

تحلیل تاثیر ماتریس وزنی داده‌ها بر دقت مدل‌سازی وارون داده‌های توموگرافی مقاومت‌ویژه الکتریکی

مهدی فلاح‌صفری^۱ و رضا قناتی^{۲*}

^۱ استادیار، موسسه ژئوفیزیک، دانشگاه تهران، تهران، ایران

^۲ دانشیار، موسسه ژئوفیزیک، دانشگاه تهران، تهران، ایران

(دریافت: ۱۴۰۴/۰۶/۰۲، پذیرش: ۱۴۰۴/۰۸/۲۵)

چکیده

در این تحقیق، به بررسی تاثیر ماتریس وزنی داده‌ها بر دقت وارون‌سازی داده‌های توموگرافی مقاومت‌ویژه الکتریکی پرداخته می‌شود. روش وارون‌سازی اکام به عنوان چارچوب اصلی برای مدل‌سازی وارون غیرخطی داده‌های مقاومت‌ویژه الکتریکی همراه با اعمال ماتریس‌های وزنی و قیود فیزیکی مختلف به کار گرفته شد. تحلیل‌ها نشان می‌دهد که به دلیل وجود نوفه‌های تصادفی با توزیع‌های آماری مختلف، تغییرات نسبت سیگنال به نوفه، فاصله الکترودها، و پیچیدگی‌های زمین‌شناسی، بکارگیری ماتریس وزنی داده‌ها ضروری است. با هدف بررسی این موضوع داده‌های مصنوعی و یک مجموعه اندازه‌گیری صحرائی در شرایط زمین‌شناسی پیچیده وجود نوفه‌های محیطی مختلف استفاده شد. نتایج وارون‌سازی داده‌های مصنوعی و صحرائی نشان داد که اعمال ماتریس وزنی داده‌ها می‌تواند به بهبود تصویرسازی لایه‌های زیرسطحی و کاهش خطاهای وارون‌سازی کمک کند. در مدل‌های صحرائی، صحت‌سنجی نشان داد که نتایج وارون‌سازی با ماتریس وزنی به واقعیت زمین‌شناسی نزدیک‌تر است. ارزیابی مقاطع حاصل از وارون‌سازی با استفاده از مقاطع پیشینه تغییرات مدل، چگالی تفکیک‌پذیری، و ماتریس حساسیت نشان داد که استفاده از ماتریس وزنی منجر به نتایج معتبرتری می‌شود. همچنین بررسی‌های عددی نشان می‌دهد که در صورت برآورد صحیح از سطح نوفه و به دنبال آن تشکیل ماتریس وزنی داده‌ها، امکان بهبود دقت و کاهش خطاهای مدل‌سازی وارون در داده‌های توموگرافی الکتریکی وجود دارد.

کلمه‌های کلیدی: بهینه‌سازی، توموگرافی الکتریکی، ماتریس وزنی داده‌ها، وارون‌سازی

۱ مقدمه

عوارض و لایه‌های درون زمین خصوصیات الکتریکی متفاوتی از یکدیگر دارند که این موضوع کلیدی جهت آشکارسازی آنها توسط روش‌های ژئوالکتریکی و الکترومغناطیسی است. در حال حاضر روش‌های ژئوالکتریکی کاربردهای فراوانی در زمینه‌های اکتشاف معدن، بررسی‌های باستان‌شناسی و مطالعات هیدروژئوفیزیکی دارند. با توجه به تباین الکتریکی مواد زیرسطح، می‌توان تصاویر (مقاطع) الکتریکی بر مبنای توزیع‌های متفاوتی از رسانندگی که منجر به تفکیک لایه‌های مختلف زمین‌شناسی می‌شود از آن تهیه کرد. معمولاً مرزهای الکتریکی در این مقاطع برازش قابل قبولی با مرزهای زمین‌شناسی دارند. مقاطع الکتریکی با استفاده از داده‌های خام (تحت عنوان شبه‌مقاطع) و یا داده‌های حاصل از وارون‌سازی (تحت عنوان مقاطع) آماده می‌شوند. داده‌های خام اندازه‌گیری شده، حاصل برهم‌نهی تمام عوارض زیرسطحی بر یکدیگر بوده و لذا برش‌های تهیه شده از آن، و یا به عبارتی شبه‌مقاطع الکتریکی، به خصوص در محیط‌های پیچیده زمین‌شناسی، اطلاعات صحیحی از تغییرات زیرسطح را نمایش نمی‌دهند؛ و شاید در برخی موارد موجب استخراج اطلاعات گمراه‌کننده‌ای شوند. در مقابل، داده‌های حاصل از وارون‌سازی، و یا مقاطع الکتریکی، مدل‌های الکتریکی زیرسطح را با دقت قابل قبولی نمایش می‌دهند. لذا لزوم انجام روند وارون‌سازی غیرقابل انکار است. اما با توجه به تعداد کم داده، وجود خطا در اندازه‌گیری‌ها و عدم قطعیت‌های موجود در مسائل وارون، چالش‌هایی پیش روی این مسائل وجود دارد. جهت غلبه بر هر یک از این چالش‌ها، راهکارهایی همچون روش‌های بهینه‌سازی و استفاده از قیدهای مناسب ارائه شده است. توسعه کاربرد روش‌های ژئوالکتریکی در زمینه‌های مختلف را می‌توان حاصل پیشرفت الگوریتم‌های وارون مقاومت ویژه الکتریکی و تولید دستگاه‌های با حساسیت بالا

با قابلیت‌های متنوع دانست. حل مسائل وارون در مسائل مقاومت ویژه الکتریکی ابتدا توسط پلتون و همکاران (پلتون و همکاران، ۱۹۷۸) انجام شد. سپس ناکارآمدی این الگوریتم در محیط‌های پیچیده، توسط اسمیت و وزوف (اسمیت و وزوف، ۱۹۸۴) و تریپ و همکاران (تریپ و همکاران، ۱۹۸۴) مرتفع گردید. در ادامه تانگ و یانگ (تانگ و یانگ، ۱۹۹۰) تغییرات توپوگرافی را به مسائل وارون الکتریکی وارد کردند. از دیگر پژوهش‌های شاخص می‌توان به لوک و بارکر (لوک و بارکر، ۱۹۹۶) اشاره کرد. اما همزمان با توسعه الگوریتم‌های وارون‌سازی، پیشرفت‌های چشمگیری در زمینه ساخت دستگاه‌های اندازه‌گیری داده نیز انجام شده است. دستگاه‌های چندکاناله از جمله آخرین دستگاه‌های تولیدی است که استقبال زیادی در میان کاربران داشته است. از قابلیت‌های آن می‌توان به افزایش چشمگیر سرعت عملیات داده‌برداری و تعداد زیاد داده‌های اندازه‌گیری شده عنوان کرد (ژو و داهلین، ۲۰۰۳؛ داهلین و ژو، ۲۰۰۴؛ گونتر و همکاران، ۲۰۰۶؛ چمبر و همکاران، ۲۰۰۶؛ اولدنبرگ و همکاران، ۲۰۰۷؛ ژو و همکاران، ۲۰۱۴؛ پانگ و همکاران، ۲۰۲۰) مدل‌سازی پیشرو را می‌توان یکی از عوامل موثر در دقت و کارآمدی مدل‌سازی‌های وارون عنوان کرد. در این زمینه تلاش‌های بسیاری جهت بهبود مدل‌سازی پیشرو و متعاقباً مدل‌سازی وارون شده است. به عنوان مثال، در آخرین پژوهش‌ها، تکنیک ۲/۵ بعدی بر اساس تفاضلات محدود استفاده می‌شود. در این راه حل، علاوه بر محاسبه توزیع پتانسیل در ۳ بعد، سرعت محاسبات نسبت به تکنیک‌های ۳ بعدی به صورت قابل توجهی افزایش یافته است. این در حالی است که دقت محاسبات قابل قبول است. در این پژوهش از روش وارون آکام با توجه به کارایی آن در مدل‌های پیچیده و قابلیت اعمال قیدهای مناسب، جهت وارون‌سازی داده‌های الکتریکی استفاده شده است (کانستبل و همکاران، ۱۹۸۷؛ دی گروت و کانستبل،

زیادی به مطالعه اثر ماتریس وزنی داده‌ها بر روی نتایج توموگرام‌های الکتریکی منتج شده از وارون‌سازی داده‌های مقاومت ویژه الکتریکی پرداخته شده است (لسپار و همکاران، ۲۰۱۷؛ شامارا و همکاران، ۲۰۲۳). با توجه به اهمیت موضوع و پژوهش‌های محدود در این ارتباط، در این مقاله به بررسی میزان اثرگذاری اعمال ماتریس وزنی داده‌ها در روند وارون‌سازی است. هرچند کاربرد ماتریس وزنی داده‌ها به دلیل عدم دسترسی به برآورد دقیقی از میزان سطح نوفه در داده‌ها اجتناب می‌شود. جهت برآورد سطح خطای داده‌های صحرائی معمولاً از رهیافت اندازه‌گیری‌های هم‌پاسخی استفاده می‌شود که به دلیل برداشت داده‌های بیشتر و در نتیجه هزینه عملیات صحرائی بیشتر اجتناب می‌شود. رهیافت بعدی استفاده از خطای برانبارش است که می‌تواند تواند تخمینی از سطح خطای داده‌ها ارائه دهد. با توجه به اینکه مطالعات عددی کمتری در رابطه با کارایی این روش در بررسی‌های صحرائی انجام شده است در این مقاله از این روش برای برآورد ماتریس وزنی داده‌ها استفاده می‌شود. در این راستا، نتایج حاصل از به کارگیری ماتریس وزنی داده‌ها بر روی یک مدل مصنوعی و نیز یک مدل صحرائی بررسی شده است. داده‌های صحرائی با استفاده از ترکیب آرایه‌های دوقطبی - دوقطبی، قطبی-دوقطبی، و قطبی-قطبی در شمال شرق تهران برداشت شده است. صحت سنجی نتایج صحرائی توسط اطلاعات حاصل از چاه آب کشاورزی موجود در خط برداشت انجام گرفت.

همچنین جهت ارزیابی بهتر مدل‌های خروجی، آنالیز حساسیت، توزیع چگالی - تفکیک پذیری، و بیشینه تغییرات مدل خروجی نیز تجزیه و تحلیل شده است. در ادامه این مقاله، بخش ۲ مروری کوتاه بر معادلات پیشرو و وارون به کار گرفته شده، ارائه می‌دهد. سپس، عملکرد آن الگوریتم‌ها با استفاده از یک مجموعه داده مصنوعی و یک مجموعه داده صحرائی در بخش ۳ ارزیابی شده است. در

۱۹۹۰). از آنجا که تاثیرپذیری هر یک از داده‌های ثبت شده از نوفه‌های موجود، متفاوت است، علاوه بر قید مثبت بودن مقادیر مقاومت ویژه و نیز قید هموارسازی، ماتریس وزنی داده‌ها نیز در روند وارون‌سازی اعمال شده است. مولفه‌های ماتریس وزنی شامل سطح نوفه یا خطاهای اندازه‌گیری برآورد شده در داده‌های صحرائی است. خطاهای اندازه‌گیری جزئی جدایی‌ناپذیر از مشاهدات علمی است. توصیف مناسب چنین خطاهایی منجر به مدل خروجی بهتر و در نهایت تفسیر دقیق‌تر می‌شود و در اندازه‌گیری‌ها امری ضروری است (تسو و همکاران، ۲۰۱۷). خطاهای اندازه‌گیری ممکن است تصادفی یا سیستماتیک باشند. در روش‌های وارون ژئوفیزیکی متداول، خطاهای اندازه‌گیری مستقل و تصادفی فرض می‌شوند. خطاهای مدل‌سازی معمولاً شامل عدم دقت مدل پیشرو (به عنوان مثال، به دلیل گسسته‌سازی) و مناسب نبودن مدل پیشرو (به عنوان مثال حل یک مسئله سه بعدی با استفاده از یک مدل دوبعدی) می‌باشند. خطاهای مدل‌سازی به خوبی شناخته شده هستند، چرا که می‌توان با مقایسه داده‌های حاصل از مدل‌سازی پیشرو در یک محیط همگن، با نتایج حل‌های تحلیلی، آن‌ها را بررسی کرد (بینلی، ۲۰۱۵؛ تسو و همکاران، ۲۰۱۷). دست‌یابی به مدل توزیع مکانی مقاومت ویژه زیر سطح زمین با استفاده از مجموعه کوچکی از داده‌های صحرائی که همراه با نوفه هستند، یک امر سخت و چالش برانگیز است. تخمین سطح نوفه و به دنبال آن استفاده از ماتریس وزنی داده‌ها در مدل‌سازی‌های وارون از آن جهت دارای اهمیت است که برآورد یک ماتریس وزنی صحیح امکان تعریف یک ضابطه توقف مناسب در حین حل مسئله وارون را فراهم می‌آورد و مانع از برازش بیش از حد یا کمتر حد از مدل به داده‌ها می‌شود. به عبارت دیگر تخمین نوفه بیشتر از مقدار واقعی آن باعث حذف جزئیاتی از مدل زمین و تخمینی کمتر از مقدار واقعی منجر به ایجاد آنومالی‌های کاذب می‌شود. مقالات نه چندان

انتها، جمع بندی در بخش ۴ می باشد.

۲ روش شناسی

۲-۱ مدل سازی پیشرو

محاسبات مدل سازی پیشرو در این پژوهش با استفاده از تکنیک ۲/۵ بعدی انجام شده است. در واقع، توزیع پتانسیل در حوزه فوریه محاسبه شده و لذا در مقایسه با روش های ۳ بعدی، سرعت محاسبات افزایش چشمگیری دارد. انتقال محاسبات از ابعاد مکانی به حوزه فوریه یا عدد موج انجام می شود و لذا سلول های مجهول زیادی از این حوزه حذف و به تعداد اعداد موج به کار گرفته شده تقلیل می یابد. همچنین، معادلات پایه مانند معادله پواسون با بکارگیری روش تفاضلات محدود حل شده است. برای شروع حل این معادلات از اصل پایستگی بار و معادلات پیوستگی در یک چشمه نقطه ای $\mathcal{R}_S(x_S, y_S, z_S)$ استفاده می شود (دی و موریسون، ۱۹۷۹).

$$\nabla \cdot \left[\frac{1}{\rho(x, y, z)} \nabla \varphi(x, y, z) \right] = -I \delta(x - x_s) \delta(y - y_s) \delta(z - z_s) \quad (1)$$

که $\rho(x, y, z)$ توزیع مکانی مقاومت ویژه الکتریکی، $\varphi(x, y, z)$ پتانسیل الکتریکی، I چشمه جریان الکتریکی نقطه ای در سطح، و δ تابع دلتای دیراک است. با اعمال تبدیل فوریه در راستای امتداد عوارض زیر سطح، معادله (۱) به صورت زیر تبدیل خواهد شد.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\sigma(x, z) \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial x} \right) - k_y^2 \sigma(x, y) \tilde{\varphi} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\sigma(x, z) \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial z} \right) = -\frac{1}{2} \delta(x - x_s) \delta(z - z_s) \quad (2)$$

که $\sigma(x, z)$ توزیع هدایت الکتریکی، $\tilde{\varphi}$ پتانسیل الکتریکی در حوزه فوریه، و k_y اعداد موج نسبت به y

است. همانطور که مشخص است، معادله (۲) دو مولفه مکانی x و z دارد؛ و اندازه گیری های الکتریکی در صفحه $y = 0$ انجام می شود. جهت بکارگیری روش تفاضلات محدود برای حل معادله ۲، زیر سطح به اجزای مستطیل شکلی تقسیم بندی می شوند و تمام مقادیر مولفه های فیزیکی به نقطه مرکزی آن، و یا همان گره، نسبت داده می شود. در نهایت، با حل معادله ۲ در تمامی گره ها، معادله ماتریسی ساده شده زیر حاصل می شود (مک گلیوری و اولدنبرگ، ۱۹۹۰).

$$R \tilde{\varphi} = q \quad (3)$$

که R ماتریس متقارن پنج قطری تنک و q بردار چشمه است. خصوصیات ماتریس R مانند تقارن و پنج قطری بودن آن، کمک زیادی به حل سریع محاسبات می کند. پس از محاسبه توزیع پتانسیل الکتریکی در حوزه فوریه، با بکارگیری عکس تبدیل فوریه، می توان توزیع پتانسیل و متعاقباً توزیع مقاومت ویژه الکتریکی زیر سطح $\rho(x, z, y = 0)$ را در حوزه مکان بدست آورد (قناتی و همکاران، ۲۰۲۰). در ادامه، محاسبه توزیع مقاومت ویژه الکتریکی با استفاده از داده های اختلاف پتانسیل سطحی شرح داده است.

۲-۲ مدل سازی وارون

در این زیربخش، حل معادله وارون بر اساس مدل سازی پیشرو ارائه شده توسط قناتی و همکاران (قناتی و همکاران، ۲۰۲۰) شرح و بسط داده شده است. در ابتدا فرض می شود داده مشاهده ای به صورت بردار $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^{m \times 1}$ توسط نوفه گوسی با میانگین صفر و واریانس ε^2 آغشته شده است. همچنین پارامترهای مدل با بردار $\mathbf{m} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ و عملگر غیرخطی پیشرو $f \in \mathbb{R}^{m \times n}$ معرفی می شود که پارامترهای مدل توسط این عملگر به داده های حاوی نوفه تصویر می شود. مساله وارون غیر خطی مقاومت ویژه الکتریکی به شدت بدوضع است و لذا پارامترهای تخمین

مدلی نزدیک به واقعیت زمین ضرورتی اجتناب‌ناپذیر است. روش‌های مختلفی برای برآورد سطح نوفه در داده‌های توموگرافی الکتریکی ارائه شده است از جمله می‌توان به دو روش هم‌پاسخی و برانبارش اشاره کرد. خطاهای برانبارش به وسیله میانگین‌گیری انباشته‌ها (که این کار توسط دستگاه‌های اندازه‌گیری توموگرافی الکتریکی هم‌زمان با اندازه‌گیری مقادیر مقاومت ویژه جمع‌آوری می‌گردد) حاصل می‌شوند. بنابراین سطح نوفه تخمینی در هر ایستگاه اندازه‌گیری به ازاء n تکرار برداشت از رابطه زیر محاسبه می‌شود.

$$e_l = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (d_i^l - \bar{d}^l)^2 \quad (6)$$

$$i = (1, \dots, n)$$

$$l = (1, \dots, m)$$

به طوری که \bar{d}^l نشان دهنده تعداد تکرار اندازه‌گیری در هر ایستگاه، l تعداد ایستگاه‌های اندازه‌گیری در یک پروفیل و \bar{d}^l موید میانگین داده‌های تکرار شده در یک اندازه‌گیری است. با استفاده از این رابطه سطح نوفه داده اندازه‌گیری شده در هر ایستگاه برآورد می‌شود. روند وارون‌سازی با توجه به غیر خطی بودن مساله وارون، با خطی کردن تابع پیشرو $f(\mathbf{m})$ بر اساس سری تیلور حل می‌شود. با استفاده از سری تیلور و رابطه بازگشتی مدل \mathbf{m}^k خواهیم داشت:

$$f(\mathbf{m}^{k+1}) = f(\mathbf{m}^k) + \nabla f(\mathbf{m}^k)(\mathbf{m}^{k+1} - \mathbf{m}^k) \quad (7)$$

که

$$\nabla f(\mathbf{m}^k) = \frac{\partial f(\mathbf{m}^k)_i}{\partial m_j^k} \quad (i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n)$$

ژاکوبین $f(\mathbf{m})$ در تخمین قبلی \mathbf{m}^k است. جملات بعدی سری تیلور حذف شده است. ماتریس ژاکوبین تغییرات پاسخ مدل‌سازی پیشرو را به تغییرات پارامترهای مدل نشان می‌دهد. ساختار این ماتریس بسیار حائز اهمیت است. زیرا بخشی از کارآمدی روند وارون‌سازی وابسته به حل ماتریس ژاکوبین است.

شده یکتا نخواهند بود. جهت حل بهینه معادلات وارون بایستی موارد متعددی لحاظ شود. برای مثال تابع عدم برازش، خطای مدل در بخش منظم‌سازی، و قیدهای فیزیکی با هدف افزایش پایداری فرآیند وارون‌سازی لحاظ می‌گردد. جهت حل این معادله غیر خطی، تابع هدف $\psi(\mathbf{m}, \mu)$ به صورت جمع وزن‌داری از تابع عدم برازش $\phi_{\mathbf{d}}$ و تابع پایدارکننده $\phi_{\mathbf{m}}$ با ضریب وزنی μ تعریف شده و کمینه حالت آن جستجو می‌شود.

$$\operatorname{argmin}_{\mathbf{m} \in \mathbb{R}^{n \times 1}} (\psi(\mathbf{m}, \mu)) \quad (4)$$

$$= \operatorname{argmin}_{\mathbf{m} \in \mathbb{R}^{n \times 1}} \{\phi_{\mathbf{m}} + \mu^{-1} \phi_{\mathbf{d}}\}$$

$$\operatorname{argmin}_{\mathbf{m} \in \mathbb{R}^{n \times 1}} (\psi(\mathbf{m}, \mu)) \quad (5)$$

$$= \operatorname{argmin}_{\mathbf{m} \in \mathbb{R}^{n \times 1}} \left[(\mathbf{m} - \mathbf{m}_{apr})^T \mathcal{L}_m^T \mathcal{L}_m (\mathbf{m} - \mathbf{m}_{apr}) + \mu^{-1} \{(\mathbf{d} - f(\mathbf{m}))^T \Gamma^T \Gamma (\mathbf{d} - f(\mathbf{m}))\} \right]$$

که \mathcal{L}_m ماتریس هموارساز پارامترهای مدل، Γ ماتریس وزنی داده‌ها که یک ماتریس قطری با مولفه‌های حاوی انحراف معیار داده‌ها، μ پارامتر منظم‌سازی، و \mathbf{m}_{apr} برداری حاوی اطلاعات اولیه‌ای از پارامترهای مدل \mathbf{m} است. ماتریس وزنی داده بر اساس خطای داده با فرض مستقل بودن هر یک از آنها و توزیع نرمال آن شکل می‌گیرد. در این مقاله، اثرگذاری این ماتریس در نتایج وارون بررسی می‌شود. آگاهی از توزیع آماری و سطح نوفه به دلیل ویژگی‌های خاص مسئله وارون می‌تواند نقش محوری در وارون‌سازی مقاومت ویژه الکتریکی ایفا کند. بطوریکه برآورد درستی از مقادیر نوفه، مانع برازش بیش از حد و کمتر از حد داده‌های محاسباتی و داده‌های صحرائی در حین وارون‌سازی می‌شود. در واقع برازش نامناسب (یعنی برازشی که مقدار پارامتر χ^2 خیلی بیشتر یا کمتر از یک باشد) منجر به ایجاد بی‌هنجاری‌های کاذب یا از دست دادن جزئیات مهم در مدل وارون نهایی می‌شود؛ بنابراین برآورد صحیح از سطح نوفه داده‌های صحرائی از طریق مدل‌های ریاضی و یا تکنیک‌های صحرائی با هدف تخمین

با استفاده از معادله ۶، تابع هدف به صورت زیر نوشته می‌شود.

$$\psi(\delta \mathbf{m}, \mu) = \arg \min_{\delta \mathbf{m} \in \mathbb{R}^{n \times 1}} \{ \mu^{-1} \|(\delta \mathbf{d} - J \delta \mathbf{m})\|_{l^{-1}}^2 + \|\mathcal{L}_m(\delta \mathbf{m})\|_2^2 \} \quad (8)$$

که J ماتریس ژاکوبین، و $\delta \mathbf{d} = [\log \mathbf{d} - \log f(\mathbf{m})]$ است.

حل تابع هدف نتایج ذیل را به همراه دارد (Aster et al, 2020).

$$\delta \mathbf{m}^{k+1} = \vartheta^k \times \{ (J^T(\mathbf{m}^k) \Gamma^T \Gamma J(\mathbf{m}^k) + \mu \mathcal{L}_m^T \mathcal{L}_m \mathbf{D}_z)^{-1} \times J^T(\mathbf{d} - f(\mathbf{m}^k)) - \mu \mathcal{L}_m^T \mathcal{L}_m \mathbf{D}_z(\mathbf{m}^k - \mathbf{m}_{apr}) \} \quad (9)$$

که J^T ترانهاده ماتریس J ، \mathbf{D}_z ماتریس وزن دهنده عمقی پارامترهای مدل، k بیانگر تکرار روند وارون‌سازی، $\delta \mathbf{m}^{k+1}$ مسیر جستجو، و ϑ طول گام است. مقادیر مثبت ϑ مانع واگرایی وارون‌سازی می‌شود. ماتریس ژاکوبین یا تابع حساسیت با استفاده از مدل‌سازی پیشرو $2/5$ بعدی به روش تفاضلات محدود، محاسبه شده است. نتایج حاصل از وارون‌سازی با بکارگیری روابط فوق، احتمالاً با واقعیت زمین فاصله خواهد داشت. جهت دستیابی به نتایج واقعی‌تر، می‌توان قیدهای فیزیکی را بکار برد. به این منظور ایده معرفی شده توسط کیم و کیم (کیم و کیم؛ ۲۰۱۱) جهت مقید کردن نتایج در بازه‌ای تعریف شده در قالب اهداف مدنظر طرح ریزی شده است.

روند کمینه‌سازی بر روی مجموعه‌ای از μ ها انجام می‌شود. در واقع مادامی که خطای برازش داده ϕ_d در یک سطح مشخصی ثابت باشد، هموارترین مدل توسط μ بهینه ایجاد خواهد شد. اساساً جستجوی هموارترین مدل بر این پایه استوار است که از عوارض ساخته شده ناشی از برازش

نوفه‌های اندازه‌گیری شده کاسته شود. این رویکرد حل مساله، همان رویکرد روند وارون‌سازی اُکام است که در ۲ گام انجام می‌شود. در گام نخست تمرکز بر کاستن خطای برازش تا به بازه‌ای مشخص (برای مثال $\chi^2 =$ $\|\mathbf{d} - f(\mathbf{m})\|_{l^{-1}}^2/m$ که m طول بردار داده بوده و مقدار χ^2 به سمت ۱ نزدیک می‌شود) است، و در گام دوم مادامی که مقدار تابع هدف کم می‌شود، خطای برازش در سطح مشخص شده باقی می‌ماند تا هموارترین توزیع از فضای مدل حاصل شود. الگوریتم معرفی شده به صورت مبسوط توسط فلاح صفری و قناتی (۲۰۲۲) شرح داده شده است.

۲-۳ ارزیابی نتایج حاصل از وارون‌سازی

نتایج تفسیر داده‌های ژئوفیزیک معمولاً در قالب یک مدل متناظر با سازندهای زمین در منطقه مورد بررسی ارائه می‌شود. این مدل، حاصل وارون داده‌های ژئوفیزیکی آلوده به نوفه‌ای است که در آن محل برداشت شده‌اند. از طرفی، به دلیل پیچیدگی‌های مسائل وارون ژئوفیزیکی و تعداد کم داده‌ها، راه‌حل‌ها معمولاً ناپایدار هستند. برای غلبه بر این مشکلات، از روش‌های بهینه‌سازی مانند روش‌های تکراری، فیلترینگ، تخمین بیشینه درستیابی و ... استفاده می‌شود. این روش‌ها پایداری و دقت مدل‌ها را ارتقاء می‌دهند. با این حال، عدم قطعیت نتایج بایستی مورد ارزیابی قرار بگیرد. برای ارزیابی دقت مدل‌ها، می‌توان از روش‌های آماری مانند تحلیل حساسیت، چگالی تفکیک پذیری، حد بیشینه تغییرات، تحلیل عدم قطعیت و ... استفاده کرد. این روش‌ها کمک می‌کنند تا صحت نتایج مورد سنجش قرار گیرد.

ماتریس حساسیت مدل‌های ژئوفیزیکی به عنوان نسبت تغییرات داده‌ها به تغییرات پارامترهای مدل تعریف می‌شود. کلمه وضوح توسط باکوس و گیلبرت (باکوس و گیلبرت، ۱۹۶۷ و ۱۹۶۸) در مورد تجزیه و تحلیل قدرت

اساساً مبتنی بر محاسبه داده‌ها و وضوح مدل و ماتریس‌های کوواریانس هستند. این ماتریس‌ها ارزیابی از کیفیت مدل‌سازی وارون ژئوفیزیکی را با نمایش توزیعی از واریانس‌های پارامتر مدل m ، که انحراف استاندارد پارامترهای مدل از نتیجه وارون‌سازی را توصیف می‌کند، ممکن می‌سازد. با این حال، در کاربردهای ژئوفیزیکی، ممکن است تخمین مرزهای بالای تغییرات در حل مسئله وارون برای خطاهای داده‌های مشاهده شده نیز مفید باشد. این مرزهای بالایی تغییرات مدل، وضوح واقعی وارون‌سازی ژئوفیزیکی را محدود می‌کند و در واقع، وضوح واقعی مساله وارون را تعیین می‌کند. با استفاده از این روش می‌توان خروجی‌ای به صورت توزیع تغییرات مدل تخمین زده شده داشت. لذا، با استفاده از توزیع مکانی مرزهای بالایی پارامترهای مدل، ارزیابی مفیدی از مقطع وارون به دست می‌آید. به عبارتی، مدل‌های بدست آمده از وارون‌سازی، بایستی به گونه‌ای ارزیابی شوند تا بتوان بخش‌هایی از مدل که اعتبار تفسیری بالاتری دارند (مناطق با تفکیک پذیری بالا) را مشخص کرد. بر همین اساس، جهت تحلیل مدل‌های بدست آمده وارون‌سازی از ایده ارائه شده توسط زادانوف و توستایا (ژادانف تولستایا، ۲۰۰۶) استفاده می‌شود. با توجه به پژوهش مذکور، محاسبه چگالی تفکیک پذیری و حد بیشینه تغییرات طبق معادلات زیر به دست می‌آید.

$$\mathcal{R} = \|\mathbf{d}\|^{-1} [\text{diag}(\mathbf{R}_\alpha \mathbf{R}_\alpha^T)]^{-1/2}$$

$$\Delta_i \max = \varepsilon \|\mathbf{d}\| \left[\sum_{j=1}^{N_d} |\mathbf{R}_{\alpha ij}|^2 \right]^{1/2} \quad (10)$$

$$= \varepsilon / \mathcal{R}_i$$

که \mathcal{R} ماتریس چگالی تفکیک‌پذیری با ابعاد $\frac{1}{[\text{unit of Resistivity}]}$ ، داده، \mathbf{d} ، \mathbf{R}_α ماتریس وارون تعمیم یافته $(\mathbf{J}^T (\mathbf{m}^k) \Gamma^T \Gamma (\mathbf{m}^k) + \mu \mathbf{L}_m^T \mathbf{L}_m \mathbf{D}_z)^{-1} \times \mathbf{J}^T \Gamma^T \Gamma$ ، $\Delta_i \max$ بیشینه تغییرات حل وارون مرحله i ام، ε خطای نسبی داده، و N_d تعداد داده است. با بکارگیری معادله فوق میتوان

تفکیک روش‌های وارون ژئوفیزیک معرفی شد. حساسیت داده‌برداری به تغییرات افقی و عمودی مقاومت ویژه زیرسطحی از ویژگی‌های مهمی است که می‌بایست در برداشت مقاومت ویژه الکتریکی در نظر گرفت. این مولفه در رابطه با تفکیک‌پذیری جانبی و عمودی یک آرایه در شناسایی آنومالی‌های زیرسطحی می‌باشد. جهت تعیین این ویژگی، یعنی میزان توانایی تفکیک‌پذیری افقی و عمودی یک آرایه از تابع حساسیت استفاده می‌گردد (مک گلیوری و اولدنبرگ، ۱۹۹۰؛ داهلین و ژو، ۲۰۰۴). در واقع تابع حساسیت به صورت کمی بیان می‌کند که چه میزان تغییرات مقاومت ویژه الکتریکی یک مقطع زیرسطحی می‌تواند مقادیر پتانسیل اندازه‌گیری شده با یک آرایه خاص را تحت تاثیر قرار دهد. به زبان ریاضی این مطلب از طریق تابع حساسیت یا مشتق فرچت بیان می‌شود (قناتی و فلاح صفری، ۲۰۲۲). این نکته قابل ذکر است که هر چه مقدار تابع حساسیت در نقطه‌ای بیشتر باشد، اثر مقاومت ویژه آن نقطه روی اندازه‌گیری بیشتر خواهد بود. همچنین توجه شود که برای تمام آرایه‌ها، بالاترین حساسیت مربوط به نقاط نزدیک الکترودها می‌باشد. در فواصل دورتر از الکترودها، شکل خطوط هم‌ارزش (کانتور) برای آرایه‌های مختلف متفاوت است. تفاوت الگوی خطوط هم‌ارزش تابع حساسیت برای آرایه‌های مختلف، به ما کمک می‌کند که تا پاسخ آرایه‌های مختلف را به انواع ساختارها پیش‌بینی کنیم. تحلیل حساسیت به تفصیل توسط قناتی و فلاح صفری (قناتی و فلاح صفری، ۲۰۲۲) شرح داده شده است.

ارزیابی مقاطع وارون ژئوفیزیکی بر اساس محاسبه ماتریس‌های تفکیک‌پذیری مدل و ماتریس‌های کوواریانس مدل‌ها انجام‌پذیر است. در برخی موارد، ارزیابی حد بالای تغییرات در راه‌حل مسئله وارون ضروری است. این موضوع قابلیت حل وارون را در تمایز دادن بین دو مدل مشابه در حضور نوفه در داده‌ها مشخص می‌کند. تکنیک‌های معمول برای ارزیابی مقاطع وارون ژئوفیزیکی

نظر گرفتن ماتریس وزنی داده‌ها (Γ) در فرآیند مدل‌سازی وارون را نشان می‌دهد. پس از اعمال ماتریس وزنی داده‌ها در روند وارون‌سازی، مقطع متفاوتی به دست می‌آید که در شکل ۳ نشان داده شده است. همانطور که انتظار می‌رود، با مشاهده شبه مقطع نمی‌توان تفسیر مناسبی از تغییرات عوارض زیرسطحی داشت؛ برای مثال رولایه در شبه مقطع دیده نمی‌شود. سه شرط توقف جهت کنترل روند وارون‌سازی در طول برنامه گنجانده شده است. این سه شرط عبارتند از (۱) $\chi^2 \leq 1$ ، یا (۲) تکرار روند وارون‌سازی به میزان حداکثری تعریف شده، یا (۳) $\epsilon \leq \left(\frac{\|\chi_k^2 - \chi_{k-1}^2\|_2}{\|\chi_k^2\|_2} \right)$ که برابر با 0.2 است. وارون‌سازی با تعریف مدل همگن (m_0) با مقداری برابر با میانگین مقاومت ویژه ظاهری‌های برداشت شده، شروع به محاسبه می‌کند. با توجه به شکل‌های ۲ و ۳، دایک به خوبی مشخص شده است. اما عوارض غیر واقعی در بخش‌هایی از ناحیه با مقاومت ویژه بالا ایجاد شده است (شکل ۲). همچنین مقادیر مقاومت ویژه این محدوده با مدل حقیقی فاصله دارد. اما این بخش‌ها در شکل ۳ تقریباً یکنواخت و نزدیک به مدل حقیقی است. علاوه بر این، مقادیر مقاومت ویژه محاسبه شده مربوط به رولایه در شکل ۲ خطای زیادی داشته ولی در شکل ۳ این اختلاف ناچیز است. روند وارون‌سازی مربوط به شکل ۲ و ۳ به ترتیب به میزان ۱۵ و ۱۲ مرتبه تکرار شده است و خطای برازش آن (یعنی خطای جذر میانگین مربعات) $(RMSE = \sqrt{\sum_{i=1}^m (d - f(\mathbf{m}))_i^2 / m})$ برابر با ۲۳ و ۱۰ شد. همچنین مقادیر χ^2 در مدل نمایش داده شده در شکل ۳ برابر ۱/۹۵ برآورد شد. با توجه عدم استفاده از ماتریس وزنی داده‌ها در مدل نمایش داده شده در شکل ۲، امکان برآورد مقدار χ^2 وجود ندارد. مقادیر بدست آمده برای معیارهای خطای جذر میانگین مربعات و χ^2 ، به این معنا است که وارون‌سازی انجام شده در شکل ۳، محدودیت حاصل از

چگالی تفکیک‌پذیری را محاسبه کرد. از طرفی، دو مدل m^1 و m^2 که در آنها شرط $|m_i^1 - m_i^2| \geq \Delta_i \max$ ϵ / \mathcal{R}_i برقرار باشد، مدل‌های قابل تفکیک در روند وارون‌سازی می‌باشند. به عبارتی حد بیشینه تغییرات مدل وارون، مشخص می‌شود. تفسیر همزمان مقاطع چگالی تفکیک‌پذیری و بیشینه تغییرات مدل، ملاک مناسبی جهت ارزیابی مدل‌های وارون است. در واقع، هر یک از درایه‌های مقطع وارون و یا هر زون آن را می‌توان از دیدگاه حساسیت داده ثبت شده به تغییرات آن و نیز بیشینه تغییرات مدل قابل قبول وارون‌سازی، ارزیابی کرد.

۳ مثال‌های عددی

در این بخش نتایج حاصل از بررسی‌های عددی یک مدل مصنوعی و یک مجموعه داده واقعی جهت ارزیابی اثرگذاری ماتریس وزنی، ارائه می‌شود.

۳-۱ مدل مصنوعی

داده‌های مصنوعی مورد استفاده در این زیربخش توسط نرم‌افزار متن‌باز RESIP2DMODE تولید شده است (قناتی و همکاران، ۲۰۲۰). مقاومت ویژه الکتریکی ظاهری بر روی مدلی به طول ۱۴۰ متر با استفاده از آرایه دو قطبی-دوقطبی و فاصله الکترودی ۵ متر و حداکثر پرش ۸ محاسبه تولید شده است. در این مدل نسبتا پیچیده، یک دایک شب‌دار رسانا با مقاومت ویژه الکتریکی ۱۰ اهم‌متر در محیط همگن به مقاومت ویژه ۱۰۰۰ اهم‌متر و با رولایه‌ای نامسطح با مقاومت ویژه الکتریکی ۱۰۰ اهم‌متر در نظر گرفته شده است (شکل ۱). داده‌های مصنوعی جهت شبیه‌سازی بیشتر به برداشت‌های صحرائی با ۵٪ نوفه گوسی با میانگین صفر آغشته شده است. آستانه تغییرات مقاومت ویژه الکتریکی در روند وارون‌سازی در این مثال ۱ تا ۱۰۰۰۰ اهم‌متر در نظر گرفته شده است. شکل ۲ شبه مقطع داده‌های آغشته به نوفه، داده محاسباتی و مقطع حاصل وارون‌سازی بدون در

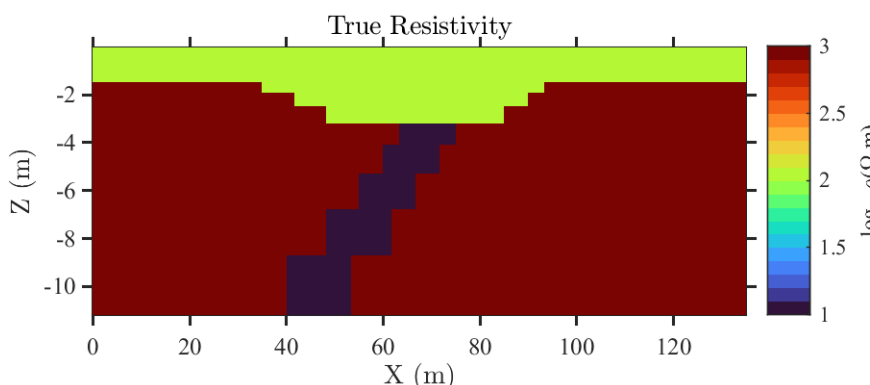
سازند هزار دره در شرق تهران از کنگلومراهای سنگی و رسوبات کنگلومرانی تشکیل شده است. این سازند، نهشته‌های رودخانه‌ای سیلابی است که از شمال شرقی تهران و از میان کوه‌های البرز به سوی جنوب و جنوب شرقی تهران جاری بوده‌اند. ضخامت این سازند در برش الگوی تپه‌های غربی رودخانه جاجرود حدود ۱۰۰۰ تا ۱۲۰۰ متر است. ویژگی‌های سازند هزار دره عبارت است از ضخامت زیاد، طبقه‌بندی منظم، قطر قطعات متوسط ۱۰ تا ۲۵ سانتی‌متر، و رنگ خاکستری روشن. این سازند نشان‌دهنده وجود جنبش‌های زمین‌ساختی جوان در منطقه است.

به طور کلی، سازند هزار دره از لحاظ سنگ‌شناسی اصولاً از کنگلومراها تشکیل شده است. این کنگلومراها دارای دانه‌های نیمه زاویه‌دار تا گرد شده و سیمان رسی - ماسه‌ای خاکستری رنگ دارند. در نزدیکی منشاء جریان‌های گلی، کنگلومراها جور نشده و بخش داخلی محیط بادبزی را ایجاد کرده‌اند. دورتر از منشاء، کنگلومراها نسبتاً جور شده و توسط رودخانه‌های بریده در بخش میانی محیط بادبزی تشکیل شده‌اند. همچنین، نهشته‌های چین نخورده کواترنری از آبرفت‌های جوان‌تر تقریباً افقی با ناپیوستگی بر روی آنها قرار گرفته‌اند.

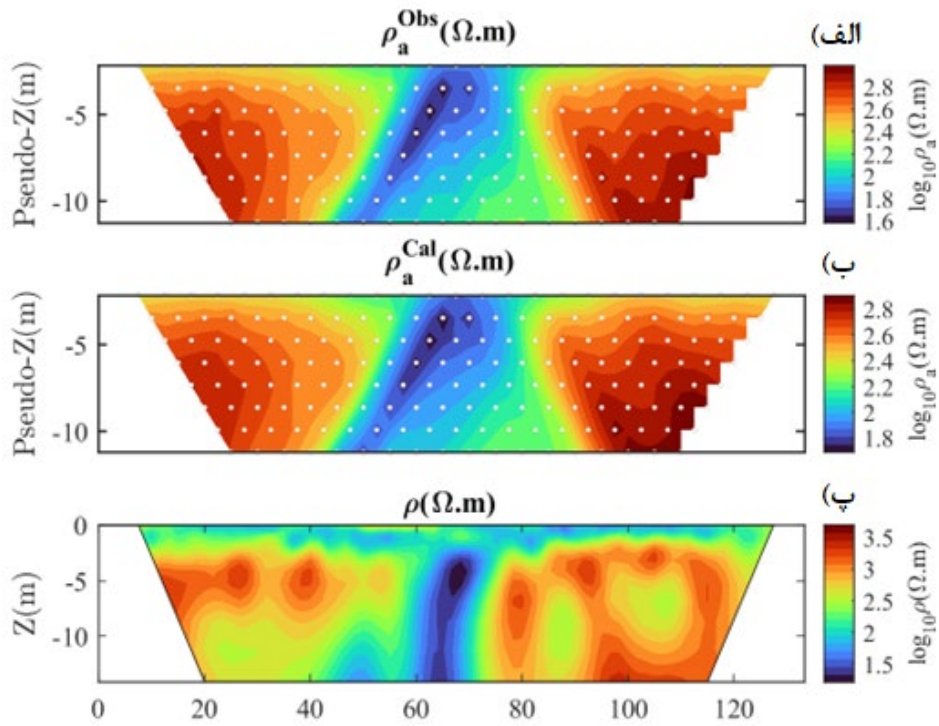
خطای داده را به خوبی در نظر داشته و به میزان مناسبی، داده‌های مشاهده‌ای را با داده محاسبه‌ای برازش داده است. همچنین بهبود تفکیک آنومالی‌های زیرسطحی و افزایش صحت مقادیر مقاومت ویژه تخمینی و نیز عدم حضور آنومالی‌های کاذب در توموگرام نهایی، پس از اعمال ماتریس وزنی داده‌ها مشهود است.

۲-۳ مثال داده‌های صحرائی

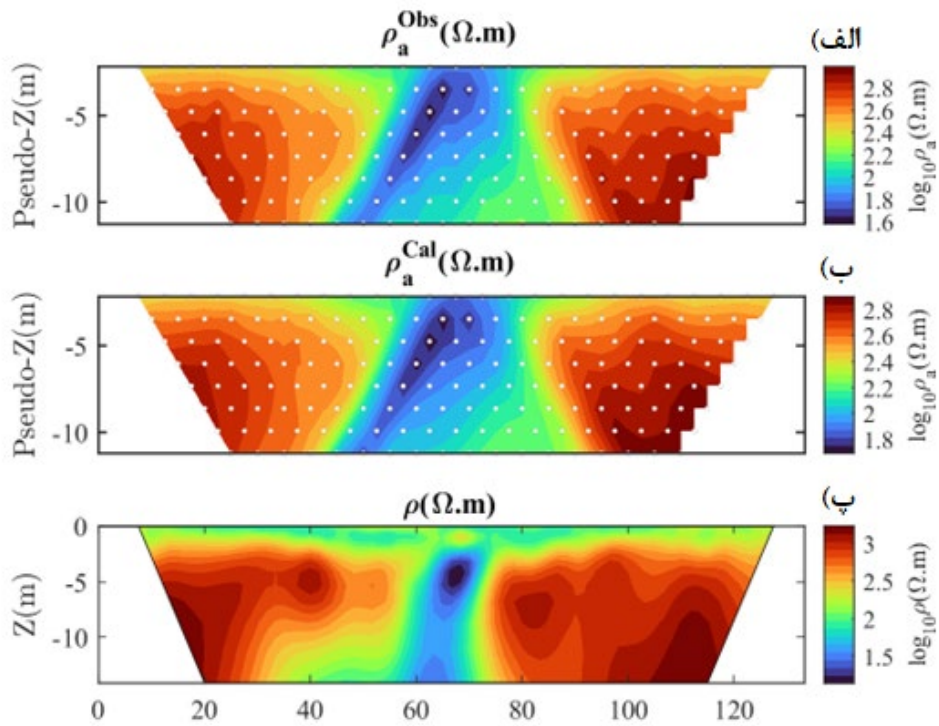
پس از ارزیابی و تحلیل اثرات ماتریس وزنی داده‌ها در نتایج مدلسازی وارون، در این زیربخش بررسی‌ها بر روی داده‌های صحرائی انجام می‌شود. اطلاعات زمین‌شناسی محل برداشت داده با دقت مناسبی وجود داشته و علاوه بر آن جهت ارزیابی نتایج از اطلاعات چاه آب کشاورزی موجود در منطقه نیز استفاده شده است. با بررسی نتایج حاصل از این مثال عددی، تاثیرگذاری ماتریس وزنی بر نتایج وارون به خوبی مشخص می‌شود. برداشت صحرائی مقاومت ویژه الکتریکی در قالب یک پروفیل نسبتاً بلند در شمال شرق تهران و در منطقه سوهانک انجام شده است. با توجه نقشه ۱/۲۵,۰۰۰ لویزان (تهیه شده توسط سازمان زمین شناسی و اکتشافات معدنی کشور)، برداشت داده بر روی سازند هزار دره انجام شده است.



شکل ۱. مدل مصنوعی یک دایک شب دار رسانا در محیط همگن و با رولایه‌ای نامسطح با مقاومت ویژه الکتریکی به ترتیب ۱۰، ۱۰۰۰ و ۱۰۰ اهم‌متر.



شکل ۲. الف) شبه مقطع داده‌های آغشته به نوفه، ب) داده محاسباتی، و پ) مقطع حاصل وارون‌سازی بدون در نظر گرفتن ماتریس وزنی داده مدل مصنوعی شکل ۱.



شکل ۳. الف) شبه مقطع داده‌های آغشته به نوفه، ب) داده محاسباتی، و پ) مقطع حاصل وارون‌سازی با نظر گرفتن ماتریس وزنی داده مدل مصنوعی شکل ۱.

متفاوت داده‌ها خواهد شد. به عبارتی، وزن داده‌ها در روند وارون‌سازی تغییرات قابل توجهی خواهد داشت. از اینرو، پیش‌بینی می‌شود که اعمال ماتریس وزنی داده در روند وارون‌سازی منجر به دستیابی نتایج متفاوت و بهبود یافته‌ای نسبت به راه‌حلهایی بدون در نظر گرفتن آن خواهد شد. در واقع وجود ماتریس وزنی که حاوی عکس انحراف معیار داده‌ها است باعث ایجاد وزن بیشتر به داده‌های با نوفه کمتر و وزن کمتر به داده‌های با سطح نوفه بالاتر در فرآیند حل مسئله وارون می‌شود. به عبارت دیگر تاثیر داده‌ها با سطح نوفه پایین‌تر در مرحله وارون‌سازی نسبت به داده‌های پُر نوفه بیشتر خواهد بود.

شکل ۴، داده مشاهده‌ای، داده محاسبه‌ای و مقطع مقاومت ویژه الکتریکی حاصل از وارون‌سازی بدون اعمال ماتریس وزنی داده را نمایش می‌دهد. رولایه‌ای نسبتاً ضخیم با ضخامت حدوداً ۱۵۰ متر در طول مقطع مشاهده می‌شود. اما در عمق دو ناحیه مقاوم و رسانا با مرز تقریباً عمودی مشاهده می‌شود. جهت ارزیابی این مقطع از ۳ مولفه چگالی تفکیک‌پذیری، بیشینه تغییرات مدل، و حساسیت استفاده شده است. الگوی رفتاری این مولفه‌ها در شکل ۵ نشان داده شده است. همانطور که انتظار می‌رود با افزایش عمق، مقادیر آنالیز حساسیت کاهش خواهد بود. این روند به خوبی در شکل ۵ دیده می‌شود. از طرفی در بخش میانی مقطع چگالی تفکیک‌پذیری، در محل ۵۰۰ تا ۶۰۰ متری مقطع و در محلی زون مقاوم عمیق که بالا آمدگی بیشتری دارد، مقادیر کاهش یافته است. مقادیر بیشینه تغییرات مدل در همین محل، به نسبت اطراف خود افزایش یافته است. در واقع، اعتماد به مقادیر محاسبه‌ای در این محدوده کم می‌باشد. در مجموع، وجود این زون مقاوم مبهم بوده و تفسیر آن چالش برانگیز است. همچنین، وجود زون مقاوم با شواهد زمین‌شناسی که وجود لایه‌های ضخیم یکنواخت را پیش‌بینی می‌کند، و چاه آب شرب در انتهای پروفیل و به عمق ۲۵۰ متر هم‌خوانی ندارد.

در گام بعد، ماتریس وزنی داده جهت بهبود نتایج وارون‌سازی اضافه شده است. شکل ۶ نتایج حاصل از این

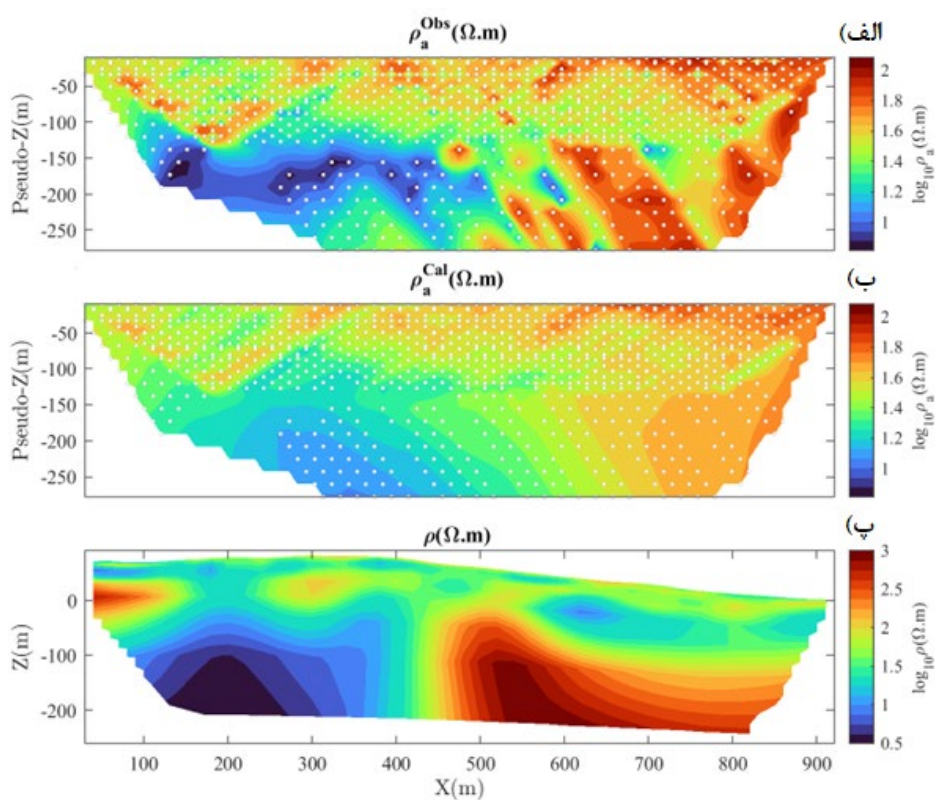
داده‌برداری در این محل با ترکیب آرایه‌های قطبی-دوقطبی، و قطبی-قطبی با فاصله الکترودی ۲۰ متر و طول پروفیل ۹۴۰ متر، جهت دستیابی به اعماق ۲۵۰ متری طراحی شده است. مشخصات این آرایه ترکیبی و پرش‌های به کار گرفته شده در آن در جدول ۱ خلاصه شده است. طراحی پرش‌ها به گونه‌ای انجام شده است که با عوض شدن هر آرایه، حداکثر هم‌پوشانی بین ۲ آرایه در عمق وجود داشته باشد و خلاء اطلاعات در بین داده‌های آرایه‌های متفاوت دیده نشود. همچنین در برداشت‌های آرایه‌های قطبی-دوقطبی و قطبی-قطبی به ترتیب از یک الکتروود و دو الکتروود در بینهایت فیزیکی و در فاصله حدود ۴ کیلومتری (باتوجه به محدودیت‌های مکانی گسترش الکتروودهای بینهایت) از امتداد پروفیل قرارداد شده. حذف داده بد، یکی از مراحل پردازش و تفسیر داده‌های ژئوفیزیکی می‌باشد. با پایش داده‌های ثبت شده می‌توان داده‌های بد (شامل داده‌های پرت، داده‌های با مقاومت تماسی بالا، داده‌های با خطای برانبارش بالا) را شناسایی کرده و با تکرار داده‌برداری، داده‌های مناسب را جایگزین آن کرد. اما در هر حال در برخی مواقع با توجه به شرایط بد محیطی و یا دلایل دیگری، این داده‌ها ثبت می‌شوند و در مراحل پردازش داده شناسایی و حذف می‌شوند. داده‌برداری مثال صحرائی اشاره شده، در منطقه‌ای تقریباً شهری انجام شده است که اختلالاتی در روند داده‌برداری ایجاد می‌کند. همچنین محیط زیرسطحی تقریباً رسانا بوده که موجب افت اختلاف پتانسیل ثبتی و کاهش نسبت سیگنال به نوفه می‌شود. حتی با تکرار داده‌برداری و انجام تمام موارد دستورات عمل‌ها جهت بهبود کیفیت داده‌های ثبت شده، تعداد قابل توجهی از داده‌ها و به خصوص داده‌های مربوط به اعماق از کیفیت مناسبی برخوردار نبوده و در مرحله پردازش داده‌ها حذف شدند. کاهش داده ورودی در روند وارون‌سازی، چالش‌های این مساله را افزایش می‌دهد. همچنین، ترکیب ۲ آرایه مختلف، تغییر چشمگیر فواصل بین الکتروودهای فرستنده و گیرنده در این آرایه‌ها، نسبت سیگنال به نوفه متفاوت هر آرایه، موجب ارزش‌گذاری

اما چالش تفسیری این مقطع، وجود زون نسبتاً مقاوم در ابتدای مقطع و شیب تند لایه رسنای زیرین آن است که تفسیر آن را دشوار می‌کند. اما با تامل در شکل ۷ که ملاک‌های ارزیابی این پروفیل در آن نشان داده شده است، مشخص می‌شود با توجه به مقادیر چگالی تفکیک پذیری پایین و بیشینه تغییرات مدل بالا در این مناطق، نمی‌توان به وجود این زون مقاوم اعتماد کرد و احتمالاً در اثر وجود نوفه ایجاد شده است. مطابق انتظار، مقادیر آنالیز حساسیت در این شکل نیز با افزایش عمق روندی تقریباً کاهشی دارد.

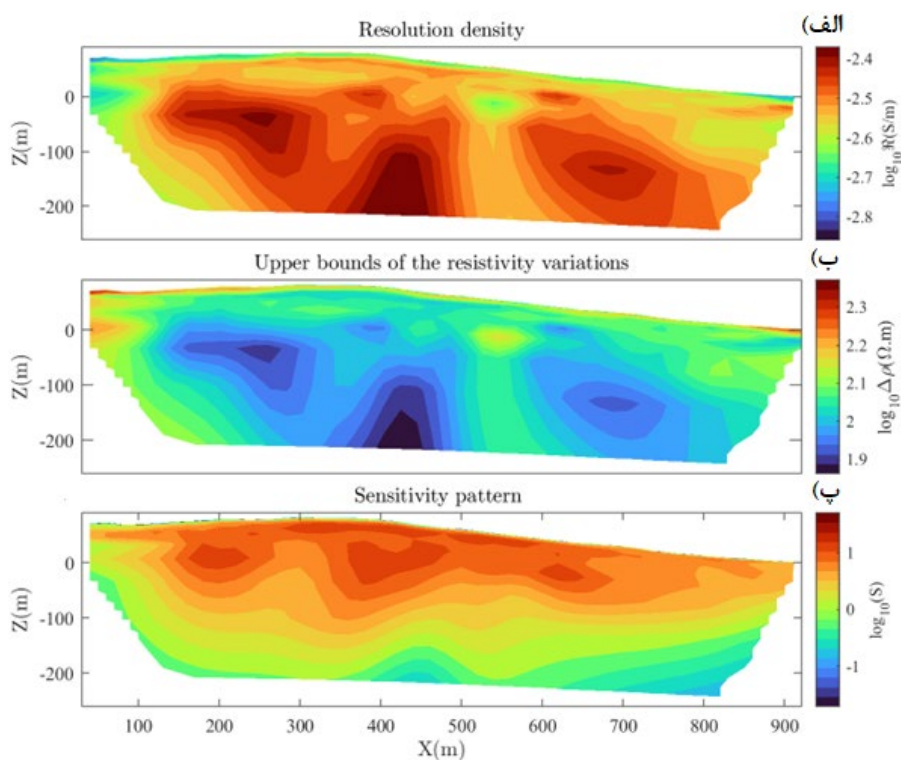
عمل را نشان می‌دهد. در این مقطع نیز رولایه نسبتاً ضخیمی دیده می‌شود. همچنین لایه رسنا با شیبی تقریباً برابر با شیب توپوگرافی، در عمق دیده می‌شود. مرز بالایی این لایه رسنا مربوط به سطح ایستابی می‌باشد. این تفسیر توسط داده چاه موجود در منطقه تایید می‌شود. لذا تفکیک رولایه و لایه زیرین در اثر وجود آب در آن بوده و لایه زمین‌شناسی جدیدی وجود ندارد. همچنین این لایه تا بیشینه عمق اکتشافی ژئوفیزیکی که برابر با ۲۶۰ متر است، همچنان ادامه دارد. این نکته نیز توسط زمین‌شناسی منطقه تایید می‌شود.

جدول ۱. مشخصات آرایه ترکیبی مثال صحرایی.

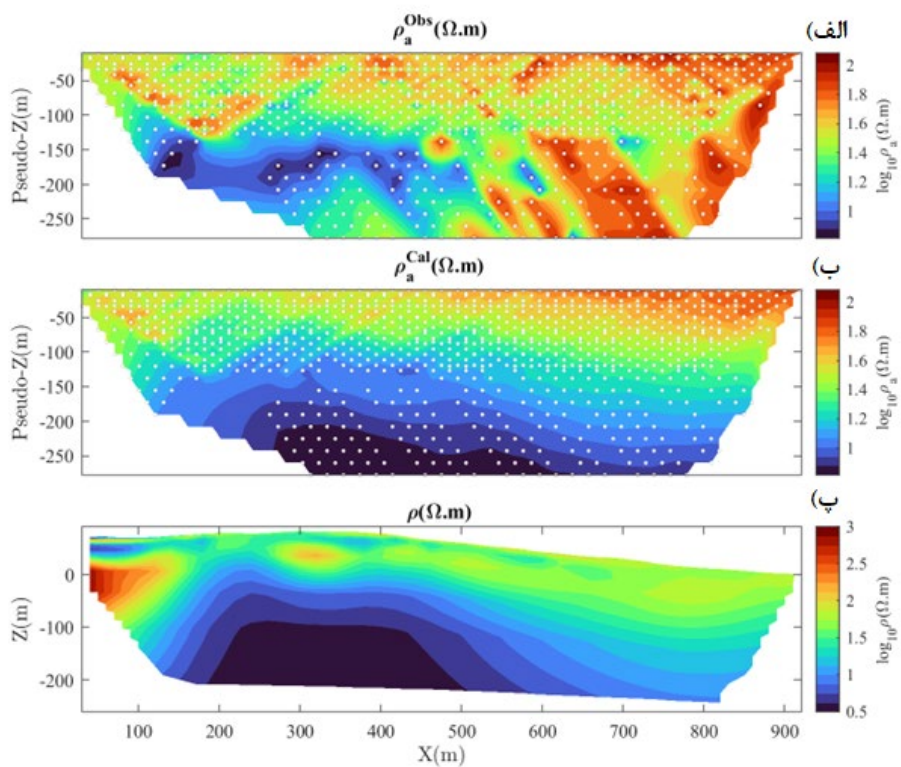
فاصله الکترودی	شماره پرش‌ها	تعداد پرش	آرایه
۲۰	۱-۱۶	۱۶	قطبی-دوقطبی
۲۰	۱-۱۶	۱۶	قطبی-قطبی



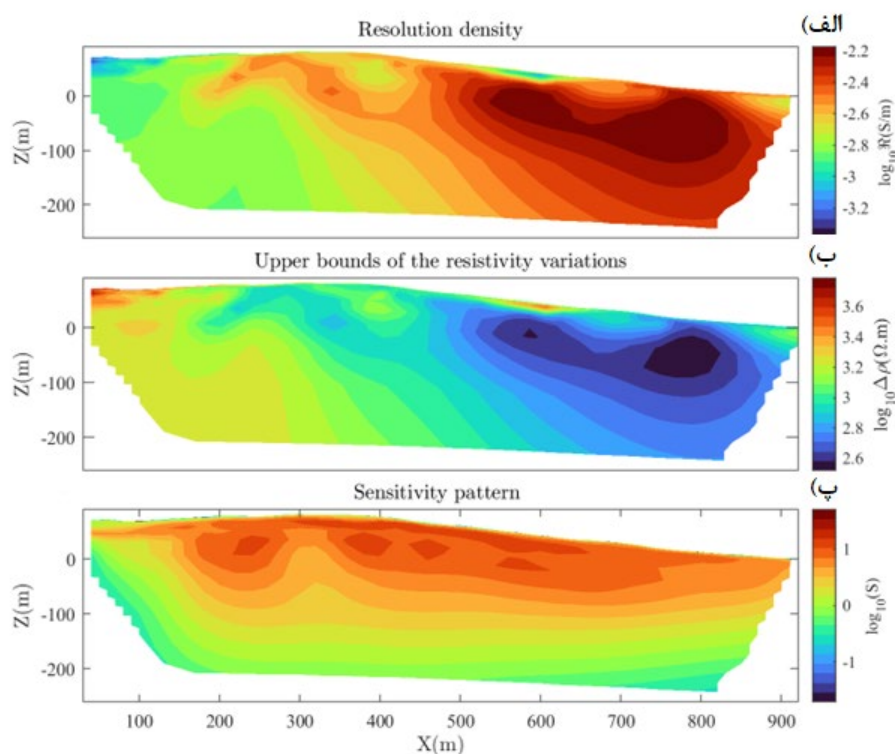
شکل ۴. الف) داده مشاهده‌ای، ب) داده محاسبه‌ای، و پ) مقطع مقاومت ویژه الکتریکی حاصل از وارون‌سازی مدل صحرایی بدون اعمال ماتریس وزنی داده‌ها.



شکل ۵. الف) چگالی تفکیک پذیری، ب) بیشینه تغییرات مدل، و پ) حساسیت خروجی مدل شکل ۴.



شکل ۶. الف) داده مشاهده‌ای، ب) داده محاسبه‌ای، و پ) مقطع مقاومت ویژه الکتریکی حاصل از وارون‌سازی مدل صحرانی با اعمال ماتریس وزنی داده‌ها.



شکل ۷. الف) چگالی تفکیک پذیری، ب) بیشینه تغییرات مدل، و پ) حساسیت خروجی مدل شکل ۶.

۴ بحث و نتیجه گیری

این مقاله به تحلیل اثرات ماتریس وزنی بر دقت وارون سازی داده های ژئوالکتریکی، به ویژه داده های مقاومت ویژه الکتریکی پرداخته است. با استفاده از روش اکام، بستر مناسبی برای اعمال ماتریس های وزنی و قیده های مختلف در روند وارون سازی فراهم شده است.

مطالعه نشان داد که ارزش داده ها به دلیل وجود نوفه های تصادفی، نسبت سیگنال به نوفه های مختلف، فاصله الکترودهای جریان و پتانسیل از هم، آرایه های مختلف به کار گرفته شده در طول یک پروفیل، و پیچیدگی های زمین شناسی در محل برداشت داده، یکسان نیست. بنابراین، بکارگیری ماتریس وزنی داده ها در روند وارون سازی ضروری است. در این تحقیق، عملکرد بکارگیری ماتریس وزنی در مدل های مصنوعی و صحرایی بررسی شد.

نتایج حاصل از مدل مصنوعی با لایه های نازک رسانا و عوارض عمودی مانند دایک ها نشان داد که اعمال ماتریس

وزنی، لایه رسانا ی سطحی را به خوبی نمایش می دهد و مقادیر مقاومت ویژه الکتریکی زمینه را به واقعیت نزدیک تر می کند. همچنین، عوارض غیر واقعی در مدل های بدون ماتریس وزنی مشاهده نشد.

در بررسی داده های صحرایی، مشخص شد که بدون اعمال ماتریس وزنی، مقطع حاصل از وارون سازی با واقعیت زمین شناسی تفاوت زیادی دارد و تفسیر آن همراه با خطا خواهد بود. اما با اعمال ماتریس وزنی، نتایج وارون سازی به زمین شناسی منطقه نزدیک تر بوده و صحت سنجی آن با استفاده از چاه آب کشاورزی موجود در پروفیل تأیید شد.

در ارزیابی خروجی مقاطع حاصل از وارون سازی، از سه معیار استفاده شده است: مقطع بیشینه تغییرات مدل، چگالی تفکیک پذیری و حساسیت خروجی. نتایج این ارزیابی ها نشان می دهد که استفاده از ماتریس وزنی منجر به نتایج دقیق تر و معتبرتری می شود. در برخی موارد، عدم

بکارگیری ماتریس وزنی منجر به ایجاد عوارض غیرواقعی در زیرسطح شده است.

در مجموع، نتایج این تحقیق نشان داد که استفاده از ماتریس وزنی داده‌ها در روند وارون‌سازی داده‌های ژئوالکتریکی، به ویژه در مدل‌های پیچیده و صحرائی چالشی، منجر به دستیابی به مدل‌های نزدیک‌تر به واقعیت می‌شود. استفاده از این رویکرد می‌تواند به محققان و مهندسان کمک کند تا مدل‌های دقیق‌تر و معتبرتری ایجاد کنند و تصمیم‌گیری‌های بهتری در زمینه اکتشافات ژئوالکتریکی داشته باشند.

منابع

- Backus, G., and J.F. Gilbert, Numerical applications of a formalism for geophysical inverse problems, *Geophys. J.R. Astron. Soc.*, 13, 247-276, 1967.
- Backus, G., and J.F. Gilbert, The resolving power of gross earth data, *Geophys. J.R. Astron. Soc.*, 16, 169-205, 1968.
- Binley, A., Tools and Techniques: DC Electrical Methods, In: *Treatise on Geophysics*, 2nd Edition, G Schubert (Ed.), Elsevier, Vol. 11, 233-259, 2015.
- Chambers, J., Kuras, O., Meldrum, P., Ogilvy, R., & Hollands, J. (2006). Electrical resistivity tomography applied to geologic, geologic, hydro-geologic, and engineering investigations at a waste-disposal site. *Geophysics*, 71(6), 1ND-Z126. doi:10.1190/1.2360184
- Constable, S., Parker, R., & Constable, C. (1987). Occam's inversion: A practical algorithm for generating smooth models from electromagnetic sounding data. *Geophysics*, 52(3), 289-300. doi:10.1190/1.1442303
- Dahlin, T., & Zhou, B. (2004). A numerical comparison of 2D resistivity imaging. *Geophysical Prospecting*, 52, 379-398. doi:10.1111/j.1365-2478.2004.00423.x
- deGroot-Hedlin, C., & Constable, S. (1990). Occam's inversion to generate smooth, two-dimensional models from magnetotelluric data. *Geophysics*, 55(12), 1530-1652. doi:10.1190/1.1442813
- Dey, A., & Morrison, H. (1979, March). Resistivity modelling for arbitrarily shaped two-dimensional structures. *Geophysical Prospecting*, 27(1), 106-136. doi:https://doi.org/10.1111/j.1365-2478.1979.tb00961.x
- Fallahsafari, M., & Ghanati, R. (2022). DC Electrical Resistance Tomography Inversion. *Journal of the Earth and Space Physics*, 47(4), 87-98. doi:10.22059/jesphys.2021.323911.10073 21
- Ghanati, R., & Fallahsafari, M. (2022). Fréchet Derivatives calculation for electrical resistivity imaging using forward matrix method. *Iranian Journal of Geophysics*, 15(4), 153-163. doi:0.30499/IJG.2021.283620.1325
- Ghanati, R., Azadi, Y., & Fakhimi, R. (2020). RESIP2DMODE: A MATLAB-Based 2D Resistivity and Induced Polarization Forward Modeling Software. *Iranian Journal of Geophysics*, 13(4), 60-78. doi:10.30499/ijg.2020.104784
- Günther, T., Rücker, C., & Spitzer, K. (2006). Three-dimensional modelling and inversion of DC resistivity data incorporating topography - II. Inversion. *Geophysical Journal International*, 166(2), 506-517. doi:10.1111/j.1365-246X.2006.03011.x
- Kim, H., & Kim, Y. (2011). A unified transformation function for lower and upper bounding constraints on model parameters in electrical and electromagnetic inversion. *Journal of Geophysics and Engineering*, 8(1), 21-26. doi:https://doi.org/10.1088/1742-2132/8/1/004
- Lesparre, N., Nguyen, F., Kemna, A., Robert, T., Hermans, T., Daoudi, M., & Flores-Orozco, A. (2017). A new approach for time-lapse data weighting in electrical resistivity tomography. *Geophysics*, 82(6), E325-E333. doi:https://doi.org/10.1190/geo2017-0024.1
- Loke, M., & Barker, R. (1996). Rapid least-squares inversion of apparent resistivity

- pseudosections by a quasi-Newton method. *Geophysical Prospecting*, 44(1), 131-152. doi:10.1111/j.1365-2478.1996.tb00142.x
- McGillivray, P., & Oldenburg, D. (1990, July). Methods for calculating Fréchet derivatives and sensitivities for the nonlinear inverse problem: a comparative study. *Geophysical Prospecting*, 38(5), 499-524. doi: https://doi.org/10.1111/j.1365-2478.1990.tb01859.x
- Oldenborger, G., Routh, P., & Knoll, M. (2007). Model reliability for 3D electrical resistivity tomography: Application of the volume of investigation index to a time-lapse monitoring experiment. *Geophysics*, 72(4), A47-Z71. doi:10.1190/1.2732550
- Pang, Y., Nie, L., Liu, B., Liu, Z., & Wang, N. (2020). Multiscale resistivity inversion based on convolutional wavelet transform. *Geophysical Journal International*, 223(1), 132-143. doi:https://doi.org/10.1093/gji/ggaa302
- Pelton, C., Rijo, L., & Swift, C. (1978). Inversion of two-dimensional resistivity and induced-polarization data. *Geophysics*, 43(4), 788-803. doi:10.1190/1.1440854
- Shamara, Z., Leticia, F., Andres, T., Adri'an, M., & Ren'e, E. (2023). Inversion of ERT-3D data using PSO and weighting functions. *J. Appl. Geophys.*, 215. doi:https://doi.org/10.1016/j.jappgeo.2023.105091
- Smith, N., & Vozoff, K. (1984). Two dimensional DC resistivity inversion for dipole-dipole data. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, GE-22, 21-28. doi:10.1109/TGRS.1984.350575.
- Tong, L. T., & Yang, C.-H. (1990). Incorporation of topography into two-dimensional resistivity inversion. *Geophysics*, 55(3), 266-379. doi:10.1190/1.1442843
- Tripp, A., Hohmann, G., & Swift, C. (1984). Two dimensional resistivity inversion. *Geophysics*, 49(10), 1580-1813. doi:10.1190/1.1441578
- Tso, C.-H., Kuras, O., Wilkinson, P., Uhlemann, S., Chambers, J., Meldrum, P., . . . Binley, A. (2017). Improved characterisation and modelling of measurement errors in electrical resistivity tomography (ERT) surveys. *Journal of Applied Geophysics*, 146, 103-119. doi:https://doi.org/10.1016/j.jappgeo.2017.09.009
- Zhdanov, M., & Tolstaya, E. (2006). A novel approach to the model appraisal and resolution analysis of regularized geophysical inversion. *Geophysics*, 71(6), R79-R90. doi:https://doi.org/10.1190/1.2336347
- Zhou, B., & Dahlin, T. (2003). Properties and effects of measurement errors on 2D resistivity imaging surveying. *Near Surface Geophysics*, 1(3), 105-117. doi:10.3997/1873-0604.2003001
- Zhou, J., Revil, A., Karaoulis, M., Hale, D., & Doets, J. (2014). Image-guided inversion of electrical resistivity data. *Geophysical Journal International*, 197, 292-309. doi:https://doi.org/10.1093/gji/ggu001.

Analysis of the effect of data weighting matrix on the accuracy of electrical resistivity tomography data inversion

Mahdi Fallafsafari¹ and Reza Ghanati^{2*}

¹Assistant Professor, Department of Earth Physics, Institute of Geophysics, University of Tehran, Tehran, Iran

²Associate Professor, Department of Earth Physics, Institute of Geophysics, University of Tehran, Tehran, Iran

(Received: 24 August 2025, Accepted: 16 November 2025)

Summary

Electrical resistivity tomography (ERT) is a widely used for investigating subsurface properties, particularly in near-surface studies. It has found broad application in various fields, such as groundwater exploration, archaeology, environmental monitoring, and hydrogeophysical research, including the evaluation of aquifer parameters. In ERT, electrodes are strategically placed according to the survey goals and site characteristics to gather data. These measurements, which represent the distribution of potential or apparent resistivity, are then analyzed using inverse modeling techniques to obtain the actual resistivity distribution. This process involves solving a nonlinear inverse problem, which aims to minimize discrepancies between field data and theoretical predictions by optimizing an objective function.

The method is based on forward modeling, which simulates the physical behavior of the system, often by solving Poisson's equation through a finite difference approach. Accurate forward modeling is crucial for effective inversion. In this study, resistivity responses are derived by simulating the flow of current through the Earth's surface, with Poisson's equation serving as the guide. A finite-difference algorithm is employed to discretize the models, incorporating mixed boundary conditions to enhance precision and reliability. One key advantage of the finite-difference method over other approaches is its established ability to quickly approximate solutions for complex and arbitrary structural models, often providing faster results than the finite-element method. The partial differential equations that describe the resistivity problem are derived using the principles of charge conservation and the continuity equation. To solve the inverse problem, the equations are linearized through iterative processes.

A central focus of this study is the application of inverse modeling to electrical resistivity data. The forward and inverse problem formulations, along with their respective solutions, have been implemented in MATLAB, with performance improvements achieved through C programming for computational efficiency. Field data are subject to noise, which may arise from factors such as imperfect measuring instruments, suboptimal field conditions, operator errors, and geological influences. These noise components can significantly affect the inversion process, given the inherent challenges of the inverse problem.

This study investigates the impact of data weighting matrices on the accuracy of geoelectrical data inversion, with focus on electrical resistivity data. The Occam inversion method was utilized as the primary framework for applying various weighting matrices and constraints during the inversion process. Our analysis shows that due to the presence of random noise, variations in the signal-to-noise ratio, the spacing between current and potential electrodes, the different arrays used along a profile, and geological complexities at the data acquisition site, employing data weighting matrices is essential for accurate inversion. Results from synthetic and field models demonstrate that applying a weighting matrix significantly improves the representation of conductive layers and reduces inversion errors. In field studies, validation using agricultural water wells confirmed that inversion results with a weighting matrix closely match geological realities. Additionally, the evaluation of inversion sections using resolution density, upper bounds of the resistivity variation, and sensitivity pattern indicates that the application of weighting matrices produces more reliable results.

Keywords: Data weighting matrix, resolution density, upper bounds of the resistivity variation, sensitivity pattern

* Corresponding author:

rghanati@ut.ac.ir