.8937	0.8913	0.2642		0.2650	

جدول ۴. نتایج وارون‌سازی با روش کمترین نرم کامل ساختاریافته برای جابجایی‌های ارتفاعی مدل موگی با شبکه ۵۰ در ۵۰.

θ	بدون خطا		با خطای گاوسی			
	$\sigma = 0$	$\sigma = 2$	$\sigma = 100$	$n = 5000$	$\sigma = 100$	$n = 10000$
V	6.400×10^3	6.3764831×10^3	6.3801368×10^3		6.3510305×10^3	
ξ (km)	2.700	2.6947947	2.6949590		2.5889902	
x_0 (m)	$-1.6406335 \times 10^{-15}$	$-1.5035278 \times 10^{-3}$	$-2.8844082 \times 10^{-4}$		$-5.1676025 \times 10^{-2}$	
y_0 (m)	$-1.0639153 \times 10^{-16}$	2.1373697×10^{-3}	1.8703416×10^{-4}		6.7958042×10^{-2}	
$L(\theta)$	2.0446467×10^{-3}	3.9861088×10^3	2.5235106×10^5		3.8013821×10^5	
iter	7	6	7		1000	
$T(sec)$	5.9826	3.9486678	4.9173		596.0748	

جدول ۵. نتایج وارون‌سازی با روش کمترین مربعات برای جابجایی‌های ارتفاعی مدل موگی با شبکه ۵۰ در ۵۰.

θ	بدون خطا		با خطای گاوسی			
	$\sigma = 0$	$\sigma = 2$	$\sigma = 100$	$n = 5000$	$\sigma = 100$	$n = 10000$
V	6.400×10^3	6.386202×10^3	5.9054×10^3		5.9054×10^3	
ξ (km)	2.700 km	2.6944389 km	2.6125 km		2.6125 km	
x_0 (m)	$-3.3925332 \times 10^{-18}$	1.4842443×10^{-3}	-0.2268		-0.2268	
y_0 (m)	$-3.5254597 \times 10^{-18}$	2.5569329×10^{-3}	-0.0609		-0.0609	
$L(\theta)$	4.4507674×10^{-9}	9.8269357×10^3	5.1827655×10^7		9.6541445×10^7	
iter	16	16	5		4	
$T(sec)$	0.8549	0.8788	0.4728		0.4483	

آنها مشاهده می‌شود (جدول ۳). افزایش مقدار تابع هزینه برای هر دو رویکرد مشاهده می‌شود. میزان صحت بازیابی پارامترهای منبع برای هر دو روش STLN و LS تقریباً یکسان است و تنها تفاوت دو روش در پیچیدگی محاسباتی، تعداد تکرار و زمان پردازش بیشتر برای STLN در مقایسه با LS است. مطابق جداول ۴ و ۵ با افزایش تعداد نقاط شبکه به ۵۰ در ۵۰ تعداد تکرارها برای روش STLN نسبت به LS کمتر ولی زمان پردازش بیشتر

با اضافه کردن خطای گاوسی به مشاهدات که میانگین آن صفر و واریانس آن برابر با دو است، تعداد تکرارها برای روش STLN به ۲۱ و زمان اجرا به ۲/۲۵ ثانیه افزایش یافت. پارامترهای بازیابی شده دارای اختلافات کوچکی با مقادیر واقعی هستند (جدول ۲). با روش کمترین مربعات تعداد تکرارها به ۱۶ رسید و زمان اجرای آن ۰/۸۹ ثانیه بود. همانند روش STLN تفاوت اندکی در پارامترهای برآورد شده منبع با مقادیر واقعی

واقعی می‌شود. افزایش تعداد نقاط تحت تأثیر خطاهای بزرگ باعث افزایش مقدار تابع هزینه و اختلاف بیشتر در پارامترهای برآورد شده منبع نسبت به مقادیر واقعی می‌شود. مطابق جدول ۵ با وجود خطای بزرگ در داده‌ها پارامترهای مدل به ترتیب با ۵ و ۴ تکرار و ۰/۴۷ و ۰/۴۵ ثانیه و با اختلاف زیاد نسبت به مقادیر واقعی بازیابی شدند. مجدداً مشاهده می‌شود که افزایش تعداد نقاط تحت تأثیر خطاهای بزرگ در روش LS باعث افزایش مقدار تابع هزینه و اختلاف قابل ملاحظه در پارامترهای برآورد شده منبع نسبت به مقادیر واقعی می‌شود. مقایسه نتایج عددی نشان می‌دهد که علی‌رغم پیچیدگی محاسباتی و صرف زمان پردازش و تعداد تکرار بیشتر، اختلاف مابین پارامترهای برآورد شده منبع با مقادیر واقعی با استفاده از STLN خیلی کمتر از LS است.

۶-۲ شبیه‌سازی و وارون‌سازی داده‌ها برای مدل اوکادا

مدل اوکادا پیچیده‌تر از مدل موگی است. داده‌های شبیه‌سازی شده با استفاده از معادلات ۱۷ و ۱۸ در ۱۰۰ نقطه به طور تصادفی در دامنه $(x, y) \in [-10, 10] \times [-10, 10]$ نمونه‌برداری شدند. وارون‌سازی با داده‌های بدون خطا و با داده‌های آلوده شده توسط خطای نمونه‌برداری شده از توزیع گاوسی با میانگین صفر و انحراف معیار $\sigma = 2$ انجام شده است. پارامترهای مربوط به گسل مرجع همراه با بازه در نظر گرفته شده برای آنها در جدول ۶ ارائه شده است.

روند اجرای رویکرد STLN با نرم L_1 و مشخصات مدل بازیابی شده با جابجایی‌های ارتفاعی بدون خطا در شبکه ۱۰ در ۱۰ در جدول ۷ ارائه شده است. مشخصات صحیح گسل مرجع در ۱۲ تکرار در مدت ۳/۶۹ ثانیه به طور کاملاً صحیح توسط روش STLN بازیابی شده است. در ادامه همین روند با روش کمترین مربعات تکرار

می‌شود ولی میزان صحت پارامترهای برآورد شده برای هر دو روش تقریباً یکسان است. مقدار تابع هزینه نیز برای هر دو رویکرد افزایش می‌یابد. پس در حالتی که مشاهدات فقط تحت تأثیر خطاهای اتفاقی باشند با در نظر گرفتن پارامتر زمان پردازش استفاده از LS نسبت به STLN ارجحیت دارد.

به منظور تولید اثر داده‌های پرت، مطابق جداول ۲ و ۳ از بین ۱۰۰ نقطه مشاهداتی به ترتیب تعداد ۱۰ و ۲۰ مشاهده به صورت تصادفی تحت تأثیر خطای نمونه‌برداری با انحراف معیار ۱۰۰ قرار گرفتند. نتایج حاصل از حل مسئله معکوس با روش STLN در جدول ۲ ارائه شده است. با وجود خطای بزرگ در داده‌ها پارامترهای مدل به ترتیب با ۷ و ۸ تکرار و ۱/۰۷ و ۱/۳۷ ثانیه، خیلی نزدیک به مقادیر واقعی بازیابی شدند. مطابق جدول ۳ با وجود خطای بزرگ در داده‌ها با رویکرد LS پارامترهای مدل به ترتیب با ۵ و ۷ تکرار و ۰/۲۶ ثانیه و با اختلاف قابل ملاحظه از مقادیر واقعی بازیابی می‌شوند. افزایش تعداد نقاط تحت تأثیر خطاهای بزرگ باعث افزایش تعداد تکرارها و زمان پردازش و مقدار تابع هزینه می‌شود.

در ادامه مطابق جداول ۴ و ۵ از بین ۲۵۰۰ نقطه مشاهداتی به ترتیب تعداد ۵۰۰۰ و ۱۰۰۰۰ مشاهده به صورت تصادفی تحت تأثیر خطای نمونه‌برداری با انحراف معیار ۱۰۰ قرار گرفتند. با وجود خطای بزرگ در داده‌ها پارامترهای مدل به ترتیب با ۷ و ۱۰۰۰ تکرار و ۴/۹ و ۵۹۶ ثانیه، نزدیک به مقادیر واقعی بازیابی شدند. مجدداً مشاهده می‌شود که افزایش تعداد نقاط تحت تأثیر خطاهای بزرگ باعث افزایش تعداد تکرارها و زمان پردازش و مقدار تابع هزینه می‌شود. نتایج عددی ارائه شده در جدول ۴ نشان می‌دهند که افزایش تعداد نقاط با داده پرت در روش STLN باعث ایجاد انحراف کم در پارامترهای حاصل از حل مسئله معکوس نسبت به مقادیر

شد و مشخصات گسل مرجع در ۲۱ تکرار در مدت ۲/۶۸ ثانیه به طور صحیح برآورد گردید (جدول ۸). تعداد تکرارها برای روش LS حدوداً دو برابر روش STLN ولی مدت زمان پردازش کمتر است.

جدول ۶. پارامترهای گسل مرجع همراه با بازه در نظر گرفته شده برای آنها.

θ	پارامتر	حد پایین	حد بالا
c (km)	3	1	10
δ (deg.)	80	20	85
L (km)	7.0	1.0	9.0
W (km)	4.0	1.0	9.0
U_2 (mm)	800	10	1000

جدول ۷. نتایج وارون سازی با روش کمترین نرم کامل ساختاریافته برای جابجایی‌های ارتفاعی مدل اوکادا با شبکه ۱۰ در ۱۰.

θ	بدون خطا		با خطای گاوسی		با خطای بزرگ	
	$\sigma = 0$	$\sigma = 2$	$\sigma = 100$	$n = 10$	$\sigma = 100$	$n = 20$
c (km)	3	3.1020	3.1393	3.0113		
δ (deg.)	80	80.1621	79.7005	80.1303		
L (km)	7.0	6.9992	6.9858	7.0005		
W (km)	4.0	4.1495	5.1609	4.0178		
U_2 (mm)	800	806.38	585.477	800		
$L(\theta)$	5.261814×10^{-4}	152.1859	597.5171	790.7780		
iter	12	12	1000	1000		
$T(sec)$	3.69	2.8076	205.5654	300.5533		

جدول ۸. نتایج وارون سازی با روش کمترین مربعات برای جابجایی‌های ارتفاعی مدل اوکادا با شبکه ۱۰ در ۱۰.

θ	بدون خطا		با خطای گاوسی		با خطای بزرگ	
	$\sigma = 0$	$\sigma = 2$	$\sigma = 100$	$n = 10$	$\sigma = 100$	$n = 20$
c (km)	3	2.9541	4.2144	2.8529		
δ (deg.)	80	79.6011	82.4396	74.1554		
L (km)	7.0	7.0226	6.7426	6.3958		
W (km)	4.0	3.8447	5.9767	3.4694		
U_2 (mm)	800	840.6156	596.9731	881.6813		
$L(\theta)$	1.7144×10^{-11}	378.4480	7.0162×10^4	1.2034×10^5		
iter	21	54	52	63		
$T(sec)$	2.6832	6.0433	5.8351	6.9324		

گرفت (جدول ۸). میزان صحت پارامترهای برآورد شده برای هر دو روش تقریباً یکسان است.

به منظور تولید اثر داده‌های پرت، مطابق جداول ۷ و ۸ از بین ۱۰۰ نقطه مشاهداتی به ترتیب تعداد ۱۰ و ۲۰ مشاهده به صورت تصادفی تحت تأثیر خطای نمونه برداری با انحراف معیار ۱۰۰ قرار گرفتند. نتایج حاصل از حل مسئله معکوس با روش STLN در جدول ۷ ارائه شده است. با وجود خطای بزرگ در داده‌ها

با آلوده کردن مشاهدات به خطای گاوسی با میانگین صفر و واریانس دو تعداد تکرارها برای روش STLN تغییری نکرد و زمان اجرا به ۲/۸۱ ثانیه کاهش و مقدار تابع هزینه افزایش یافت. بازیابی پارامترهای منبع نیز به صورت تقریبی انجام گرفت (جدول ۷). با روش کمترین مربعات تعداد تکرارها به ۵۴ و زمان اجرای به ۶/۰۴ ثانیه افزایش یافت. مقدار تابع هزینه نیز دچار افزایش شد. مجدداً بازیابی پارامترهای منبع به طور تقریبی انجام

خیلی تحت تأثیر خطاهای بزرگ قرار نمی‌گیرند. این نشان می‌دهد که حتی در حالت غیرخطی، استفاده توأم از تابع هزینه نرم L_1 خطا و رویکرد کمترین نرم ساختاریافته منجر به الگوریتمی می‌شود که قادر به بازیابی صحیح تریارمترهای مجهول در حضور خطاهای اندازه‌گیری با بزرگی دلخواه است. توجه با این نکته هم مهم است که مقادیر تابع هزینه یعنی $L(\theta)$ دو رویکرد را نمی‌توان مستقیماً با هم مقایسه کرد زیرا آنها به ترتیب مربوط به نرم‌های L_1 و L_2 هستند.

۷ نتیجه‌گیری

در این تحقیق بررسی‌هایی در زمینه وارون‌سازی دو مدل ژئوفیزیکی موگی برای جابجایی‌های قائم و شعاعی ناشی از آتشفشان و اوکادا برای جابجایی‌های قائم ناشی از گسل با دو رویکرد کمترین نرم کامل ساختاریافته و کمترین مربعات با هدف مقایسه نتایج وارون‌سازی حاصل از دو رویکرد با وجود چندین اشتباه در جابجایی‌های مشاهداتی انجام گردید. برای محاسبه مشتقات مورد نیاز الگوریتم‌های بهینه‌سازی از جبر رایانه‌ای استفاده گردید. در همین راستا برای نخستین بار مشتق‌گیری از روابط تحلیلی اوکادا که مورد نیاز برای الگوریتم‌های بهینه‌سازی است نسبت به پارامترهای هندسی گسل با استفاده از جبر رایانه‌ای انجام گرفت.

بدین منظور با فرض معلوم بودن مشخصات منبع آتشفشانی و گسل، جابجایی‌های ارتفاعی برای هر دو مدل در سطح زمین شبیه‌سازی شده و وارون‌سازی با جابجایی‌های بدون خطا، با خطای گاوسی و با چندین داده پرت انجام شد. در حالتی که مشاهدات بدون خطا باشند مشخصات منبع آتشفشانی یا گسل به طور کاملاً صحیح توسط هر دو روش بازیابی شدند و افزایش تعداد نقاط شبکه مشاهداتی تأثیری در نتیجه حل مسئله معکوس نداشت و فقط زمان پردازش را افزایش داد. برای

پارامترهای مدل به ترتیب با ۱۰۰۰ تکرار و ۲۰۵/۵۶ و ۳۰۰/۵۵ ثانیه، نزدیک به مقادیر واقعی بازیابی شدند. افزایش تعداد نقاط تحت تأثیر خطاهای بزرگ باعث افزایش زمان پردازش و مقدار تابع هزینه می‌شود. تکرار محاسبات با انحراف معیارهای مختلف نشان می‌دهد که در هر دو مدل موگی و اوکادا برای مشاهدات با خطای گاوسی و انحراف معیارهای کوچک معمولاً شرط $\delta \leq 10^{-5}$ برقرار می‌شود ولی با افزایش انحراف معیار خطای گاوسی مشاهدات، تعداد دفعات برقراری شرط $\delta \leq 10^{-5}$ کمتر شده و حلقه در تعداد تکرار مشخص شده توسط کاربر که معمولاً برابر ۱۰۰۰ است، متوقف می‌شود.

نتایج حاصل از حل مسئله معکوس با روش LS در جدول ۸ ارائه شده است. با وجود خطای بزرگ در داده‌ها پارامترهای مدل به ترتیب با ۵۲ و ۶۳ تکرار و ۵/۸۳ و ۶/۹۳ ثانیه و با اختلافات قابل ملاحظه از مقادیر واقعی بازیابی شدند. افزایش تعداد نقاط تحت تأثیر خطاهای بزرگ باعث افزایش مقدار تابع هزینه و اختلاف قابل ملاحظه در پارامترهای برآورد شده گسل نسبت به مقادیر واقعی می‌شود. مقایسه نتایج عددی نشان می‌دهد که در مورد مدل اوکادا هم علی‌رغم پیچیدگی محاسباتی و صرف زمان پردازش و تعداد تکرار بیشتر، اختلاف مابین پارامترهای برآورد شده گسل مرجع با مقادیر واقعی با استفاده از رویکرد STLN کمتر از رویکرد LS است.

در حالت کلی نتایج عملکرد هر دو رویکرد برای هر دو مدل موگی و اوکادا تقریباً یکسان است. مدل اوکادا از نظر محاسباتی پیچیده‌تر از مدل موگی است. با پیچیده‌تر شدن مدل تعداد تکرارها و زمان محاسبات افزایش پیدا کرد. هنگامی که داده‌ها تحت تأثیر خطاهای بزرگ قرار می‌گیرند، پارامترهای شناسایی شده توسط LS با افزایش تعداد و دامنه خطاها از مقادیر صحیح دور می‌شوند. در مقابل، پارامترهای شناسایی شده توسط STLN با نرم L_1

اتفاقی در مشاهدات و اختلاف جواب‌ها نشان از وجود اشتباه در مشاهدات خواهد بود.

در گسل‌های امتدادلغز دامنه جابجایی‌های مسطحاتی در امتداد گسل بیشتر از جابجایی‌های مسطحاتی عمود بر گسل و جابجایی‌های قائم بوده و توسط ابزارهای ژئودتیکی قابل اندازه‌گیری است، لذا برای گسل‌های امتدادلغز استفاده از مشاهدات ژئودتیکی جابجایی‌های مسطحاتی در امتداد گسل برای حل مسئله معکوس بویژه با رویکرد کمترین نرم کامل ساختاریافته پیشنهاد می‌شود. در گسل‌های شیب‌لغز دامنه جابجایی‌های مسطحاتی عمود بر گسل و جابجایی‌های قائم بیشتر از جابجایی‌های مسطحاتی در امتداد گسل بوده و توسط ابزارهای ژئودتیکی قابل اندازه‌گیری است، لذا برای گسل‌های شیب‌لغز استفاده از مشاهدات ژئودتیکی جابجایی‌های مسطحاتی عمود بر گسل و جابجایی‌های قائم برای حل مسئله معکوس با رویکرد کمترین نرم کامل ساختاریافته پیشنهاد می‌شود. در این تحقیق از بین مدل‌های متداول برای آتشفشان از مدل ساده موگی استفاده شد. برای تحقیقات بعدی استفاده از سایر مدل‌های آتشفشانی از جمله دایک، سیل و پنی و همچنین بقیه مدل‌های ژئوفیزیکی پیشنهاد می‌شود.

منابع

- Bazaraa, M., Sherali, H., Shetty, C. (1993). *Nonlinear Programming: Theory and Algorithms*, second ed. Wiley, New York, NY, 638pp.
- Bertsekas, D. P. (1999). *Nonlinear Programming*, second ed. Athena Scientific, Belmont, MA, 780pp.
- Bifulco, I., Raiconi, G., & Scarpa, R. (2009). Computer algebra software for least squares and total least norm inversion of geophysical models. *Computers & geosciences*, 35(7), 1427-1438.
- Bjorck, A. (1996). *Numerical Methods for Least Squares Problems*. SIAM, Philadelphia, PA, USA, 408pp.

داده‌های بدون خطا روش کمترین مربعات نسبت به کمترین نرم کامل ساختاریافته به زمان کمتر و تعداد تکرار بیشتری برای بازیابی پارامترهای منبع نیاز داشت. اضافه کردن خطای گاوسی به مشاهدات شبیه‌سازی باعث افزایش تعداد تکرارها و مدت زمان پردازش به‌ویژه برای کمترین نرم کامل ساختاریافته شد ولی صحت بازیابی پارامترهای منبع توسط هر دو روش تقریباً یکسان است. بنابراین، در شرایطی که تنها خطای اتفاقی در مشاهدات وجود داشته باشد، انتخاب روش کمترین مربعات نسبت به کمترین نرم کامل ساختاریافته منطقی‌تر است. تکرار محاسبات با انحراف معیارهای مختلف نشان داد که برای مشاهدات با خطای گاوسی و انحراف معیارهای کوچک معمولاً شرط $\delta \leq 10^{-5}$ برقرار می‌شود ولی با افزایش انحراف معیار خطای گاوسی مشاهدات، تعداد دفعات برقراری شرط $\delta \leq 10^{-5}$ کمتر شده و حلقه در تعداد تکرار مشخص شده توسط کاربر که معمولاً برابر ۱۰۰۰ در نظر گرفته می‌شود متوقف می‌گردد. رویکرد کمترین نرم کامل ساختاریافته با استفاده از جبر رایانه‌ای زمانی که مشاهدات تحت تأثیر چندین داده پرت قرار می‌گیرند، نسبت به روش کمترین مربعات با همان شرایط به نتایج صحیح‌تری منجر شد ولی تعداد تکرارها و زمان محاسبات برای روش کمترین نرم کامل ساختاریافته نسبت به روش کمترین مربعات بیشتر شد.

در استفاده از روش کمترین مربعات نیاز به مرحله پیش‌پردازش برای حذف مشاهدات اشتباه است ولی با استفاده از روش کمترین نرم کامل ساختاریافته نیازی به مرحله پیش‌پردازش نیست و وجود چندین مشاهده اشتباه تأثیری در جواب‌های مسئله ندارد.

با توجه به نتایج حاصل، حل مسائل معکوس با هر دو رویکرد برای داده‌های واقعی پیشنهاد می‌شود. نزدیکی جواب‌های حاصل از دو رویکرد نشان از وجود خطاهای

- Dennis, J.E., Shnabel, R. B. (1996). Numerical Methods for Unconstrained Optimization and Nonlinear Equations. SIAM, Philadelphia, PA, USA, 378pp.
- Goldberg, D. E. (1989). Genetic Algorithm in Search, Optimization and Machine Learning, first ed. Addison-Wesley, Longman Publishing Co. Inc., Boston, MA, USA, 372pp.
- Golub, G. H., Van Loan, C. F. (1980). An analysis of the total least squares problem. *SIAM Journal of Numerical Analysis* 17, 883–893.
- Han, J., Zhang, S., Li, Y., & Zhang, X. (2020). A general partial errors-in-variables model and a corresponding weighted total least-squares algorithm. *Survey Review*, DOI: 10.1080/00396265.2018.1530332.
- Hansen, P. C. (1998). Rank Deficient and Discrete Ill-posed Problems. SIAM, Philadelphia, 247pp.
- Horst, R., Pardalos, P.M. (Eds.) (1995). Handbook of Global Optimization. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 880pp.
- Hu, Y., Fang, X. & Zeng, W. (2024). Toward a unified approach to the total least-squares adjustment. *Journal of Geodesy*, 98, 75. <https://doi.org/10.1007/s00190-024-01882-x>.
- Jin, Y., Tong, X., Li, L., Zhang, S., & Liu, S. (2015). Total least L1-and L2-norm estimations of a coordinate transformation model with a structured parameter matrix. *Studia geophysica et geodaetica*, 59, 345-365.
- Kirkpatrick, S., Gelatt, C. D., Vecchi, M. P. (1983). Optimization by simulated annealing. *Science* 220, 671–680.
- Mogi, K. (1958). Relations of the eruptions of various volcanoes and the deformation of the ground surface around them. *Bulletin of the Earthquake Research Institute, Tokyo University* 36, 99–134.
- Naemi, Y., & Voosoghi, B. (2020). A modified iterative algorithm for the weighted total least squares. *Acta Geodaetica et Geophysica*, 55(2), 319-334.
- Nocedal, J., Wright, S. J. (1999). Numerical Optimization. Springer, New York, 664pp.
- Norton, J. P. (1994). Bounded-error estimation, part I (special issue). *International Journal on Adaptive Control and Signal Processing* 8 (1).
- Norton, J. P. (1995). Bounded-error estimation, part II (special issue). *International Journal on Adaptive Control and Signal Processing* 9 (2).
- Okada, Y. (1985). Surface deformation due to shear and tensile faults in a half-space. *Bulletin of the Seismological Society of America* 75, 1135–1154.
- Okada, Y. (1992). Internal deformation due to shear and tensile faults in a half-space. *Bulletin of the Seismological Society of America* 82, 1018–1040.
- Pardalos, P. M., Romeijn, H. E. (Eds.) (2002). Handbook of Global Optimization, vol.2. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 580pp.
- Rath, V., Wolf, A., Bucker, H. M. (2006). Joint three-dimensional inversion of coupled groundwater flow and heat transfer based on automatic differentiation: sensitivity calculation, verification and synthetic examples. *Geophysical Journal International* 167, 453–466.
- Rosen, J. B., Park, H., & Glick, J. (1996). Total least norm formulation and solution for structured problems. *SIAM Journal on matrix analysis and applications*, 17(1), 110-126.
- Rosen, J. B., Park, H., & Glick, J. (1998). Structured total least norm for nonlinear problems. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 20(1), 14-30.
- Rosen, J.B., Park, H., Glick, J. (2000). Signal identification using a least L₁ norm algorithm. *Optimization and Engineering* 1, 51–65.
- Rosen, J. B., Park, H., Glick, J., & Zhang, L. (2000). Accurate solution to overdetermined linear equations with errors using L1 norm minimization. *Computational optimization and*

- applications, 17, 329-341.
- Segall, P. (2019). Magma chambers: what we can, and cannot, learn from volcano geodesy. *Philosophical Transactions of the Royal Society A*, 377(2139), 20180158.
- Tarantola, A., (1987). *Inverse Problem Theory: Methods for Data Fitting and Model Parameter Estimation*. Elsevier, Amsterdam, The Netherlands, 613pp.
- Tikhonov, A. N., Arsenin, V. Y. (1977). *Solutions of Ill-posed Problems*. Wiley, New York, 258pp.
- Van-Huffel, S., Park, H., Rosen, J. B. (1996). Formulation and solution of structured total least norm problems for parameter estimation. *IEEE Transactions on Signal Processing* 44, 2464–2474.
- Wang, J., Yan, W., Zhang, Q., & Chen, L., (2021). Enhancement of computational efficiency for weighted total least squares. *Journal of Surveying Engineering*, 147(4), 04021019.
- Wolfe, M. A. (1978). *Numerical Methods for Unconstrained Optimization*. Van Nostrand Reinhold, New York, 312pp.
- Xie, J., Qiu, T., Zhou, C., Lin, D., & Long, S. (2024). Algorithms and statistical analysis for linear structured weighted total least squares problem. *Geodesy and Geodynamics*, 15(2), 177-188.
- Zhang, S., Zhang, K., Han, J., & Tong, X. (2017). Total least norm solution for linear structured EIV model. *Applied mathematics and computation*, 304, 58-64.
- Zhang, Y. (1998). Solving large-scale linear programs by interior-point methods under the MATLAB environment. *Optimization Methods and Software* 10, 1–31.

Comparison of standard least squares and structured total least norm approaches for geophysical models inversion

Asghar Rastbood^{1*}, Behnam Rostami² and Abolfazl Ranjbar³

¹ Assistant Professor, Department of Geomatics Engineering, Faculty of Civil Engineering, University of Tabriz, Tabriz, Iran

² M.Sc. Student, Department of Geomatics Engineering, Faculty of Civil Engineering, University of Tabriz, Tabriz, Iran

³ Assistant Professor, Geomatics Engineering, Marand Engineering Faculty, University of Tabriz, Tabriz, Iran

(Received: 24 september 2024, Accepted: 22 January 2025)

Abstract

The problem of model inversion, which emerges within the realm of geophysical sciences, is under our consideration. The solution to the problem, irrespective of whether it is framed deterministically or stochastically, involves the minimization of a suitable loss function with respect to the unknown parameters. Efficient local minimization plays a vital role in such optimizations, but the intricate nature of the models involved often poses limitations on the usability of derivative-based approaches. Our focus lies in considering the utilization of advanced computer algebra programs to compute the necessary derivatives automatically.

To demonstrate the broad applicability of the proposed procedure, we present its application to two distinct ground deformation models, both of which are straightforward in nature, i.e., Mogi and Okada models. Furthermore, we employ two different solution techniques in our analysis: the classical nonlinear least squares method, widely recognized as the most commonly employed approach, and the structured total least norm approach. Assuming that the parameters of the volcano and fault reference models are known, vertical displacements for both models are simulated at the Earth surface and inversion is performed with synthetic vertical displacements without error, with Gaussian error, and with several outliers.

The results show that in the case that the observations are error-free, the source characteristics are correctly retrieved by both methods, and increasing the number of observation grid points does not affect the result and only increases the execution time. For error-free data, the least squares method requires less time and number of iterations to recover the parameters than the structured total least norm. Adding the Gaussian error to the simulated observations increases the number of iterations and the processing time, especially for structured total least norm method, but the accuracy of the estimated source parameters by both methods is the same. The structured total least norm approach using computer algebra when the observations are affected by several outliers leads to better results than the least squares method in the same conditions, but the number of iterations and computation time for the structured total least norm method is more than the least squares method. The performance results of both approaches are almost identical for both Mogi and Okada models. The Okada model is more complicated than the Mogi model. As the model becomes more complicated, the number of iterations and the calculation time increases. When the data is affected by large errors, the parameters detected by the least squares get away from the correct values with the increase in the number and range of errors. On the contrary, with the values used in this research, the parameters identified by the structured total least norm do not seem to be affected by large errors. This shows that, even in the nonlinear case, the use of the L_1 -norm error cost function with the structured total least norm approach leads to an algorithm that is able to recover parameters more correctly in the presence of measurement errors of arbitrary magnitude.

Keywords: Optimization, inverse problem, computer algebra, geodetic data inversion, structured total least norm