مجله ژئوفیزیک ایران، جلد ۸، شماره ۴، ۱۳۹۳، صفحه ۹۷-۱۲۳

ارزیابی دقت روش‌های فشرده ترکیبی و اَبَرفشرده مرتبه ششم در شبکه‌های C-D و LE: نمایش امواج گرانی- لختی و راسبی خطی

حکیم گلشاهی* و امیر علوی

گروه فیزیک، دانشگاه آزاد اسلامی واحد شوشتر، شوشتر، ایران

(تاریخ دریافت: ۱۳۹۳/۲/۷، تاریخ پذیرش: ۱۳۹۳/۷/۲۲)

چکیده

در مدل‌های جوّی و اقیانوسی، انواع گوناگونی از شبکه‌های عددی به‌کار گرفته می‌شود. از جمله، شبکه آراکاوا C که برای فواصل شبکه‌ای کوچک‌تر از شعاع دگرشکلی راسبی، رفتار بهتری دارد و نسبت به سایر شبکه‌ها متداول‌تر است؛ اما در فواصل شبکه‌ای بزرگ‌تر رفتار خوبی ندارد. این مسئله از میانگین‌گیری سرعت در محاسبه جمله‌های کوریولیس ناشی می‌شود. یکی از راهکارها استفاده از شبکه C-D است که شکل عمومی رابطه پاشندگی گسسته آن برای امواج گرانی- لختی معادل با شبکه LE است. در بیشتر این تحقیقات، از روش‌هایی با دقت مرتبه بالا استفاده نشده است. در این مقاله، پس از معرفی شکل عمومی روابط پاشندگی گسسته تک‌لایه‌ای و دولایه‌ای امواج گرانی- لختی و امواج راسبی در شبکه‌های C-D و LE، دقت روش‌های اَبَرفشرده و فشرده ترکیبی مرتبه ششم درحکم دو روش مرتبه بالا، در محاسبه بسامد و سرعت گروه این امواج مورد ارزیابی قرار می‌گیرد و با نتایج مشابه در شبکه‌های آراکاوا C و D و شبکه Z، مقایسه می‌شود. نتایج حاکی از آن است که برای مسئله امواج گرانی- لختی، در شبکه‌های C-D و LE (نیز همانند شبکه Z) روش فشرده ترکیبی مرتبه ششم نسبت به روش اَبَرفشرده هم‌مرتبه، برتری دارد. این برتری در محاسبه بسامد امواج راسبی نیز مشاهده می‌شود ولی در محاسبه سرعت گروه این امواج، عملکرد روش اَبَرفشرده کمی بهتر از روش فشرده ترکیبی است. به‌طورکلی، اگر چه شبکه C-D از ترکیب شبکه‌های آراکاوا C و D تشکیل شده است ولی هم برای امواج گرانی- لختی و هم برای امواج راسبی، رفتار نامطلوب این شبکه‌ها در شبکه C-D مشاهده نمی‌شود. رفتار شبکه C-D در مسئله امواج گرانی- لختی نزدیک به شبکه Z است و حتی در روش فشرده ترکیبی مرتبه ششم، کمی بهتر از شبکه Z نیز هست.

واژه‌های کلیدی: فشرده ترکیبی، اَبَرفشرده، معادلات آب کم‌عمق خطی شده، شبکه C-D، شبکه LE

Accuracy assessment of sixth order combined compact and super compact methods on C-D and LE grids: Representation of linear inertia-gravity and Rossby waves

Hakim Golshahy* and Amir Alavi

Department of Physics, Shoushtar Branch, Islamic Azad University, Shoushtar, Iran

(Received: 27 April 2014, accepted: 14 October 2014)

Summary

The oceanic and atmospheric models have been developed on different numerical grids. The Arakawa's C grid is well-known because of the advantages of the C-grid discretization at high resolutions. The C grid, however, is well suited for reproducing high frequency inertia-gravity waves in resolved cases, but there are difficulties in dealing with

*Corresponding author: h.golshahi@iau-shoushtar.ac.ir *نگارنده رابط:

the Coriolis terms and low-frequency processes. In particular, the C-grid approach is unfavorable in the under-resolved cases with grid-scale noise. Several fixes have been proposed for the C-grid problem. One such method is the C-D grid approach which improves spectral properties of the inertia-gravity waves at low resolutions. The C-D grid approach employs a combination of the C and D grids such that all terms are the same as in a conventional C-grid discretization except for the Coriolis terms where the D-grid velocities are used so that they require no interpolation. Another grid is the LE grid that comprises the same structure of Arakawa's E grid with a different grid space. Most of these studies apply the traditional second-order finite difference method to spatial differencing on the C-D grid, but the application to higher accurate finite difference methods is lacking.

Finite difference methods are commonly used to simulate the dynamical behavior of geophysical fluids. Numerical simulations of the complicated flows such as vortices, turbulent currents and instabilities need high accuracy methods as well as high resolutions. The compact finite difference methods are powerful ways to reach the objectives of high accuracy and low computational cost. The super compact and combined compact finite difference methods can be considered as promising methods for large scale computations in atmosphere–ocean dynamics with high accuracy.

In this study, we derived the general discrete dispersion relations of inertia-gravity and Rossby waves on the C-D and LE grids. The linearized single-layer and two-layer shallow-water models were used to describe these kinds of waves which play an important role in the setup of the ocean circulation. These relations were used to assess the performances of the sixth-order super compact finite difference (SCD6) and sixth-order combined compact finite difference (CCD6) schemes on the C-D and LE grids. The results on these grids were compared to Randall's Z grid and Arakawa's C and D grids. The general discrete dispersion relations of inertia-gravity waves on the C-D grid were similar to the LE grid at both single layer and two-layer models, but they were different for Rossby waves.

The results of the present work revealed that the CCD6 scheme exhibits a substantial improvement over the SCD6 scheme for the frequency and group velocity of inertia–gravity waves on the C-D and LE grids. In the same manner, for the frequency of Rossby waves, the performance of the CCD6 scheme is better than that of SCD6 scheme, but for the group velocity of Rossby waves, the SCD6 scheme is slightly more accurate than CCD6 scheme. In general, the C-D grid is, however, composed of Arakawa's C and D grids which are susceptible to grid scale noise but its behavior is favorable for both inertia-gravity and Rossby waves. In addition, for inertia-gravity waves, it could be observed that the accuracy of the SCD6 scheme on the C-D grid is similar to the Z grid and even the CCD6 scheme exhibits higher accuracy on the C-D grid.

Keywords: Super compact, combined compact, linearized shallow-water equations, C-D grid, LE grid

۱ مقدمه

در مدل‌سازی‌های جوّی و اقیانوسی، انواع گوناگونی از شبکه‌های عددی برای گسسته‌سازی مکانی به کار گرفته می‌شوند (کانتا و کلیسون، ۲۰۰۰؛ هایدووگل، ۱۹۹۹). این شبکه‌ها در نوع و موقعیت قرار گرفتن متغیرها متفاوت‌اند و در فواصل شبکه‌ای گوناگون، دارای رفتارهای متفاوتی هستند (آرکاوا و لمب، ۱۹۷۷؛ واجسوویچ، ۱۹۸۶؛ نتا و ویلیامز، ۱۹۸۹؛ رندال، ۱۹۹۴؛ دوکوویچ، ۱۹۹۵). این ویژگی می‌تواند در افزایش یا کاهش دقت و حجم محاسبات عددی تعیین‌کننده باشد. شبکه آراکاوا C از

جدول ۱. طرحواره‌های $S_\circ$، $S_{\frac{1}{2}}$، S_1 و S_2 برای روش‌های IS6، SCD6 و CCD6.

$S_\circ$	$\frac{3}{10}f_{j-\frac{1}{2}}+f_{j+\frac{1}{2}}+\frac{3}{10}f_{j+\frac{3}{2}}=\frac{3}{4}\left(f_{j+1}+f_j\right)+\frac{1}{20}\left(f_{j+2}+f_{j-1}\right)$	IS6
$S_{\frac{1}{2}}$ S_1 S_2	$\left(f'_{j+\frac{5}{2}}+f'_{j-\frac{3}{2}}\right)+236\left(f'_{j+\frac{3}{2}}+f'_{j-\frac{1}{2}}\right)+1446f'_{j+\frac{1}{2}}=\frac{320}{2d}\left[\left(f_{j+2}-f_{j-1}\right)+9\left(f_{j+1}-f_j\right)\right]$ $\left(f'_{j+2}+f'_{j-2}\right)+26\left(f'_{j+1}+f'_{j-1}\right)+66f'_j=\frac{10}{2d}\left[\left(f_{j+2}-f_{j-2}\right)+10\left(f_{j+1}-f_{j-1}\right)\right]$ $\left(f''_{j+2}+f''_{j-2}\right)+56\left(f''_{j+1}+f''_{j-1}\right)+246f''_j=\frac{30}{d^2}\left[\left(f_{j+2}+f_{j-2}\right)+8\left(f_{j+1}+f_{j-1}\right)-18f_j\right]$	SCD6
$S_{\frac{1}{2}}$ S_1 و S_2	$f'_{j+\frac{1}{2}}-\frac{7}{254}\left(f'_{j+\frac{3}{2}}+f'_{j-\frac{1}{2}}\right)=\frac{120}{127d}\left(f_{j+1}-f_j\right)-\frac{17d}{254}\left(f''_{j+1}-f''_j\right)$ $\begin{cases}\frac{7}{16}\left(f'_{j+1}+f'_{j-1}\right)+f'_j-\frac{d}{16}\left(f''_{j+1}-f''_{j-1}\right)=\frac{15}{16d}\left(f_{j+1}-f_{j-1}\right)\\ \frac{9}{8d}\left(f'_{j+1}-f'_{j-1}\right)+f''_j-\frac{1}{8}\left(f''_{j+1}+f''_{j-1}\right)=\frac{3}{d^2}\left(f_{j+1}-2f_j+f_{j-1}\right)\end{cases}$	CCD6

جمله این شبکه‌ها است که برای فواصل شبکه‌ای کوچک‌تر از شعاع دگرشکلی راسبی، رفتار بهتری دارد و نسبت به سایر شبکه‌ها متداول‌تر است. بااین‌حال این شبکه هنگامی که فاصله شبکه‌ای در مقایسه با شعاع دگرشکلی راسبی بزرگ‌تر است، رفتار خوبی ندارد. این مسئله از میانگین‌گیری سرعت در محاسبه جمله‌های کوریولیس ناشی می‌شود. برای شعاع دگرشکلی راسبی کوچک‌تر، در مسائلی از قبیل امواج گرانی - لختی و امواج راسبی که دقت شبیه‌سازی به دقت محاسبه جمله‌های لختی حساس است، استفاده از شبکه C با خطای زیادی همراه است. محققان راهکارهای گوناگونی برای کاهش خطای شبکه C در محاسبه جمله‌های کوریولیس عرضه کرده‌اند. اسمیت و همکاران (۱۹۹۵) تضعیف میدان سرعت را به کار برده‌اند که یکی از اشکالات این روش، حذف شدن بخش مهمی از جواب‌های صحیح است. یکی دیگر از راهکارها، استفاده از ترکیب شبکه‌های C و D است. لین و رود (۱۹۹۷) از ترکیب شبکه‌های C و D به‌شیوه‌ای استفاده کرده‌اند که طبق بررسی اسکاماروک (۲۰۰۸)، رفتاری شبیه به شبکه D دارد و قابلیت‌های مطلوب شبکه Z (رندال، ۱۹۹۴) را ندارد. ادکرافت و همکاران (۱۹۹۹)، شبکه‌های C و D را به شیوه دیگری ترکیب کرده‌اند، به گونه‌ای که جمله‌های کوریولیس بدون میانگین‌گیری محاسبه می‌شوند. از دیگر تحقیقات صورت گرفته در این زمینه می‌توان به نچائف و یارمچوک (۲۰۰۴) و دوبریشیک (۲۰۰۶) اشاره کرد. بیشتر این تحقیقات، به روش‌های عددی مرتبه پایین پرداخته‌اند. از جمله، لیو (۲۰۰۵) که عملکرد روش‌های مرتبه دوم مرکزی و فشرده مرتبه چهارم را در شبکه‌ای با عنوان LE مورد ارزیابی قرار داده است. این شبکه درواقع همان شبکه آراکاوا E با فاصله شبکه‌ای متفاوت است. بررسی‌هایی نیز در ارزیابی روش‌های مرتبه بالا صورت گرفته است که از جمله می‌توان به بلایو (۲۰۰۰)، اصفهانیان و همکاران (۲۰۰۵)، محب‌الحجه و دریچل (۲۰۰۷)، اصفهانیان و قادر (۱۳۸۶)، قادر و همکاران (۲۰۰۹) و قادر و همکاران (۲۰۱۲) اشاره کرد.

در پژوهش حاضر، در ادامه تحقیقات قادر و همکاران

جدول ۲. تابع‌های انتقال $T_{\circ}$، $T_{\frac{1}{2}}$، T_1 و T_2 برای طرحواره‌های IS6، CCD6 و SCD6.

IS6	$T_{\circ}(k)=\dfrac{15\cos kd/2+\cos 3kd/2}{10+6\cos kd}$
CCD6	$\begin{cases} T_{\frac{1}{2}}(k)=\dfrac{i}{d}\dfrac{9\left(721+488\cos kd-9\cos^2 kd\right)\sin kd/2}{2921+2379\cos kd+114\cos^2 kd-14\cos^3 kd} \\ T_1(k)=\dfrac{i}{d}\dfrac{9\left(4+\cos kd\right)\sin kd}{23+20\cos kd+2\cos^2 kd} \\ T_2(k)=\dfrac{1}{d^2}\dfrac{-57+24\cos kd+33\cos^2 kd}{23+20\cos kd+2\cos^2 kd} \end{cases}$
SCD6	$\begin{cases} T_{\frac{1}{2}}(k)=\dfrac{i}{d}\dfrac{1440\sin kd/2+160\sin 3kd/2}{723+236\cos kd+\cos 2kd} \\ T_1(k)=\dfrac{i}{d}\dfrac{100\sin kd+10\sin 2kd}{66+52\cos kd+2\cos 2kd} \\ T_2(k)=\dfrac{1}{d^2}\dfrac{-270+240\cos kd+30\cos 2kd}{123+56\cos kd+\cos 2kd} \end{cases}$

(۱۳۸۹) و گلشاهی و همکاران (۲۰۱۱)، دقت روش‌های مرتبه بالای اَبَرفشرده مرتبه ششم (SCD6) و فشرده ترکیبی مرتبه ششم (CCD6) در شبکه‌های C-D (ادکرافت و همکاران، ۱۹۹۹) و LE (لیو، ۲۰۰۵) مورد ارزیابی قرار می‌گیرد. بدین‌منظور، با استفاده از معادلات آب کم‌عمق خطی شده، شکل عمومی روابط پاشندگی گسسته امواج گرانی- لختی و امواج راسبی برای محیط‌های تک‌لایه و دولایه در شبکه‌های C-D و LE استخراج و با استفاده از این شکل عمومی، دقت این دو روش عددی ارزیابی می‌شود. سپس نتایج به‌دست آمده با نتایج مشابه در شبکه‌های آراکاوا C و D و شبکه Z، مورد مقایسه قرار می‌گیرد.

۲ روش‌های اَبَرفشرده و فشرده ترکیبی مرتبه ششم

روش‌های تفاضل متناهی از جمله روش‌های متداول در حل معادلات دیفرانسیل حاکم بر رفتار شاره‌ها محسوب می‌شوند. در شبیه‌سازی جریان‌های پیچیده مانند جریان‌های آشفته و ناپایداری‌ها بایستی از روش‌های عددی با دقت زیاد استفاده کرد. روش‌های فشرده از جمله روش‌های تفاضل متناهی با دقت زیاد هستند که با توجه به توانایی تفکیک بالای آنها، در شبیه‌سازی جریان‌هایی با ماهیت پیچیده به کار گرفته می‌شوند (پارک و همکاران، ۲۰۰۴؛ ریزتا و همکاران، ۲۰۰۸). در روش‌های تفاضل متناهی فشرده متقارن استاندارد، مثل روش پاده (هیرش، ۱۹۷۵؛ لِل، ۱۹۹۲) و روش اَبَرفشرده مرتبه ششم (ما و فو، ۱۹۹۶؛ ۲۰۰۱؛ اصفهانیان و همکاران، ۲۰۰۵) تقریب مشتق‌های اول و دوم به‌طور مجزا صورت می‌گیرد. درحالی که در روش فشرده ترکیبی مرتبه ششم (چو و فن، ۱۹۹۸، ۲۰۰۰؛ قادر و اصفهانیان، ۲۰۰۶) مشتق‌های اول و دوم به‌طور هم‌زمان تقریب زده می‌شوند. در این پژوهش، علاوه بر طرحواره‌های SCD6 و CCD6، از یک طرحواره درون‌یابی مرتبه ششم (IS6) نیز استفاده شده است. فرمول‌بندی این طرحواره‌ها، در جدول ۱ داده شده است که در آن $S_{\circ}$، $S_{\frac{1}{2}}$، S_1 و S_2 به‌ترتیب معرف طرحواره‌های درون‌یابی، محاسبه مشتق اول در نقاط میانی و محاسبه مشتق‌های اول و دوم در نقاط گره از شبکه‌ای با فاصله

جدول ۳. تابع‌های انتقال $\mathrm{R}_{\circ}$، $\mathrm{R}_{\frac{1}{2}}$ و R_{1} برای طرحواره‌های IS6، CCD6 و SCD6.

$\mathrm{R}_{\circ}(k)=\dfrac{id}{2}\dfrac{15\sin kd/2+3\sin 3kd/2}{10+6\cos kd}$	IS6
$\begin{cases}\mathrm{R}_{\frac{1}{2}}(k)=\dfrac{3\left(2008-101\cos kd-107\cos^2 kd\right)\cos kd/2}{2921+2379\cos kd+114\cos^2 kd-14\cos^3 kd}\\ \mathrm{R}_{1}(k)=\dfrac{-24+60\cos kd+9\cos^2 kd}{23+20\cos kd+2\cos^2 kd}\end{cases}$	CCD6
$\begin{cases}\mathrm{R}_{\frac{1}{2}}(k)=\dfrac{720\cos kd/2+240\cos 3kd/2}{723+236\cos kd+\cos 2kd}\\ \mathrm{R}_{1}(k)=\dfrac{100\cos kd+20\cos 2kd}{66+52\cos kd+2\cos 2kd}\end{cases}$	SCD6

شبکه‌ای d است. تابع‌های انتقال $\mathrm{T}(k)$ و $\mathrm{R}(k)$ که در روابط پاشندگی گسسته امواج گرانی-لختی و امواج راسبی به کار می‌روند، به‌ترتیب در جدول‌های ۲ و ۳ برای هریک از این طرحواره‌ها داده شده‌اند.

۳ معادلات آب کم‌عمق خطی شده

مدل آب کم‌عمق، برای توصیف لایه‌ای نازک از یک شاره با چگالی ثابت به‌کار می‌رود؛ به‌گونه‌ای که مؤلفه‌های افقی سرعت در راستای قائم تغییر نمی‌کنند و تقریب آب‌ایستایی (هیدروستاتیک) در نظر گرفته می‌شود. معادلات آب کم‌عمق تک‌لایه خطی شده برحسب مؤلفه‌های افقی سرعت (u,v) و ضخامت لایه (h) به شکل زیر است (گیل، ۱۹۸۲):

$$\begin{cases}\partial_t u-fv+g\partial_x h=0\\ \partial_t v+fu+g\partial_y h=0\\ \partial_t h+\mathrm{H}\left(\partial_x u+\partial_y v\right)=0\end{cases},\qquad (۱)$$

که f پارامتر کوریولیس، H ضخامت میانگین، g شتاب گرانی و زیرنویس‌های x و y نشان‌دهنده مشتق نسبت به مختصه‌های x و y هستند.

در برخی از نواحی اقیانوسی از جمله تنگه جبل‌الطارق و تنگه هرمز، می‌توان چینه‌بندی آب را با تقریب خوبی به‌صورت دولایه در نظر گرفت (کاسترو و همکاران، ۲۰۰۷). در محیط دولایه نیز می‌توان از معادلات آب کم‌عمق استفاده کرد، به گونه‌ای که چگالی آب در هر لایه مقداری ثابت ولی متفاوت باشد. شکل خطی شده این معادلات برحسب مؤلفه‌های افقی سرعت و ضخامت لایه به‌صورت زیر است (قادر و همکاران، ۱۳۸۹):

$$\begin{cases}\partial_t u_1-fv_1+g\partial_x\left(h_1+h_2\right)=0\\ \partial_t v_1+fu_1+g\partial_y\left(h_1+h_2\right)=0\\ \partial_t h_1+\mathrm{H}_1\left(\partial_x u_1+\partial_y v_1\right)=0\end{cases},$$
$$\begin{cases}\partial_t u_2-fv_2+g\partial_x\left(h_1+h_2\right)-g'\partial_x h_1=0\\ \partial_t v_2+fu_2+g\partial_y\left(h_1+h_2\right)-g'\partial_y h_1=0\\ \partial_t h_2+\mathrm{H}_2\left(\partial_x u_2+\partial_y v_2\right)=0\end{cases},\qquad (۲)$$

که اندیس‌های ۱ و ۲ به‌ترتیب معرف لایه اول در بالا و لایه دوم در پایین و $g'=\left(1-\rho_1/\rho_2\right)g$ گرانی کاهیده است؛ به‌گونه‌ای‌که ρ_1 و ρ_2 مقادیر چگالی آب در این دولایه هستند.

۴ نمایش امواج گرانی-لختی

۴-۱ رابطه پاشندگی تک‌لایه‌ای امواج گرانی-لختی

با در نظر گرفتن جواب موجی‌شکل $e^{i(kx+ly-\omega t)}$ برای دستگاه معادلات (۱) به‌ازای مقدار ثابت $f=f_{\circ}$، رابطه

جدول ۴. خطای کلی روش‌های SCD6 و CCD6 برای بسامد امواج گرانی- لختی تک‌لایه‌ای به‌ازای $f_\circ \Delta t = 0.05$ (برحسب درصد).

	$\lambda_{bt}/d = 0.5$				$\lambda_{bt}/d = 2$			
	SCD6	**CCD6**	$\mathrm{P_S}$	$\mathrm{P_C}$	**SCD6**	**CCD6**	$\mathrm{P_S}$	$\mathrm{P_C}$
C	**9.532**	**6.188**	**-**	**35**	**4.416**	**0.543**	**-**	**88**
D	**24.730**	**23.924**	**-**	**3**	**24.109**	**22.999**	**-**	**5**
Z	**2.459**	**1.165**	**-**	**53**	**3.410**	**1.932**	**-**	**43**
C-D , LE	**2.750**	**0.421**	**-**	**85**	**3.843**	**0.761**	**-**	**80**

پاشندگی پیوسته تک‌لایه‌ای امواج گرانی- لختی به‌دست می‌آید:

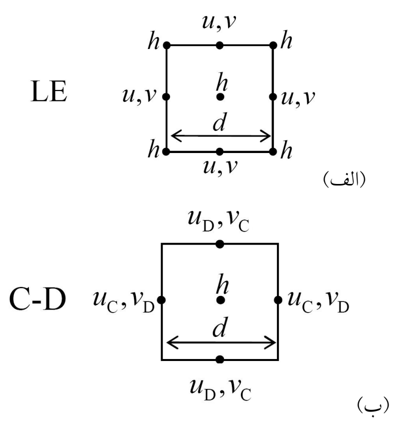
$$\left(\omega / f_\circ\right)^2 = 1 + \lambda_{bt}^2\left(k^2 + l^2\right) , \qquad (۳)$$

که ω بسامد امواج، $\lambda_{bt} = \mathrm{gH}/f_\circ$ شعاع دگرشکلی فشارورد و k و l به‌ترتیب اعداد موج در راستاهای x و y هستند.

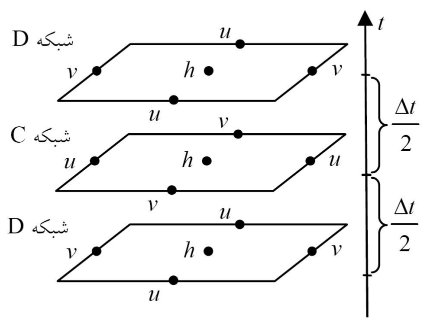
با استفاده از شیوه عرضه شده بلایو (۲۰۰۰) می‌توان شکل عمومی رابطه پاشندگی گسسته امواج گرانی- لختی را برحسب تابع‌های انتقال در شبکه‌های LE و C-D به‌دست آورد. شکل ۱، موقعیت متغیرها در این شبکه‌ها را نشان می‌دهد. در شبکه C-D (ادکرافت و همکاران، ۱۹۹۹) هنگام انتگرال‌گیری در زمان، از شبکه‌های آراکاوا C و D به‌صورت متوالی استفاده می‌شود. شکل ۲، نحوه استفاده از این شبکه در زمان را نشان می‌دهد به گونه‌ای که مؤلفه‌های سرعت در جمله‌های کوریولیس با درون‌یابی زمانی از مؤلفه‌های سرعت در شبکه دیگر به‌دست می‌آیند. لذا برای مقایسه نتایج روش‌های به کار گرفته شده در شبکه‌های C-D و LE لازم است که علاوه بر گسسته‌سازی مکانی معادلات، گسسته‌سازی زمانی نیز صورت گیرد. به‌این‌ترتیب، دستگاه معادلات (۱) در شبکه LE به شکل زیر در می‌آید:

$$\begin{cases} \partial_t u - f_\circ \overline{v}^t + g\,\partial_x h = 0 \\ \partial_t v + f_\circ \overline{u}^t + g\,\partial_y h = 0 \\ \partial_t h + \mathrm{H}\left(\partial_x u + \partial_y v\right) = 0 \end{cases} , \qquad (۴)$$

که $\overline{u}^t$ و $\overline{v}^t$ به‌ترتیب، معرف درون‌یابی زمانی از u و v است.



شکل ۱. شبکه‌های LE و C-D به‌ازای فاصله شبکه‌ای d.



شکل ۲. ترتیب متوالی شبکه‌ها در زمان، برای شبکه C-D به‌ازای گام زمانی Δt.

جدول ۵. مشابه جدول۴ ولی برای سرعت گروه امواج گرانی-لختی تک‌لایه‌ای.

	$\lambda_{bt}/d=0.5$				$\lambda_{bt}/d=2$			
	SCD6	**CCD6**	P_S	P_C	**SCD6**	**CCD6**	P_S	P_C
C	**38.189**	**39.048**	**2**	**-**	**27.256**	**13.164**	**-**	**52**
D	**173.199**	**177.711**	**3**	**-**	**111.393**	**116.910**	**5**	**-**
Z	**25.126**	**14.299**	**-**	**43**	**24.375**	**14.311**	**-**	**41**
C-D , LE	**26.345**	**13.058**	**-**	**50**	**25.523**	**13.009**	**-**	**49**

با درنظر گرفتن جواب موجی‌شکل $e^{i(kx+ly-\omega t)}$، معادلات فوق به شکل زیر در می‌آید:

$$\begin{cases} T_{\frac{1}{2}}(\omega)\, U_{\circ} - f_{\circ} T_{\circ}(\omega)\, V_{\circ} + gH_{\circ} T_{\frac{1}{2}}(k) = 0 \\ T_{\frac{1}{2}}(\omega) V_{\circ} + f_{\circ} T_{\circ}(\omega)\, U_{\circ} + gH_{\circ} T_{\frac{1}{2}}(l) = 0 \\ T_{\frac{1}{2}}(\omega)\, H_{\circ} + H\left(U_{\circ} T_{\frac{1}{2}}(k) + V_{\circ} T_{\frac{1}{2}}(l)\right) = 0 \end{cases} \quad , \quad (۵)$$

که $U_{\circ}, V_{\circ}, H_{\circ}$ به‌ترتیب دامنه‌های جواب موجی‌شکل برای u,v,h هستند و تابع انتقال $T(k)$ برای طرحواره دلخواه S به‌صورت $S\left(e^{ikx}\right)=T(k)e^{ikx}$ در راستای x تعریف می‌شود. به‌طور مشابه تابع انتقال $T(\omega)$ نیز به‌صورت $S\left(e^{-i\omega t}\right)=T(\omega)e^{-i\omega t}$ تعریف شده است. همانند بررسی ادکرافت و همکاران (۱۹۹۹)، برای مشتق‌گیری و درون‌یابی زمانی از روش مرتبه دوم مرکزی، به‌صورت $\partial_t f=\left(f(t+\Delta t/2)-f(t-\Delta t/2)\right)/\Delta t$ و $\overline{f}^{\,t}=\left(f(t+\Delta t/2)+f(t-\Delta t/2)\right)/2$ استفاده شده است که در آن، Δt مقدار گام زمانی است. بنابراین، تابع‌های انتقال مربوط به روش مرتبه دوم مرکزی $T_{\frac{1}{2}}(\omega)=-i\dfrac{2}{\Delta t}\sin(\dfrac{\omega\Delta t}{2})$ و $T_{\circ}(\omega)=\cos(\dfrac{\omega\Delta t}{2})$ هستند.

با صفر قرار دادن دترمینان ماتریس ضرایب برای دستگاه معادلات فوق، رابطه پاشندگی گسسته تک‌لایه‌ای امواج گرانی-لختی در شبکه LE به‌دست می‌آید:

$$-\frac{1}{f_{\circ}^2}T_{\frac{1}{2}}^2(\omega)=T_{\circ}^2(\omega)-\lambda_{bt}^2\left(T_{\frac{1}{2}}^2(k)+T_{\frac{1}{2}}^2(l)\right) . \quad (۶)$$

این رابطه که برای شبکه E همانند شبکه LE ولی با فاصله شبکه‌ای متفاوت است در گام‌های زمانی کوچک ($\Delta t \to 0$)، به شکل زیر در می‌آید:

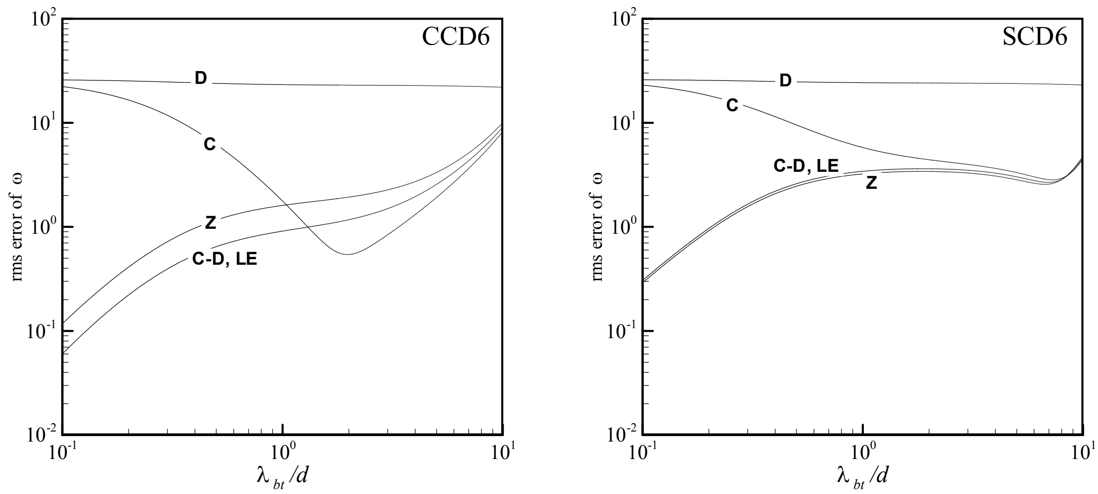
$$\left(\omega/f_{\circ}\right)^2 = 1-\lambda_{bt}^2\left(T_{\frac{1}{2}}^2(k)+T_{\frac{1}{2}}^2(l)\right) , \quad (۷)$$

به گونه‌ای که گویی مشتق زمانی به‌صورت پیوسته در نظر گرفته شده و درون‌یابی زمانی عملی نشده است.

با توجه به گسسته‌سازی زمانی صورت گرفته، برآورد بسامد امواج گرانی-لختی به مقدار عبارت $f_{\circ}\Delta t$ بستگی دارد و شرط $\left(f_{\circ}\Delta t\right)\left(\lambda_{bt}/d\right)\le N$ باید برقرار باشد که در آن N یک عدد بحرانی است و به‌ازای $\sin^2(\omega\Delta t/2)=1$ تعیین می‌شود. این عدد بحرانی برای روش‌های CCD6 و SCD6 در شبکه‌های LE و C-D حدود $N=0.6$ است. در این تحقیق، برای پارامتر کوریولیس، مقدار نوعی $f_{\circ}=10^{-4}s^{-1}$ در نظر گرفته شده است.

به‌طور مشابه، دستگاه معادلات (۱) برای گسسته‌سازی در شبکه C-D، به شکل زیر نوشته می‌شوند:

$$\begin{cases} \partial_t u_C - f_{\circ}\overline{v_D}^{\,t} + g\partial_x h = 0 \\ \partial_t v_C + f_{\circ}\overline{u_D}^{\,t} + g\partial_y h = 0 \\ \partial_t h + H\left(\partial_x u_C + \partial_y v_C\right) = 0 \\ \partial_t u_D - f_{\circ}\overline{v_C}^{\,t} + g\partial_x \overline{h}^{xy} = 0 \\ \partial_t v_D + f_{\circ}\overline{u_C}^{\,t} + g\partial_y \overline{h}^{xy} = 0 \end{cases} \quad , \quad (۸)$$



شکل ۳. منحنی خطای کلی روش‌های CCD6 و SCD6 برای بسامد امواج گرانی–لختی تک‌لایه‌ای در شبکه‌های گوناگون به‌ازای $f_\circ \Delta t = 0.05$ (برحسب درصد).

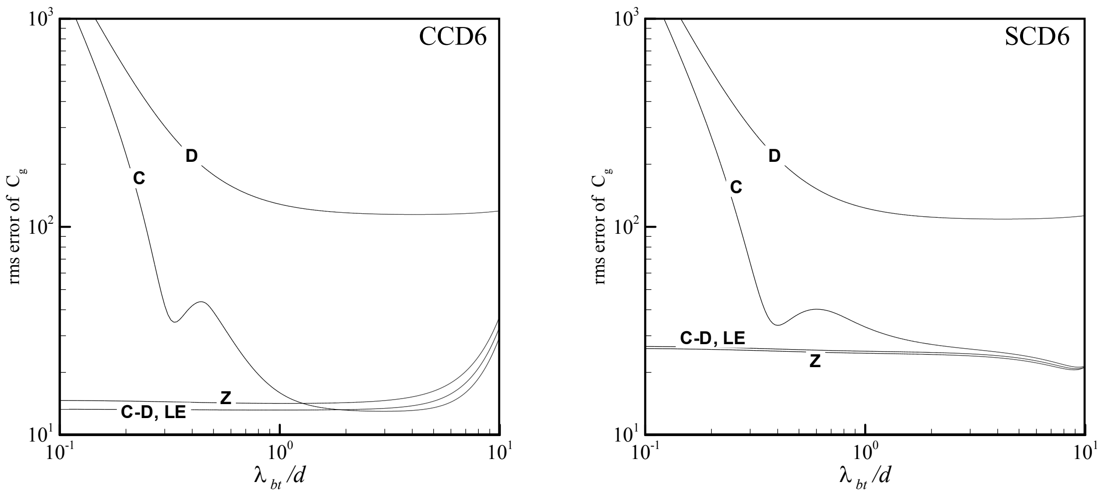
که زیرنویس‌های C و D معرف شبکه‌های آراکاوا C و D و $\overline{h}^{xy}$ معرف میانگین‌گیری از h در دو راستای x و y است. این میانگین‌گیری در شبکه آراکاوا D، فقط در یک راستا صورت می‌گیرد. بنابراین، یکی از تفاوت‌های گسسته‌سازی در شبکه C-D نسبت به شبکه D، نحوه میانگین‌گیری از h است.

پس از گسسته‌سازی، دستگاه معادلات فوق برای شبکه C-D به‌صورت زیر در می‌آید:

$$\begin{cases} T_{\frac{1}{2}}(\omega)\,U_{\circ C} - f_\circ T_\circ(\omega)\,V_{\circ D} + gH_\circ T_{\frac{1}{2}}(k) = 0 \\ T_{\frac{1}{2}}(\omega)\,V_{\circ C} + f_\circ T_\circ(\omega)\,U_{\circ D} + gH_\circ T_{\frac{1}{2}}(l) = 0 \\ T_{\frac{1}{2}}(\omega)\,H_\circ + H\left(U_{\circ C} T_{\frac{1}{2}}(k) + V_{\circ C} T_{\frac{1}{2}}(l)\right) = 0 \\ T_{\frac{1}{2}}(\omega)\,U_{\circ D} - f_\circ T_\circ(\omega)\,V_{\circ C} \\ \qquad + gH_\circ T_{\frac{1}{2}}(k) T_\circ(k) T_\circ(l) = 0 \\ T_{\frac{1}{2}}(\omega)\,V_{\circ D} + f_\circ T_\circ(\omega)\,U_{\circ C} \\ \qquad + gH_\circ T_{\frac{1}{2}}(l) T_\circ(l) T_\circ(k) = 0 \end{cases} \quad (۹)$$

که $T_\circ$ تابع انتقال مربوط به طرحواره $S_\circ$ (طرحواره درون‌یابی در نقاط میانی) است. با صفر قرار دادن دترمینان ماتریس ضرایب برای دستگاه معادلات فوق، رابطه پاشندگی گسسته تک‌لایه‌ای امواج گرانی- لختی در شبکه C-D به‌دست می‌آید. این رابطه دقیقاً با رابطه (۶) مربوط به شبکه LE برابر است. بنابراین، نتایج ارزیابی دقت روش‌های عددی که در شبکه LE برای مسئله امواج گرانی- لختی تک‌لایه صورت می‌گیرد، در شبکه C-D نیز صادق است.

برای بررسی عملکرد روش‌های SCD6 و CCD6 در گسسته‌سازی مکانی معادلات آب کم‌عمق تک‌لایه، خطای نسبی محاسبه بسامد و سرعت گروه امواج گرانی- لختی تک‌لایه‌ای در شبکه‌های C-D و LE اندازه‌گیری شد. سپس خطای کلی E_{rms} به‌صورت ریشه میانگین مجذور مربعات خطای نسبی تعیین شد. همچنین درصد بهبود روش CCD6 نسبت به روش SCD6 به‌صورت $P_C = \left(1 - E_C / E_S\right) \times 100$ محاسبه شد که در آن، E_C و E_S به‌ترتیب خطای کلی روش‌های CCD6 و SCD6 است. به شیوه مشابه، درصد بهبود روش SCD6 نسبت به CCD6 با رابطه $P_S = \left(1 - E_S / E_C\right) \times 100$ تعیین می‌شود. با توجه به حساسیت شبکه‌ها به λ_{bt} / d، اندازه‌گیری خطاها برای گستره $0.1 < \lambda_{bt} / d < 10$ صورت گرفته است. باید توجه داشت که در این پژوهش، مشابه تحقیق گلشاهی و همکاران (۲۰۱۱) خطاها در ناحیه



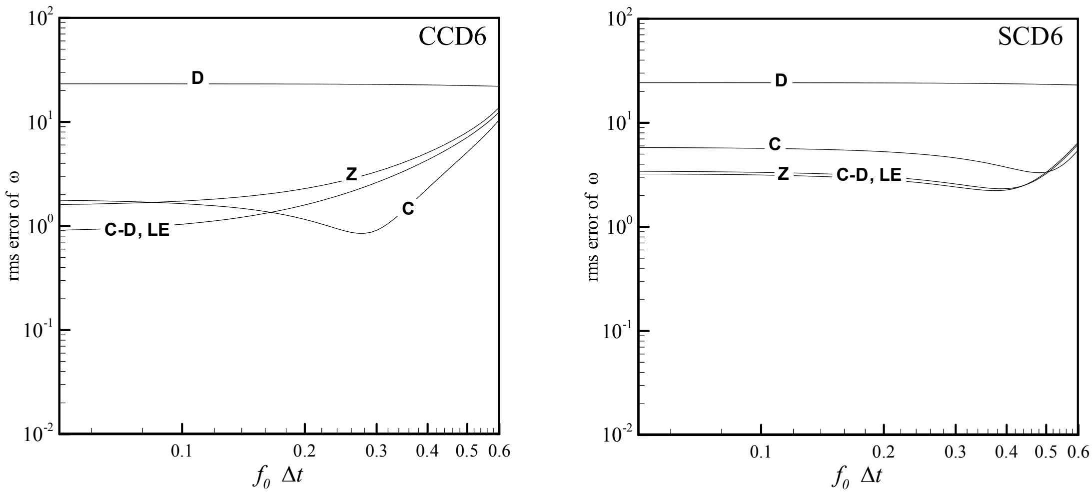
شکل ۴. مشابه شکل۳ ولی برای سرعت گروه امواج گرانی- لختی تک‌لایه‌ای.

$0 < k_H d/\pi < 1$ ($k_H^2 = k^2 + l^2$) اندازه‌گیری شده‌اند؛ درحالی که در تحقیق قادر و همکاران (۱۳۸۹) ناحیه مورد اندازه‌گیری ($0 < kd/\pi < 1$ و $0 < ld/\pi < 1$) متفاوت است.

جدول‌های ۴ و ۵ مقادیر خطای کلی محاسبه بسامد و سرعت گروه امواج گرانی- لختی تک‌لایه‌ای را در شبکه‌های عددی متفاوت برای دو مقدار $\lambda_{bt}/d = 0.5$ و $\lambda_{bt}/d = 2$ به‌ازای $f_\circ \Delta t = 0.05$ نشان می‌دهند (نتایج شبکه‌های آراکاوا C و D و شبکه Z برای مقایسه داده شده است). مطابق این جدول‌ها، روش CCD6 نسبت به روش SCD6 با خطای کمتری همراه است. به‌ویژه در شبکه C-D به‌ازای $\lambda_{bt}/d = 0.5$ که عملکرد روش CCD6 حدود ۸۵ درصد بهتر از روش SCD6 است، درحالی که این بهبود در شبکه Z حدود ۵۰ درصد است. این امر بیانگر قابلیت زیاد روش CCD6 در شبکه‌های C-D، LE و Z برای مسئله امواج گرانی- لختی تک‌لایه است. اگر چه بیشترین دقت محاسبه بسامد امواج گرانی- لختی (و بیشترین بهبود روش CCD6 نسبت به SCD6 با حدود ۹۰ درصد بهبود) در شبکه C به‌ازای $\lambda_{bt}/d = 2$ مشاهده می‌شود، اما به‌ازای $\lambda_{bt}/d = 0.5$ خطا در این شبکه بیشتر از شبکه‌های C-D، LE و Z است.

شکل‌های ۳ و ۴، خطاهای کلی روش‌های CCD6 و SCD6 را در شبکه‌های C-D و LE به همراه شبکه‌های آراکاوا C و D و شبکه Z برای λ_{bt}/d های متفاوت به‌ازای $f_\circ \Delta t = 0.05$ نشان می‌دهند. نتایج روشن می‌سازد که هم در محاسبه بسامد و هم در محاسبه سرعت گروه امواج گرانی- لختی تک‌لایه، عملکرد روش CCD6 در شبکه‌های C-D و LE (همانند شبکه Z) بهتر از SCD6 است و نزدیکی زیادی بین نتایج شبکه‌های C-D و LE با نتایج شبکه Z وجود دارد. خطای کلی محاسبه بسامد این امواج، به‌جز در شبکه D، به مقدار λ_{bt}/d بستگی دارد به‌گونه‌ای که در λ_{bt}/d های کوچک با افزایش λ_{bt}/d، این خطای کلی در شبکه C کاهش و در دیگر شبکه‌ها افزایش پیدا می‌کند. در λ_{bt}/d های بزرگ، این خطای کلی در شبکه C نیز همانند شبکه‌های C-D، LE و Z افزایش می‌یابد. در شبکه‌های C-D، LE و Z خطای کلی محاسبه سرعت گروه امواج گرانی- لختی، مستقل از مقدار λ_{bt}/d است به‌جز در λ_{bt}/d های بزرگ که این خطای کلی، روندی افزایشی پیدا می‌کند.

شکل‌های ۵ و ۶، خطاهای کلی روش‌های CCD6 و



شکل۵. منحنی خطای کلی روش‌های CCD6 و SCD6 برای بسامد امواج گرانی- لختی تک‌لایه‌ای در شبکه‌های گوناگون به‌ازای $\lambda_{bt}/d=1$ (برحسب درصد).

SCD6 در محاسبه بسامد و سرعت گروه امواج گرانی – لختی تک‌لایه‌ای را برای $f_\circ \Delta t$های گوناگون به‌ازای $\lambda_{bt}/d=1$ نشان می‌دهند. نتایج بیانگر آن است که با افزایش گام زمانی، خطاهای کلی روش CCD6 روندی افزایشی دارند. این مسئله را می‌توان در روش SCD6 نیز به شکل ضعیف‌تری مشاهده کرد.

سرعت گروه امواج گرانی- لختی تک‌لایه‌ای برای شبکه Z ($C_{g\,Z\,grid}$)، شبکه C-D ($C_{g\,C-D\,grid}$) و عبارت دقیق آن ($C_{g\,exact}$) در گام‌های زمانی کوچک ($\Delta t \to 0$)، به‌صورت زیر است:

$$C_{g\,exact}=\frac{f_\circ \lambda_{bt}^2\left(k^2+l^2\right)^{1/2}}{\left(1+\lambda_{bt}^2\left(k^2+l^2\right)\right)^{1/2}}\,,$$

$$C_{g\,Z grid}=\frac{f_\circ \dfrac{\lambda_{bt}^2}{2}\left((\dfrac{\partial \mathrm{T}_2(k)}{\partial k})^2+(\dfrac{\partial \mathrm{T}_2(l)}{\partial l})^2\right)^{1/2}}{\left(1-\lambda_{bt}^2\left(\mathrm{T}_2(k)+\mathrm{T}_2(l)\right)\right)^{1/2}}\,, \tag{۱۰}$$

$$C_{g\,C-D grid}=\frac{f_\circ \lambda_{bt}^2\begin{pmatrix}(\mathrm{T}_{\frac{1}{2}}(k)\dfrac{\partial \mathrm{T}_{\frac{1}{2}}(k)}{\partial k})^2\\ +(\mathrm{T}_{\frac{1}{2}}(l)\dfrac{\partial \mathrm{T}_{\frac{1}{2}}(l)}{\partial l})^2\end{pmatrix}^{1/2}}{\left(1-\lambda_{bt}^2\left(\mathrm{T}_{\frac{1}{2}}^2(k)+\mathrm{T}_{\frac{1}{2}}^2(l)\right)\right)^{1/2}}\,.$$

باید توجه داشت که $C_{g\,exact}$ مستقل از نوع شبکه است. در λ_{bt}/dهای کوچک یعنی به‌ازای $\lambda_{bt}/d \to 0$، این سرعت‌های گروه به‌صورت زیر در می‌آیند:

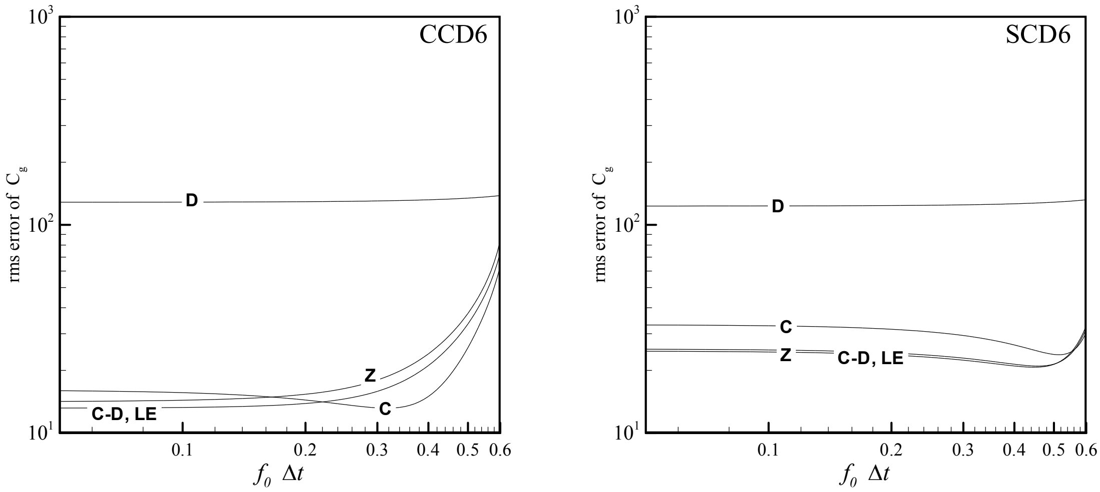
(۱۱)

$$C_{g\,exact}\to\frac{f_\circ \lambda_{bt}^2\left(k^2+l^2\right)^{1/2}}{1}\,,$$

$$C_{g\,Z grid}\to\frac{f_\circ \dfrac{\lambda_{bt}^2}{2}\left((\dfrac{\partial \mathrm{T}_2(k)}{\partial k})^2+(\dfrac{\partial \mathrm{T}_2(l)}{\partial l})^2\right)^{1/2}}{1}\,,$$

$$C_{g\,C-D grid}\to\frac{f_\circ \lambda_{bt}^2\begin{pmatrix}(\mathrm{T}_{\frac{1}{2}}(k)\dfrac{\partial \mathrm{T}_{\frac{1}{2}}(k)}{\partial k})^2\\ +(\ \mathrm{T}_{\frac{1}{2}}(l)\dfrac{\partial \mathrm{T}_{\frac{1}{2}}(l)}{\partial l})^2\end{pmatrix}^{1/2}}{1}\,.$$

بنابراین، برخلاف خطای بسامد، خطای سرعت گروه به صفر میل نمی‌کند؛ به‌گونه‌ای که منحنی‌های خطای کلی محاسبه سرعت گروه این امواج در شبکه‌های C-D، LE و Z افقی است. این مسئله در شبکه‌های آراکاوا A، B و E (که جمله اول رابطه پاشندگی آنها یک است و در اینجا نشان داده نشده است) نیز به همین صورت است؛ درحالی‌که منحنی‌های شبکه‌های C و D، افقی نیستند. در



شکل ۶. مشابه شکل۵ ولی برای سرعت گروه امواج گرانی- لختی تک‌لایه‌ای.

مخرج کسر روابط سرعت گروه C_{gCgrid} و C_{gDgrid} (به جای عدد یک) جمله $\mathrm{T}_\circ^2(k)\mathrm{T}_\circ^2(l)$ ظاهر می‌شود. با توجه به اینکه $\mathrm{T}_\circ(l)\le 1$ و $\mathrm{T}_\circ(k)$ هستند، با کوچک‌تر شدن مخرج کسر، خطای محاسبه سرعت گروه امواج گرانی- لختی در شبکه‌های C و D افزایش می‌یابد.

۴-۲ رابطه پاشندگی دولایه‌ای امواج گرانی- لختی

به شیوه مشابه بخش قبل، می‌توان رابطه پاشندگی پیوسته دولایه‌ای امواج گرانی- لختی را نیز با در نظر گرفتن معادلات آب کم‌عمق دولایه‌ای خطی شده به‌دست آورد (گلشاهی و همکاران، ۲۰۱۱):

$$\begin{aligned}&(\omega/f_\circ)^2 = 1+\mu_\pm\lambda_{bt}^2\left(k^2+l^2\right),\\&\mu_\pm=\frac{1}{2}\left[1\pm\sqrt{1-4\varepsilon^2}\right],\end{aligned}\qquad(۱۲)$$

که ε نسبت شعاع دگرشکلی کژفشار (λ_{bc}) به شعاع دگرشکلی فشارورد (λ_{bt}) است که به‌ازای $g'=\alpha g$ و $\mathrm{H}_2=\gamma\,\mathrm{H}_1$ به‌صورت $\varepsilon=\sqrt{\alpha\gamma/(1+\gamma)^2}$ در می‌آید، به‌گونه‌ای که $\mathrm{H}=\mathrm{H}_1+\mathrm{H}_2$ است. در پژوهش حاضر، $\gamma=1$ و مقدار نوعی $\alpha=0.003$ (گیل، ۱۹۸۲) در نظر گرفته شده است.

شکل گسسته این رابطه پاشندگی در محیط دولایه برای شبکه LE مشابه شبکه E است و همان‌گونه که در محیط تک‌لایه نیز اشاره شد، تنها تفاوت در فاصله شبکه‌ای است:

$$-\frac{\mathrm{T}_{\frac12}^2(\omega)}{f_\circ^2}=\mathrm{T}_\circ^2(\omega)-\mu_\pm\lambda_{bt}^2\left(\mathrm{T}_{\frac12}^2(k)+\mathrm{T}_{\frac12}^2(l)\right).\qquad(۱۳)$$

معادلات آب کم‌عمق دولایه‌ای خطی شده برای گسسته‌سازی در شبکه C-D، به شکل زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{cases}\partial_t u_{\mathrm{C1}}-f_\circ\overline{v_{\mathrm{D1}}}^{t}+g\,\partial_x\left(h_1+h_2\right)=0\\ \partial_t v_{\mathrm{C1}}+f_\circ\overline{u_{\mathrm{D1}}}^{t}+g\,\partial_y\left(h_1+h_2\right)=0\\ \partial_t h_1+\mathrm{H}_1\left(\partial_x u_{\mathrm{C1}}+\partial_y v_{\mathrm{C1}}\right)=0\\ \partial_t u_{\mathrm{D1}}-f_\circ\overline{v_{\mathrm{C1}}}^{t}+g\,\partial_x\overline{\left(h_1+h_2\right)}^{xy}=0\\ \partial_t v_{\mathrm{D1}}+f_\circ\overline{u_{\mathrm{C1}}}^{t}+g\,\partial_y\overline{\left(h_1+h_2\right)}^{xy}=0\end{cases},\qquad(۱۴)$$

$$\begin{cases}\partial_t u_{\mathrm{C2}}-f_\circ\overline{v_{\mathrm{D2}}}^{t}+g\,\partial_x\left(h_1+h_2\right)-g'\partial_x h_1=0\\ \partial_t v_{\mathrm{C2}}+f_\circ\overline{u_{\mathrm{D2}}}^{t}+g\,\partial_y\left(h_1+h_2\right)-g'\partial_y h_1=0\\ \partial_t h_2+\mathrm{H}_2\left(\partial_x u_{\mathrm{C2}}+\partial_y v_{\mathrm{C2}}\right)=0\\ \partial_t u_{\mathrm{D2}}-f_\circ\overline{v_{\mathrm{C2}}}^{t}+g\,\partial_x\overline{\left(h_1+h_2\right)}^{xy}-g'\partial_x\overline{h_1}^{xy}=0\\ \partial_t v_{\mathrm{D2}}+f_\circ\overline{u_{\mathrm{C2}}}^{t}+g\,\partial_y\overline{\left(h_1+h_2\right)}^{xy}-g'\partial_y\overline{h_1}^{xy}=0\end{cases}.$$

جدول ۶. خطای کلی روش‌های SCD6 و CCD6 برای بسامد امواج گرانی- لختی دولایه‌ای در مد کژفشار به‌ازای $f_{\circ}\Delta t = 0.05$ (برحسب درصد).

	$\lambda_{bt}/d = 0.5$				$\lambda_{bt}/d = 2$			
	SCD6	**CCD6**	P_S	P_C	**SCD6**	**CCD6**	P_S	P_C
C	**20.953**	**19.796**	**-**	**6**	**8.545**	**5.018**	**-**	**41**
D	**25.776**	**25.589**	**-**	**1**	**24.620**	**23.755**	**-**	**4**
Z	**0.540**	**0.233**	**-**	**57**	**2.660**	**1.270**	**-**	**52**
C-D , LE	**0.599**	**0.085**	**-**	**86**	**2.977**	**0.459**	**-**	**85**

پـس از گسـسته‌سـازی معـادلات فـوق و اسـتفاده از تابع‌های انتقال، رابطه پاشـندگی گسسته دولایـه‌ای امـواج گرانی- لختی در شبکه C-D نیز به‌دست می‌آید. این رابطه دقیقاً با رابطه (۱۳) مربوط به شبکه LE برابر است. بنابراین، چه برای محیط تک‌لایه و چه برای محیط دولایـه، روابـط پاشندگی گسسته امواج گرانی- لختی در شبکه LE با شبکه C-D برابر و نتایج به‌دست آمده در ایـن دو شـبکه یکـسان است. به‌عـلاوه، در بـرآورد بـسامد امـواج گرانـی -لختـی دولایـه، شـرط $\left(f_{\circ}\Delta t\right)\sqrt{\mu_{\pm}}\left(\lambda_{bt}/d\right) \le N$ نیـز بایـد در نظر گرفته شود.

برای مقایسه نتایج روش‌های عددی SCD6 و CCD6، خطای کلی E_{rms} بسامد و سرعت گروه امواج گرانی- لختی دولایه در شبکه‌های LE و C-D محاسبه شد. طبق تحقیق گلشاهی و همکاران (۲۰۱۱)، دقت روش‌های CCD6 و SCD6 در شبکه Z نسبت به شبکه‌های آراکاوا بیشتر است؛ بنابراین، در اینجا، نتایج شبکه Z نیز به همراه نتایج شبکه‌های آراکاوا C و D، برای مقایسه با نتایج شبکه‌های C-D و LE داده شده است. جدول‌های ۶ و ۷، مقادیر این خطای کلی را در مُد کژفشار برای دو مقدار $\lambda_{bt}/d = 0.5$ و $\lambda_{bt}/d = 2$ به‌ازای $f_{\circ}\Delta t = 0.05$ نشان می‌دهند. نتایج مربوط به مُد فشارورد مشابه نتایج مدل تک‌لایه است و در اینجا از تکرار آن صرف‌نظر شده است. مطابق این جدول‌ها، در مدل دولایه برای مُد کژفشار نیز روش CCD6 عملکرد بهتری دارد. در شبکه‌های C-D و LE، هم در $\lambda_{bt}/d = 0.5$ و هم در $\lambda_{bt}/d = 2$، روش CCD6 نسبت به روش SCD6 برای محاسبه بسامد امواج گرانی- لختی دولایه‌ای با حدود ۸۵ درصد بهبود و برای محاسبه سرعت گروه با حدود ۵۰ درصد بهبود همراه است. درحالی‌که این بهبود در شبکه Z برای محاسبه بسامد، حدود ۵۰ درصد و برای محاسبه سرعت گروه، حدود ۴۰ درصد است.

شکل‌های ۷ و ۸، خطاهای کلی روش‌های SCD6 و CCD6 در محاسبه بسامد و سرعت گروه امواج گرانی- لختی دولایه‌ای را برای مُد کژفشار در شبکه‌های C-D، LE و Z و شبکه‌های آراکاوا C و D برحسب λ_{bt}/d های متفاوت به‌ازای $f_{\circ}\Delta t = 0.05$ نشان می‌دهند. نتایج حاکی از آن است که عملکرد روش CCD6 در مُد کژفشار نیز بهتر از SCD6 است. مشابه مدل تک‌لایه (که تقریباً معادل با مُد فشارورد دولایه است)، منحنی‌های خطای کلی مربوط به شبکه‌های C-D،LE و Z تقریباً بر هم منطبق هستند؛ به‌جز در روش CCD6 که رفتار شبکه‌های C-D و LE به مراتب بهتر از شبکه Z است. این موضوع که در منحنی‌های خطای محاسبه بسامد بارزتر است، نشان از عملکرد مطلوب روشCCD6 در شبکه‌های C-D و LE برای مسئله امواج گرانی- لختی دارد. به‌علاوه، می‌توان مشاهده کرد که خطای کلی محاسبه بسامد این

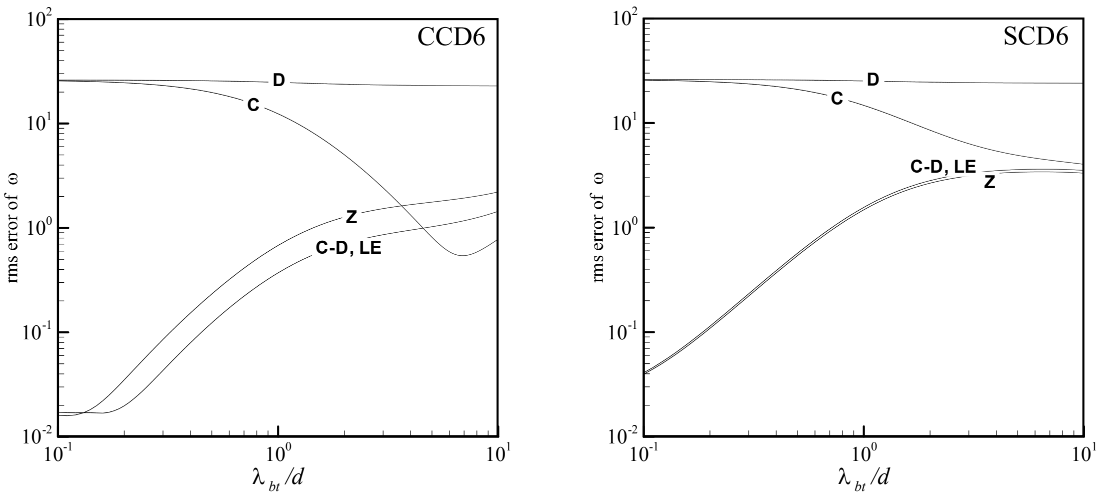
جدول ۷. مشابه جدول۶ ولی برای سرعت گروه امواج گرانی- لختی دولایه‌ای.

	$\lambda_{bt}/d=0.5$				$\lambda_{bt}/d=2$			
	SCD6	**CCD6**	P_S	P_C	**SCD6**	**CCD6**	P_S	P_C
C	**673.711**	**613.964**	**-**	**9**	**40.059**	**31.553**	**-**	**21**
D	**1029.140**	**1029.529**	**-**	**-**	**157.189**	**161.963**	**3**	**-**
Z	**25.931**	**14.626**	**-**	**44**	**25.031**	**14.265**	**-**	**43**
C-D , LE	**27.243**	**13.125**	**-**	**52**	**26.238**	**13.051**	**-**	**50**

امواج، در همه شبکه‌ها؛ به‌جز شبکه D به مقدار λ_{bt}/d بستگی دارد. درحالی‌که خطای کلی محاسبه سرعت گروه این امواج به‌جز در شبکه‌های C و D به مقدار λ_{bt}/d بستگی ندارد.

مطابق شکل‌های ۷ و ۸، منحنی‌های خطای کلی مربوط به شبکه‌های C و D در λ_{bt}/dهای کوچک به هم نزدیک می‌شوند. در گام‌های زمانی کوچک ($\Delta t\to 0$)، طبق رابطه پاشندگی گسسته دولایه‌ای امواج گرانی- لختی $\left(\omega/f_\circ\right)^2=\mathrm{T}_\circ^2(k)\,\mathrm{T}_\circ^2(l)-\mu_\pm\lambda_{bt}^2\left(\mathrm{T}_1^2(k)\mathrm{T}_\circ^2(l)+\mathrm{T}_1^2(l)\mathrm{T}_\circ^2(k)\right)$ مربوط به شبکه آراکاوا D (قادر و همکاران، ۱۳۸۹)، خطای نسبی در این شبکه به خطا در عبارت‌های $\mathrm{T}_\circ^2(k)\mathrm{T}_\circ^2(l)$ و $\mathrm{T}_1^2(k)\mathrm{T}_\circ^2(l)+\mathrm{T}_1^2(l)\mathrm{T}_\circ^2(k)$ بستگی دارد. در λ_{bt}/dهای کوچک، اثر جمله دوم کم می‌شود، به گونه‌ای که در $\lambda_{bt}/d\to 0$، می‌توان $(\omega/f_\circ)^2\to\mathrm{T}_\circ^2(k)\mathrm{T}_\circ^2(l)$ را نتیجه گرفت. در مورد شبکه آراکاوا C با رابطه پاشندگی گسسته دولایه‌ای $\left(\omega/f_\circ\right)^2=\mathrm{T}_\circ^2(k)\mathrm{T}_\circ^2(l)-\mu_\pm\lambda_{bt}^2\left(\mathrm{T}_{\frac{1}{2}}^2(k)+\mathrm{T}_{\frac{1}{2}}^2(l)\right)$ نیز می‌توان این رفتار را مشاهده کرد به گونه‌ای که به‌ازای $\lambda_{bt}/d\to 0$، مقادیر خطای کلی در شبکه‌های C و D به یکدیگر نزدیک می‌شوند. تفاوت بین منحنی‌های شبکه‌های C و D که در λ_{bt}/dهای بزرگ بارز است، از اختلاف در جمله دوم (به‌صورت $\mathrm{T}_{\frac{1}{2}}^2(k)+\mathrm{T}_{\frac{1}{2}}^2(l)$ در شبکه C و $\mathrm{T}_1^2(k)\mathrm{T}_\circ^2(l)+\mathrm{T}_1^2(l)\mathrm{T}_\circ^2(k)$ در شبکه D) ناشی می‌شود. با توجه به کمتر بودن خطای نسبی $\mathrm{T}_{\frac{1}{2}}$ نسبت به T_1 و $\mathrm{T}_\circ$ (گلشاهی و همکاران، ۲۰۱۱)، خطای کلی محاسبه بسامد امواج گرانی- لختی دولایه‌ای به‌ازای λ_{bt}/dهای بزرگ، در شبکه C کاهش می‌یابد، ولی در شبکه D، همچنان بزرگ باقی می‌ماند. به‌این‌ترتیب، منحنی خطای کلی محاسبه بسامد در شبکه D تقریباً افقی است و خطای کلی در این شبکه تقریباً به مقدار λ_{bt}/d بستگی ندارد. رفتار شبکه C-D در مقایسه با شبکه‌های آراکاوا C و D به‌گونه‌ای است که دقت بالای موجود در شبکه C به‌ازای λ_{bt}/dهای بزرگ حفظ شده و در عین حال، افزایش خطا در λ_{bt}/dهای کوچک نیز رفع شده است. این مسئله در شکل‌های ۳ و ۴ مربوط به مدل تک‌لایه نیز مشاهده می‌شود.

شکل‌های ۹ و ۱۰، خطاهای کلی محاسبه بسامد و سرعت گروه امواج گرانی- لختی دولایه‌ای را برای روش‌های SCD6 و CCD6 در مُد کژفشار به‌ازای $\lambda_{bt}/d=1$ و $f_\circ\Delta t$های مختلف نشان می‌دهند. خطای کلی محاسبه بسامد این امواج، با افزایش مقدار گام زمانی، افزایش می‌یابد. این روند افزایش خطای کلی در محاسبه سرعت گروه نیز برای روش CCD6 در شبکه‌های LE، C-D و Z وجود دارد.



شکل ۷. منحنی خطای کلی روش‌های CCD6 و SCD6 برای بسامد امواج گرانی- لختی دولایه‌ای در مُد کژفشار به‌ازای $f_\circ \Delta t = 0.05$ (برحسب درصد).

۵ نمایش امواج راسبی

با در نظر گرفتن بخش زمین‌گرد ($\vec{u}_g$) و آزمین‌گرد ($\vec{u}_a$) و تقریب صفحه β به‌صورت $f = f_\circ + \beta y$ و صرف‌نظر کردن از جمله‌های کوچک‌تر در معادلات آب کم‌عمق خطی شده، می‌توان معادلات حاکم را برای امواج راسبی در یک محیط تک‌لایه به‌دست آورد (گیل، ۱۹۸۲):

$$\begin{cases} f_\circ v_g - g\partial_x h = 0 \\ f_\circ u_g + g\partial_y h = 0 \\ \partial_t u_g - f_\circ v_a - \beta y v_g = 0 \\ \partial_t v_g + f_\circ u_a + \beta y u_g = 0 \\ \partial_t h + \mathrm{H}\left(\partial_x u_a + \partial_y v_a\right) = 0 \end{cases} , \qquad (۱۵)$$

که $\beta = \partial f / \partial y$ مقداری ثابت است.

به شیوه مشابه، معادلات حاکم برای امواج راسبی در یک محیط دولایه، به شکل زیر در می‌آید (قادر و همکاران، ۱۳۸۹):

$$\begin{cases} f_\circ v_{g1} - g\partial_x\left(h_1 + h_2\right) = 0 \\ f_\circ u_{g1} + g\partial_y\left(h_1 + h_2\right) = 0 \\ \partial_t u_{g1} - f_\circ v_{a1} - \beta y v_{g1} = 0 \\ \partial_t v_{g1} + f_\circ u_{a1} + \beta y u_{g1} = 0 \\ \partial_t h_1 + \mathrm{H}_1\left(\partial_x u_{a1} + \partial_y v_{a1}\right) = 0 \end{cases} , \qquad (۱۶)$$

$$\begin{cases} f_\circ v_{g2} - g\partial_x\left(h_1 + h_2\right) + g'\partial_x h_1 = 0 \\ f_\circ u_{g2} + g\partial_y\left(h_1 + h_2\right) - g'\partial_y h_1 = 0 \\ \partial_t u_{g2} - f_\circ v_{a2} - \beta y v_{g2} = 0 \\ \partial_t v_{g2} + f_\circ u_{a2} + \beta y u_{g2} = 0 \\ \partial_t h_2 + \mathrm{H}_2\left(\partial_x u_{a2} + \partial_y v_{a2}\right) = 0 \end{cases} .$$

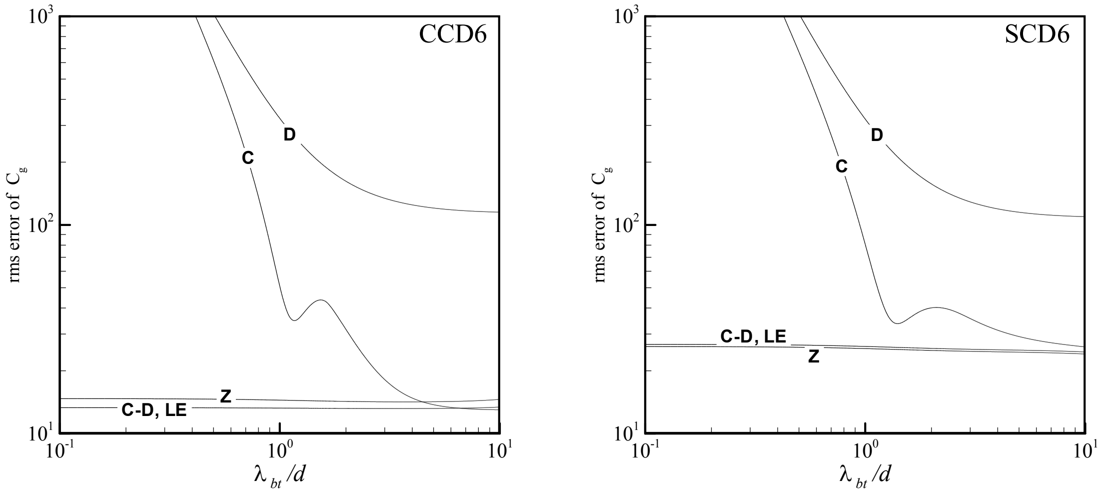
۵-۱ رابطه پاشندگی تک‌لایه‌ای امواج راسبی

مشابه مسئله امواج گرانی- لختی، با در نظر گرفتن جواب موجی‌شکل برای دستگاه معادلات (۱۵)، رابطه پاشندگی پیوسته تک‌لایه‌ای امواج راسبی به‌دست می‌آید:

$$\frac{\omega}{\beta} = -\frac{\lambda_{bt}^2 k}{1 + \lambda_{bt}^2\left(k^2 + l^2\right)} . \qquad (۱۷)$$

برای به‌دست آوردن، رابطه پاشندگی گسسته تک‌لایه‌ای امواج راسبی در شبکه LE، دستگاه معادلات (۱۵) به شکل زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{cases} f_\circ \overline{v_g}^{\,t} - g\partial_x h = 0 \\ f_\circ \overline{u_g}^{\,t} + g\partial_y h = 0 \\ \partial_t u_g - f_\circ \overline{v_a}^{\,t} - \beta y \overline{v_g}^{\,t} = 0 \\ \partial_t v_g + f_\circ \overline{u_a}^{\,t} + \beta y \overline{u_g}^{\,t} = 0 \\ \partial_t h + \mathrm{H}\left(\partial_x u_a + \partial_y v_a\right) = 0 \end{cases} , \qquad (۱۸)$$



شکل ۸ مشابه شکل۷ ولی برای سرعت گروه امواج گرانی- لختی دولایه‌ای.

پس از گسسته‌سازی و در نظر گرفتن جواب موجی‌شکل $e^{i(kx+ly-\omega t)}$، معادلات فوق به شکل زیر در می‌آید:

(۱۹)

$$\begin{cases} f_\circ \mathrm{T}_\circ(\omega)\mathrm{V}_g - g\mathrm{T}_{\frac{1}{2}}(k)\mathrm{H}_g = 0 \\ f_\circ \mathrm{T}_\circ(\omega)\mathrm{U}_g + g\mathrm{T}_{\frac{1}{2}}(l)\mathrm{H}_g = 0 \\ \mathrm{T}_{\frac{1}{2}}(\omega)\mathrm{U}_g - f_\circ \mathrm{T}_\circ(\omega)\mathrm{V}_a - \beta\, y\mathrm{T}_\circ(\omega)\mathrm{V}_g = 0 \\ \mathrm{T}_{\frac{1}{2}}(\omega)\mathrm{V}_g + f_\circ \mathrm{T}_\circ(\omega)\mathrm{U}_a + \beta\, y\mathrm{T}_\circ(\omega)\mathrm{U}_g = 0 \\ \mathrm{T}_{\frac{1}{2}}(\omega)\mathrm{H}_g + \mathrm{H}\left(\mathrm{T}_{\frac{1}{2}}(k)\mathrm{U}_a + \mathrm{TF}_{\frac{1}{2}}(l)\mathrm{V}_a\right) = 0 \end{cases},$$

که U_g، V_g و H_g مقادیر دامنه جواب موجی‌شکل برای بخش زمین‌گرد و U_a و V_a برای بخش آزمین‌گرد هستند و تابع انتقال $\mathrm{TF}(l)$ که به علت وابستگی دامنه بخش آزمین‌گرد به‌راستای y ظاهر می‌شود، در هنگام محاسبه دترمینان ماتریس ضرایب، برحسب تابع‌های انتقال $\mathrm{T}(l)$ و $\mathrm{R}(l)$ به‌صورت زیر اِعمال می‌شود:

$$\begin{cases} \mathrm{TF}(l) f_\circ = f_\circ \mathrm{T}(l) \\ \mathrm{TF}(l)\beta\, y = \beta\, y\mathrm{T}(l) + \beta\, \mathrm{R}(l) \end{cases}. \qquad (۲۰)$$

پس از صفر قرار دادن دترمینان ماتریس ضرایب دستگاه معادلات فوق، شکل عمومی رابطه پاشندگی گسسته تک‌لایه‌ای امواج راسبی در شبکه LE به‌دست می‌آید:

$$\frac{1}{\beta}\mathrm{T}_{\frac{1}{2}}(\omega) = \frac{\lambda_{bt}^2\, \mathrm{T}_{\frac{1}{2}}(k)\mathrm{R}_{\frac{1}{2}}(l)\mathrm{T}_\circ(\omega)}{\mathrm{T}_\circ^2(\omega) - \lambda_{bt}^2\left(\mathrm{T}_{\frac{1}{2}}^2(k) + \mathrm{T}_{\frac{1}{2}}^2(l)\right)}\ . \qquad (۲۱)$$

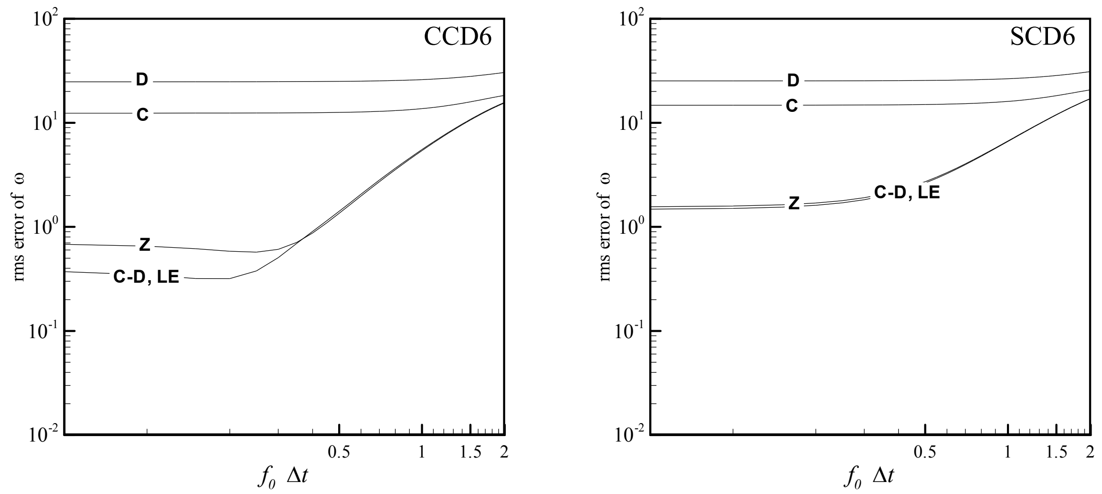
به‌گونه‌ای که برآورد بسامد این امواج به مقدار عبارت $\beta\,\lambda_{bt}\Delta t$ بستگی دارد. در این تحقیق، مقادیر نوعی $\beta = 1.6\times10^{-11}(ms)^{-1}$ و $\lambda_{bt} = 2000\,km$ (گیل، ۱۹۸۲) در نظر گرفته شده‌اند.

رابطه (۲۱) در گام‌های زمانی کوچک ($\Delta t \to 0$)، به شکل زیر در می‌آید:

$$\frac{\omega}{\beta} = i\,\frac{\lambda_{bt}^2\, \mathrm{T}_{\frac{1}{2}}(k)\mathrm{R}_{\frac{1}{2}}(l)}{1 - \lambda_{bt}^2\left(\mathrm{T}_{\frac{1}{2}}^2(k) + \mathrm{T}_{\frac{1}{2}}^2(l)\right)}\ , \qquad (۲۲)$$

که معادل است با رابطه‌ای که در آن، بخش زمانی به‌صورت پیوسته در نظر گرفته می‌شود.

دستگاه معادلات (۱۵) برای گسسته‌سازی در شبکه C-D، به شکل زیر نوشته می‌شود:



شکل ۹. منحنی خطای کلی روش‌های CCD6 و SCD6 برای بسامد امواج گرانی- لختی دولایه‌ای در مُد کژفشار به‌ازای $\lambda_{bt}/d=1$ (برحسب درصد).

$$\begin{cases} f_\circ \overline{v_{g\mathrm{D}}}^{\,t} - g\partial_x h = 0 \\ f_\circ \overline{u_{g\mathrm{D}}}^{\,t} + g\partial_y h = 0 \\ \partial_t u_{g\mathrm{C}} - f_\circ \overline{v_{a\mathrm{D}}}^{\,t} - \beta\, y\overline{v_{g\mathrm{D}}}^{\,t} = 0 \\ \partial_t v_{g\mathrm{C}} + f_\circ \overline{u_{a\mathrm{D}}}^{\,t} + \beta\, y\overline{u_{g\mathrm{D}}}^{\,t} = 0 \\ \partial_t h + \mathrm{H}\left(\partial_x u_{a\mathrm{C}} + \partial_y v_{a\mathrm{C}}\right) = 0 \end{cases} , \tag{۲۳}$$

$$\begin{cases} f_\circ \overline{v_{g\mathrm{C}}}^{\,t} - g\partial_x \overline{h}^{xy} = 0 \\ f_\circ \overline{u_{g\mathrm{C}}}^{\,t} + g\partial_y \overline{h}^{xy} = 0 \\ \partial_t u_{g\mathrm{D}} - f_\circ \overline{v_{a\mathrm{C}}}^{\,t} - \beta\, y\overline{v_{g\mathrm{C}}}^{\,t} = 0 \\ \partial_t v_{g\mathrm{D}} + f_\circ \overline{u_{a\mathrm{C}}}^{\,t} + \beta\, y\overline{u_{g\mathrm{C}}}^{\,t} = 0 \end{cases} ,$$

که پس از گسسته‌سازی، به‌صورت زیر در می‌آید:
(۲۴)

$$\begin{cases} f_\circ \mathrm{T}_\circ(\omega)\mathrm{V}_{g\mathrm{D}} - g\mathrm{H}_g \mathrm{T}_{\frac{1}{2}}(k) = 0 \\ f_\circ \mathrm{T}_\circ(\omega)\mathrm{U}_{g\mathrm{D}} + g\mathrm{H}_g \mathrm{T}_{\frac{1}{2}}(l) = 0 \\ \mathrm{T}_{\frac{1}{2}}(\omega)\mathrm{U}_{g\mathrm{C}} - f_\circ \mathrm{T}_\circ(\omega)\mathrm{V}_{a\mathrm{D}} - \beta\, y\mathrm{T}_\circ(\omega)\mathrm{V}_{g\mathrm{D}} = 0 \\ \mathrm{T}_{\frac{1}{2}}(\omega)\mathrm{V}_{g\mathrm{C}} + f_\circ \mathrm{T}_\circ(\omega)\mathrm{U}_{a\mathrm{D}} + \beta\, y\mathrm{T}_\circ(\omega)\mathrm{U}_{g\mathrm{D}} = 0 \\ \mathrm{T}_{\frac{1}{2}}(\omega)\mathrm{H}_g + \mathrm{H}\left(\mathrm{U}_{a\mathrm{C}}\mathrm{T}_{\frac{1}{2}}(k) + \mathrm{V}_{a\mathrm{C}}\mathrm{TF}_{\frac{1}{2}}(l)\right) = 0 \end{cases} ,$$

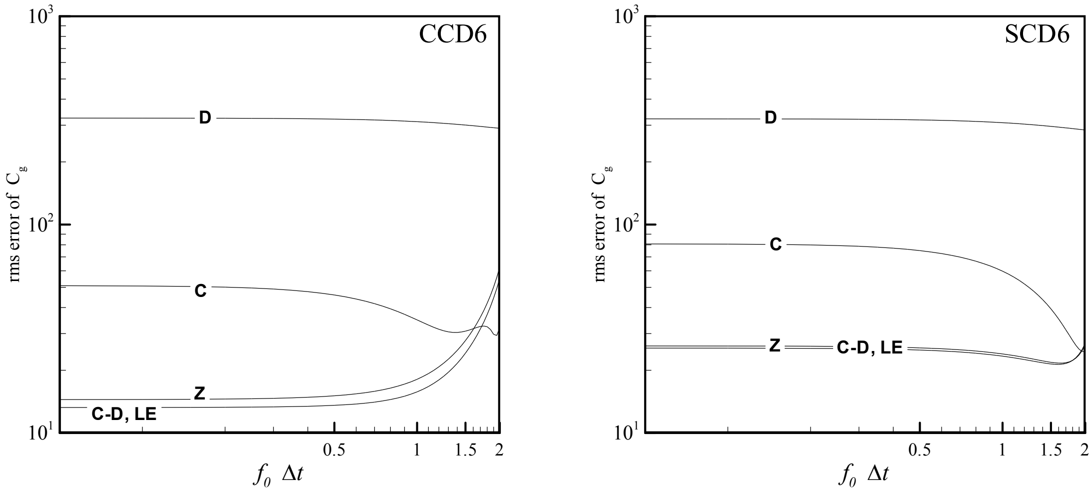
$$\begin{cases} f_\circ \mathrm{T}_\circ(\omega)\mathrm{V}_{g\mathrm{C}} - g\mathrm{H}_g \mathrm{T}_{\frac{1}{2}}(k)\mathrm{T}_\circ(k)\mathrm{T}_\circ(l) = 0 \\ f_\circ \mathrm{T}_\circ(\omega)\mathrm{U}_{g\mathrm{C}} + g\mathrm{H}_g \mathrm{T}_{\frac{1}{2}}(l)\mathrm{T}_\circ(k)\mathrm{T}_\circ(l) = 0 \\ \mathrm{T}_{\frac{1}{2}}(\omega)\mathrm{U}_{g\mathrm{D}} - f_\circ \mathrm{T}_\circ(\omega)\mathrm{V}_{a\mathrm{C}} - \beta\, y\mathrm{T}_\circ(\omega)\mathrm{V}_{g\mathrm{C}} = 0 \\ \mathrm{T}_{\frac{1}{2}}(\omega)\mathrm{V}_{g\mathrm{D}} + f_\circ \mathrm{T}_\circ(\omega)\mathrm{U}_{a\mathrm{C}} + \beta\, y\mathrm{T}_\circ(\omega)\mathrm{U}_{g\mathrm{C}} = 0 \end{cases} .$$

به‌این‌ترتیب، با صفر قرار دادن دترمینان ماتریس ضرایب دستگاه معادلات فوق، شکل عمومی رابطه پاشندگی گسسته تک‌لایه‌ای امواج راسبی در شبکه C-D به‌دست می‌آید:

$$\frac{1}{\beta}\mathrm{T}_{\frac{1}{2}}(\omega) = \frac{\lambda_{bt}^2\, \mathrm{T}_\circ(k)\mathrm{T}_\circ(l)\,\mathrm{T}_{\frac{1}{2}}(k)\mathrm{R}_{\frac{1}{2}}(l)\mathrm{T}_\circ(\omega)}{\mathrm{T}_\circ^2(\omega) - \lambda_{bt}^2\left(\mathrm{T}_{\frac{1}{2}}^2(k) + \mathrm{T}_{\frac{1}{2}}^2(l)\right)} \ . \tag{۲۵}$$

برخلاف مسئله امواج گرانی- لختی، این رابطه با رابطه (۲۱) مربوط به شبکه LE یکسان نیست. تنها تفاوت آنها در عامل $\mathrm{T}_\circ(k)\mathrm{T}_\circ(l)$ است که در صورت کسر رابطه پاشندگی مربوط به شبکه C-D وجود دارد.

برای بررسی دقت روش‌های SCD6 و CCD6، خطای کلی E_{rms} محاسبه بسامد و سرعت گروه امواج راسبی تک‌لایه‌ای در شبکه‌های C-D و LE محاسبه شد. جدول‌های ۸ و ۹، این خطاهای کلی را در روش‌های



شکل ۱۰. مشابه شکل۹ ولی برای سرعت گروه امواج گرانی- لختی دولایه‌ای.

SCD6 و CCD6 برای دو مقدار $\lambda_{bt}/d=0.5$ و $\lambda_{bt}/d=2$ به‌ازای $\beta\,\lambda_{bt}\Delta t=3.2$ نشان می‌دهند (نتایج شبکه‌های آراکاوا C و D و شبکه Z برای مقایسه داده شده‌اند). مطابق این جدول‌ها، برای محاسبه بسامد امواج راسبی تک‌لایه‌ای هم در $\lambda_{bt}/d=0.5$ و هم در $\lambda_{bt}/d=2$، عملکرد روش CCD6 در شبکه C-D با حدود ۳۵ درصد بهبود و در شبکه LE با حدود ۲۵ درصد، بهتر از روش SCD6 است. اما برای محاسبه سرعت گروه این امواج، روش SCD6 کمی بهتر است به‌جز در شبکه LE برای $\lambda_{bt}/d=0.5$ که روش CCD6 دارای عملکرد بهتری است. بنابراین، به‌طورکلی، نمی‌توان برای مسئله امواج راسبی تک‌لایه‌ای در شبکه‌های C-D و LE تفاوت قابل‌ملاحظه‌ای بین این دو روش عددی قائل شد. اگرچه خطا در شبکه C-D نسبت به شبکه‌های آراکاوا C و D کمتر است ولی کمترین خطا برای محاسبه بسامد این امواج در شبکه Z و برای محاسبه سرعت گروه در شبکه LE روی می‌دهد.

شکل‌های ۱۱ و ۱۲، خطاهای کلی محاسبه بسامد و سرعت گروه امواج راسبی تک‌لایه‌ای را برای روش‌های SCD6 و CCD6 در شبکه‌های گوناگون به‌ازای $\beta\,\lambda_{bt}\Delta t=3.2$ نشان می‌دهند. منحنی‌های خطای کلی هر دو روش عددی در شبکه C-D به‌ازای λ_{bt}/dهای بزرگ منطبق بر منحنی‌های شبکه C است. اما در

جدول ۸ خطای کلی روش‌های SCD6 و CCD6 برای بسامد امواج راسبی تک‌لایه‌ای به‌ازای $\beta\,\lambda_{bt}\Delta t=3.2$ (برحسب درصد).

	$\lambda_{bt}/d=0.5$				$\lambda_{bt}/d=2$			
	SCD6	**CCD6**	P_S	P_C	**SCD6**	**CCD6**	P_S	P_C
C	**57.464**	**41.696**	**-**	**27**	**59.010**	**36.485**	**-**	**38**
D	**47.282**	**246.227**	**81**	**-**	**47.955**	**253.475**	**81**	**-**
Z	**17.816**	**18.730**	**5**	**-**	**16.178**	**17.685**	**9**	**-**
LE	**55.037**	**42.896**	**-**	**22**	**54.968**	**39.934**	**-**	**27**
C-D	**59.326**	**39.840**	**-**	**33**	**59.192**	**36.309**	**-**	**39**

جدول ۹. مشابه جدول۸ ولی برای سرعت گروه امواج راسبی تک‌لایه‌ای.

	$\lambda_{bt}/d=0.5$				$\lambda_{bt}/d=2$			
	SCD6	**CCD6**	P_S	P_C	**SCD6**	**CCD6**	P_S	P_C
C	**301.660**	**319.441**	**6**	**-**	**99.463**	**129.084**	**23**	**-**
D	**293.171**	**391.337**	**25**	**-**	**86.553**	**242.658**	**64**	**-**
Z	**525.133**	**582.871**	**10**	**-**	**184.096**	**191.708**	**4**	**-**
LE	**127.586**	**104.196**	**-**	**18**	**53.259**	**67.657**	**21**	**-**
C-D	**291.508**	**318.140**	**8**	**-**	**97.601**	**127.619**	**24**	**-**

λ_{bt}/d های کوچک، رفتار شبکه C-D مانند شبکه C نیست. این مسئله در منحنی‌های خطای کلی سرعت گروه این امواج بارزتر است. این همان رفتار مطلوبی است که با تغییر شبکه عددی از آراکاوا C به شبکه C-D برآورده شده است. به‌طورکلی، برای همه λ_{bt}/d ها، کمترین خطای روش‌های SCD6 و CCD6 در محاسبه بسامد امواج راسبی تک‌لایه‌ای، مربوط به شبکه Z است. درحالی‌که کمترین خطای محاسبه سرعت گروه این امواج در شبکه LE روی می‌دهد.

شکل‌های ۱۳ و ۱۴، خطاهای کلی محاسبه بسامد و سرعت گروه امواج راسبی تک‌لایه‌ای را برای روش‌های SCD6 و CCD6 برای $\beta\lambda_{bt}\Delta t$ های متفاوت به‌ازای $\lambda_{bt}/d=1$ نشان می‌دهند. در محاسبه بسامد این امواج، با افزایش گام زمانی، در هر دو روش عددی برای همه شبکه‌ها خطای کلی روندی افزایشی دارد به‌جز برای شبکه D در روش CCD6 که خطای کلی محاسبه بسامد در حال کاهش است. این روند، در محاسبه سرعت گروه، برعکس است و خطای کلی محاسبه سرعت گروه این امواج، با افزایش گام زمانی برای همه شبکه‌ها به‌جز شبکه LE کاهش می‌یابد. به‌علاوه در گام‌های زمانی بزرگ، خطاهای کلی محاسبه بسامد و سرعت گروه این امواج، به یک مقدار معین میل می‌کند.

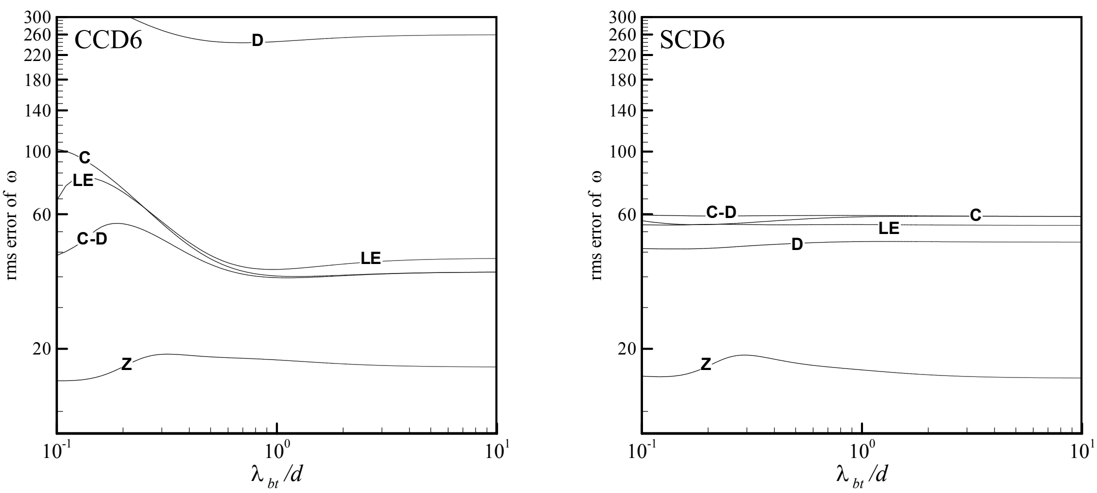
۲-۵ رابطه پاشندگی دولایه‌ای امواج راسبی

با در نظر گرفتن جواب موجی‌شکل برای دستگاه معادلات (۱۶)، رابطه پاشندگی پیوسته دولایه‌ای امواج راسبی به شکل زیر در می‌آید (قادر و همکاران، ۱۳۸۹):

$$\frac{\omega}{\beta}=-\frac{\left[\mu_{\pm}+\varepsilon^2\lambda_{bt}^2\left(k^2+l^2\right)\right]\lambda_{bt}^2 k}{1+\lambda_{bt}^2\left(k^2+l^2\right)+\varepsilon^2\lambda_{bt}^4\left(k^2+l^2\right)^2} \quad (۲۶)$$

مشابه مسئله امواج راسبی تک‌لایه، در مدل دولایه نیز می‌توان شکل عمومی رابطه پاشندگی گسسته دولایه‌ای امواج راسبی در شبکه‌های LE و C-D را به‌دست آورد. برای شبکه LE، دستگاه معادلات (۱۶) به شکل زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{cases} f_\circ\overline{v_{g1}}^{\,t}-g\partial_x\left(h_1+h_2\right)=0\\ f_\circ\overline{u_{g1}}^{\,t}+g\partial_y\left(h_1+h_2\right)=0\\ \partial_t u_{g1}-f_\circ\overline{v_{a1}}^{\,t}-\beta\, y\overline{v_{g1}}^{\,t}=0\\ \partial_t v_{g1}+f_\circ\overline{u_{a1}}^{\,t}+\beta\, y\overline{u_{g1}}^{\,t}=0\\ \partial_t h_1+H_1\left(\partial_x u_{a1}+\partial_y v_{a1}\right)=0\end{cases},\quad \begin{cases} f_\circ\overline{v_{g2}}^{\,t}-g\partial_x\left(h_1+h_2\right)+g'\partial_x h_1=0\\ f_\circ\overline{u_{g2}}^{\,t}+g\partial_y\left(h_1+h_2\right)-g'\partial_y h_1=0\\ \partial_t u_{g2}-f_\circ\overline{v_{a2}}^{\,t}-\beta\, y\,\overline{v_{g2}}^{\,t}=0\\ \partial_t v_{g2}+f_\circ\overline{u_{a2}}^{\,t}+\beta\, y\overline{u_{g2}}^{\,t}=0\\ \partial_t h_2+H_2\left(\partial_x u_{a2}+\partial_y v_{a2}\right)=0\end{cases}. \quad (۲۷)$$



شکل ۱۱. منحنی خطای کلی روش‌های CCD6 و SCD6 برای بسامد امواج راسبی تک‌لایه‌ای در شبکه‌های گوناگون به‌ازای $\beta\,\lambda_{bt}\Delta t = 3.2$ (برحسب درصد).

آن‌گاه، پس از گسسته‌سازی‌های مکانی و زمانی و در نظر گرفتن جواب موجی‌شکل، شکل عمومی رابطه پاشندگی گسسته دولایه‌ای امواج راسبی در شبکه LE به‌دست می‌آید:

$$\frac{1}{\beta}\mathrm{T}_{\frac{1}{2}}(\omega)=\frac{\left(\left(\mu_{\pm}\mathrm{T}_{\circ}^{2}(\omega)-\varepsilon^{2}\lambda_{bt}^{2}\left(\mathrm{T}_{\frac{1}{2}}^{2}(k)+\mathrm{T}_{\frac{1}{2}}^{2}(l)\right)\right)\lambda_{bt}^{2}\mathrm{T}_{\frac{1}{2}}(k)\mathrm{R}_{\frac{1}{2}}(l)\mathrm{T}_{\circ}(\omega)\right)}{\left(\mathrm{T}_{\circ}^{4}(\omega)-\lambda_{bt}^{2}\left(\mathrm{T}_{\frac{1}{2}}^{2}(k)+\mathrm{T}_{\frac{1}{2}}^{2}(l)\right)\mathrm{T}_{\circ}^{2}(\omega)+\varepsilon^{2}\lambda_{bt}^{4}\left(\mathrm{T}_{\frac{1}{2}}^{2}(k)+\mathrm{T}_{\frac{1}{2}}^{2}(l)\right)^{2}\right)}\ . \qquad (۲۸)$$

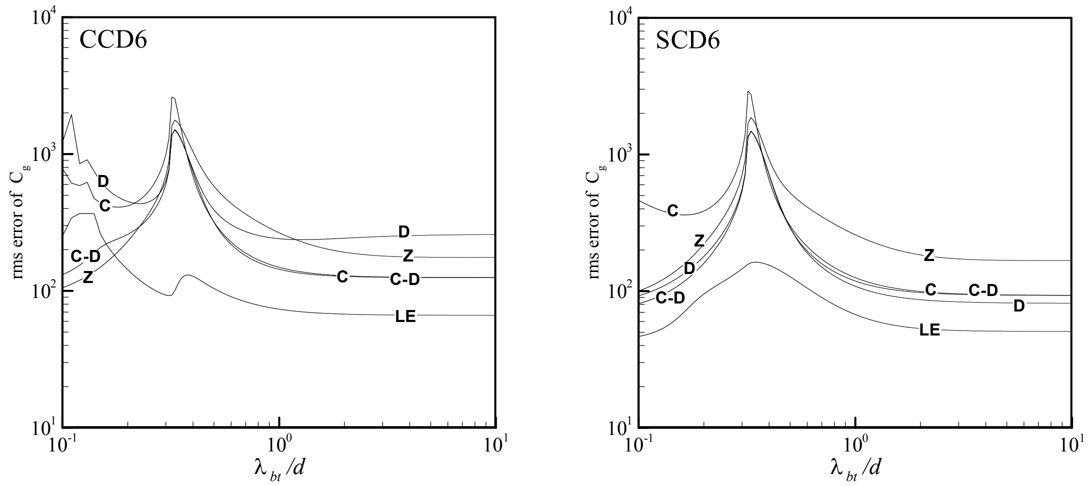
در گام‌های زمانی کوچک ($\Delta t \to 0$)، رابطه فوق به شکل زیر در می‌آید:

$$\frac{\omega}{\beta}=i\frac{\left(\left(\mu_{\pm}-\varepsilon^{2}\lambda_{bt}^{2}\left(\mathrm{T}_{\frac{1}{2}}^{2}(k)+\mathrm{T}_{\frac{1}{2}}^{2}(l)\right)\right)\lambda_{bt}^{2}\mathrm{T}_{\frac{1}{2}}(k)\mathrm{R}_{\frac{1}{2}}(l)\right)}{\left(1-\lambda_{bt}^{2}\left(\mathrm{T}_{\frac{1}{2}}^{2}(k)+\mathrm{T}_{\frac{1}{2}}^{2}(l)\right)+\varepsilon^{2}\lambda_{bt}^{4}\left(\mathrm{T}_{\frac{1}{2}}^{2}(k)+\mathrm{T}_{\frac{1}{2}}^{2}(l)\right)^{2}\right)}\ . \qquad (۲۹)$$

برای گسسته‌سازی در شبکه C-D، ابتدا دستگاه معادلات (۱۶) به شکل زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{cases} f_{\circ}\overline{v_{g1\mathrm{D}}}^{t}-g\partial_{x}\left(h_{1}+h_{2}\right)=0\\ f_{\circ}\overline{u_{g1\mathrm{D}}}^{t}+g\partial_{y}\left(h_{1}+h_{2}\right)=0\\ \partial_{t}u_{g1\mathrm{C}}-f_{\circ}\overline{v_{a1\mathrm{D}}}^{t}-\beta\, y\overline{v_{g1\mathrm{D}}}^{t}=0\\ \partial_{t}v_{g1\mathrm{C}}+f_{\circ}\overline{u_{a1\mathrm{D}}}^{t}+\beta\, y\overline{u_{g1\mathrm{D}}}^{t}=0\\ \partial_{t}h_{1}+\mathrm{H}_{1}\left(\partial_{x}u_{a1\mathrm{C}}+\partial_{y}v_{a1\mathrm{C}}\right)=0\\ f_{\circ}\overline{v_{g1\mathrm{C}}}^{t}-g\partial_{x}\overline{\left(h_{1}+h_{2}\right)}^{xy}=0\\ f_{\circ}\overline{u_{g1\mathrm{C}}}^{t}+g\partial_{y}\overline{\left(h_{1}+h_{2}\right)}^{xy}=0\\ \partial_{t}u_{g1\mathrm{D}}-f_{\circ}\overline{v_{a1\mathrm{C}}}^{t}-\beta\, y\overline{v_{g1\mathrm{C}}}^{t}=0\\ \partial_{t}v_{g1\mathrm{D}}+f_{\circ}\overline{u_{a1\mathrm{C}}}^{t}+\beta\, y\overline{u_{g1\mathrm{C}}}^{t}=0 \end{cases}, \qquad (۳۰)$$

$$\begin{cases} f_{\circ}\overline{v_{g2\mathrm{D}}}^{t}-g\partial_{x}\left(h_{1}+h_{2}\right)+g'\partial_{x}h_{1}=0\\ f_{\circ}\overline{u_{g2\mathrm{D}}}^{t}+g\partial_{y}\left(h_{1}+h_{2}\right)-g'\partial_{y}h_{1}=0\\ \partial_{t}u_{g2\mathrm{C}}-f_{\circ}\overline{v_{a2\mathrm{D}}}^{t}-\beta\, y\overline{v_{g2\mathrm{D}}}^{t}=0\\ \partial_{t}v_{g2\mathrm{C}}+f_{\circ}\overline{u_{a2\mathrm{D}}}^{t}+\beta\, y\overline{u_{g2\mathrm{D}}}^{t}=0\\ \partial_{t}h_{2}+\mathrm{H}_{2}\left(\partial_{x}u_{a2\mathrm{C}}+\partial_{y}v_{a2\mathrm{C}}\right)=0\\ f_{\circ}\overline{v_{g2\mathrm{C}}}^{t}-g\partial_{x}\overline{\left(h_{1}+h_{2}\right)}^{xy}+g'\partial_{x}\overline{h_{1}}^{xy}=0\\ f_{\circ}\overline{u_{g2\mathrm{C}}}^{t}+g\partial_{y}\overline{\left(h_{1}+h_{2}\right)}^{xy}-g'\partial_{y}\overline{h_{1}}^{xy}=0\\ \partial_{t}u_{g2\mathrm{D}}-f_{\circ}\overline{v_{a2\mathrm{C}}}^{t}-\beta\, y\overline{v_{g2\mathrm{C}}}^{t}=0\\ \partial_{t}v_{g2\mathrm{D}}+f_{\circ}\overline{u_{a2\mathrm{C}}}^{t}+\beta\, y\overline{u_{g2\mathrm{C}}}^{t}=0 \end{cases}.$$



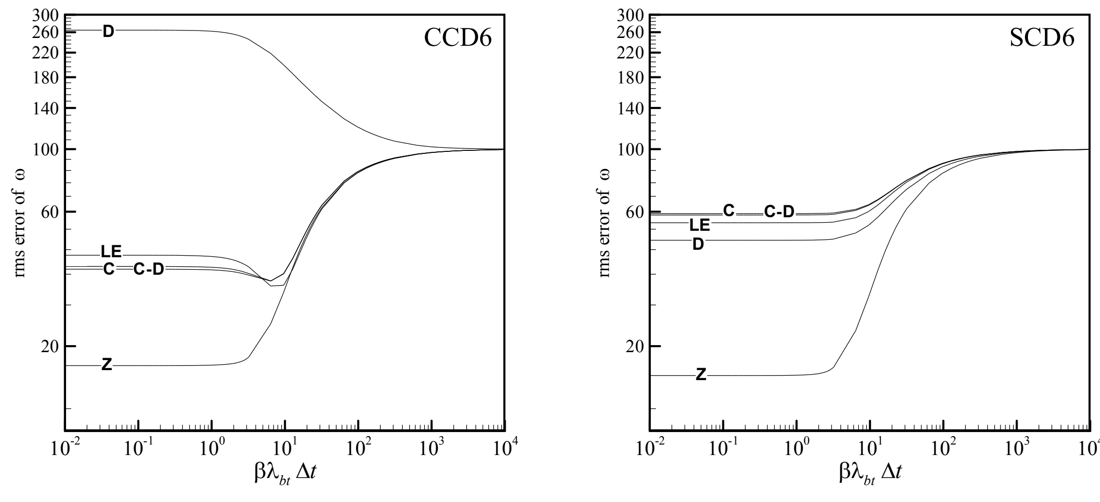
شکل ۱۲. مشابه شکل۱۱ ولی برای سرعت گروه امواج راسبی تک‌لایه‌ای.

آن‌گاه، پس از گسسته‌سازی و در نظر گرفتن جواب موجی‌شکل، شکل عمومی رابطه پاشندگی گسسته دولایه‌ای امواج راسبی در شبکه C-D نیز به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\frac{1}{\beta}\mathrm{T}_{\frac{1}{2}}(\omega)=\frac{\left(\left(\mu_{\pm}\mathrm{T}_{\circ}^{2}(\omega)-\varepsilon^{2}\lambda_{bt}^{2}\left(\mathrm{T}_{\frac{1}{2}}^{2}(k)+\mathrm{T}_{\frac{1}{2}}^{2}(l)\right)\right)\lambda_{bt}^{2}\mathrm{T}_{\circ}(k)\mathrm{T}_{\circ}(l)\mathrm{T}_{\frac{1}{2}}(k)\mathrm{R}_{\frac{1}{2}}(l)\mathrm{T}_{\circ}(\omega)\right)}{\left(\mathrm{T}_{\circ}^{4}(\omega)-\lambda_{bt}^{2}\left(\mathrm{T}_{\frac{1}{2}}^{2}(k)+\mathrm{T}_{\frac{1}{2}}^{2}(l)\right)\mathrm{T}_{\circ}^{2}(\omega)+\varepsilon^{2}\lambda_{bt}^{4}\left(\mathrm{T}_{\frac{1}{2}}^{2}(k)+\mathrm{T}_{\frac{1}{2}}^{2}(l)\right)^{2}\right)}. \qquad (۳۱)$$

تفاوت این رابطه با رابطه (۲۸) مربوط به شبکه LE تنها در عامل $\mathrm{T}_{\circ}(k)\mathrm{T}_{\circ}(l)$ در صورت کسر است.

برای ارزیابی عملکرد روش‌های SCD6 و CCD6، خطاهای کلی محاسبه بسامد و سرعت گروه امواج راسبی دولایه در شبکه C-D و LE محاسبه شد. جدول‌های ۱۰ و ۱۱، مقادیر این خطاهای کلی را در مُد کژفشار برای دو مقدار $\lambda_{bt}/d=0.5$ و $\lambda_{bt}/d=2$ به‌ازای $\beta\lambda_{bt}\Delta t=3.2$ نشان می‌دهند (نتایج در شبکه‌های دیگر نیز برای مقایسه داده شده است). در شبکه‌های C-D و LE، برای مسئله امواج راسبی دولایه نیز خطای روش‌های SCD6 و CCD6 در مُد کژفشار مشابه نتایج مدل تک‌لایه (معادل



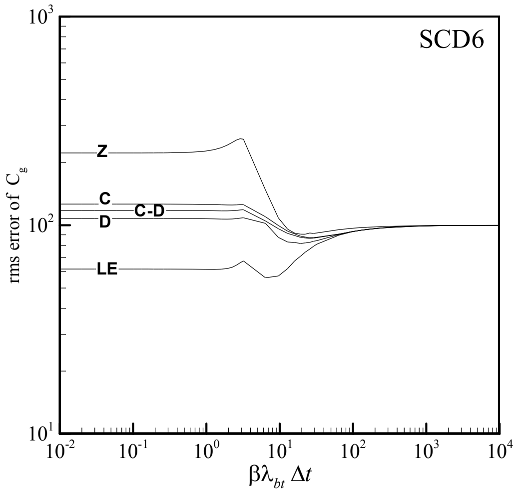
شکل ۱۳. منحنی خطای کلی روش‌های CCD6 و SCD6 برای بسامد امواج راسبی تک‌لایه‌ای در شبکه‌های گوناگون به‌ازای $\lambda_{bt}/d=1$ (برحسب درصد).

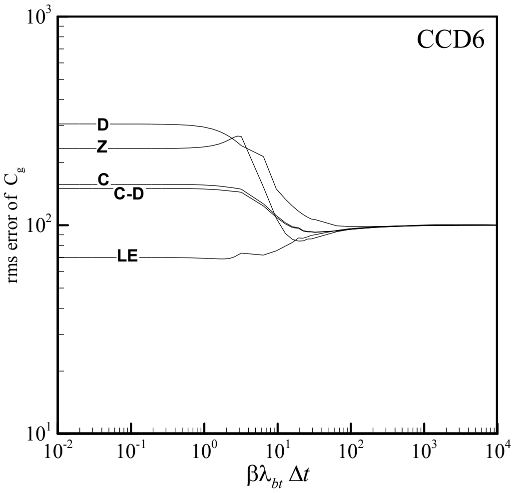
جدول ۱۰. خطای کلی روش‌های SCD6 و CCD6 برای بسامد امواج راسبی دولایه‌ای در مُد کژفشار به‌ازای $\beta\lambda_{bt}\Delta t=3.2$ (برحسب درصد).

	$\lambda_{bt}/d=0.5$				$\lambda_{bt}/d=2$			
	SCD6	**CCD6**	P_S	P_C	**SCD6**	**CCD6**	P_S	P_C
C	**54.385**	**59.012**	**8**	**-**	**57.517**	**40.041**	**-**	**30**
D	**45.834**	**316.305**	**86**	**-**	**47.118**	**269.349**	**83**	**-**
Z	**16.421**	**15.994**	**-**	**3**	**15.795**	**16.854**	**6**	**-**
LE	**55.263**	**43.775**	**-**	**21**	**54.891**	**42.193**	**-**	**23**
C-D	**59.742**	**38.125**	**-**	**36**	**59.220**	**37.625**	**-**	**36**

با مُد فشاورد در مدل دولایه) است به‌گونه‌ای‌که در محاسبه بسامد این امواج، روش CCD6 و در محاسبه سرعت گروه، روش SCD6 عملکرد بهتری دارد به‌جز در شبکه LE برای $\lambda_{bt}/d=2$ که دقت روش CCD6 برای محاسبه سرعت گروه امواج راسبی دولایه (با حدود ۲۰ درصد بهبود) بهتر از SCD6 است. همانند مدل تک‌لایه، کمترین خطای محاسبه بسامد امواج راسبی دولایه‌ای برای هر دو روش با عملکرد تقریباً یکسان، در شبکه Z روی می‌دهد و کمترین خطای محاسبه سرعت گروه این امواج مربوط به شبکه LE است.

شکل‌های ۱۵ و ۱۶، خطاهای کلی روش‌های SCD6 و CCD6 در محاسبه بسامد و سرعت گروه امواج راسبی دولایه‌ای را برای مُد کژفشار در شبکه‌های C-D و LE (و شبکه‌های آراکاوا C و D و شبکه Z به منظور مقایسه) برحسب λ_{bt}/d به‌ازای $\beta\lambda_{bt}\Delta t=3.2$ نشان می‌دهند. مطابق شکل، عملکرد روش‌های CCD6 و SCD6 برای محاسبه بسامد امواج راسبی دولایه‌ای در شبکه Z بهتر از شبکه‌های C-D و LE است ولی برای محاسبه سرعت گروه این امواج، این وضعیت برعکس است؛ به گونه‌ای که نتایج در شبکه C-D و به‌ویژه در شبکه LE بهتر از شبکه Z است. مشکل افزایش خطا در شبکه C برای λ_{bt}/dهای کوچک که در مُد کژفشار با شدت بیشتری همراه است، در شبکه C-D وجود ندارد و خطای کلی





شکل ۱۴. مشابه شکل۱۳ ولی برای سرعت گروه امواج راسبی تک‌لایه‌ای.

جدول ۱۱. مشابه جدول۱۰ ولی برای سرعت گروه امواج راسبی دولایه‌ای.

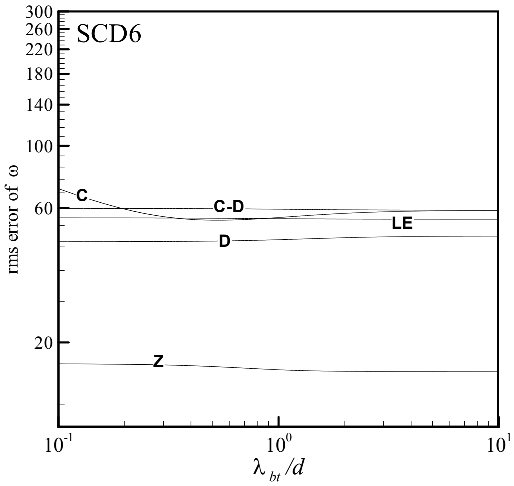
	$\lambda_{bt}/d=0.5$				$\lambda_{bt}/d=2$			
	SCD6	**CCD6**	P_S	P_C	**SCD6**	**CCD6**	P_S	P_C
C	**369.659**	**399.055**	**7**	**-**	**225.627**	**252.319**	**11**	**-**
D	**109.019**	**567.449**	**81**	**-**	**191.400**	**387.562**	**51**	**-**
Z	**120.419**	**125.636**	**4**	**-**	**346.837**	**377.345**	**8**	**-**
LE	**47.271**	**73.885**	**36**	**-**	**89.656**	**70.603**	**-**	**21**
C-D	**96.413**	**135.775**	**29**	**-**	**196.620**	**229.351**	**14**	**-**

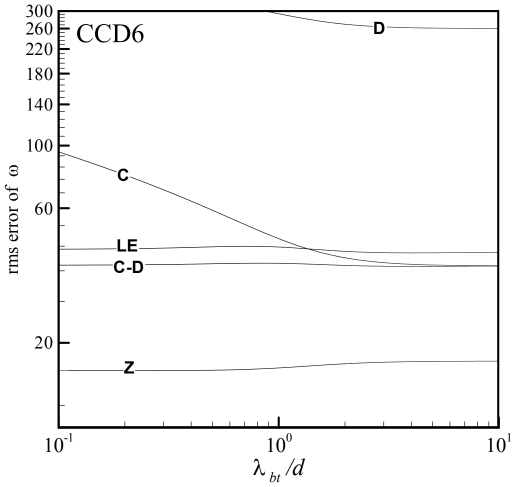
محاسبه بسامد امواج راسبی دولایه در شبکه C-D (همانند شبکه‌های LE و Z) به مقدار λ_{bt}/d حساس نیست. بااین‌حال در خطای کلی محاسبه سرعت گروه این امواج همانند مدل تک‌لایه، تقریباً در همه شبکه‌ها همچنان قله‌ای مشاهده می‌شود که شدت آن در شبکه LE (به‌شکل بارزتر برای روش CCD6) بسیار کمتر از شبکه‌های C-D و Z است. در بخش بعدی به علت بروز این قله می‌پردازیم.

شکل‌های ۱۷ و ۱۸، خطاهای کلی روش‌های SCD6 و CCD6 در محاسبه بسامد و سرعت گروه امواج راسبی دولایه‌ای را برای $\beta\lambda_{bt}\Delta t$های متفاوت، به‌ازای $\lambda_{bt}/d=1$ نشان می‌دهند. مشابه مدل تک‌لایه، در مدل دولایه نیز با افزایش گام زمانی، خطای کلی محاسبه بسامد امواج راسبی در همه شبکه‌ها به‌جز شبکه D (برای روش CCD6) افزایش پیدا می‌کند؛ درحالی‌که خطای کلی محاسبه سرعت گروه این امواج، در همه شبکه‌ها به‌جز شبکه LE کاهش می‌یابد. چه برای محاسبه بسامد و چه برای محاسبه سرعت گروه امواج راسبی، با افزایش گام زمانی، مقدار خطای کلی در همه شبکه‌ها به یک مقدار معین میل می‌کند. این مقدار به‌ازای $\lambda_{bt}/d=1$، در مدل دولایه مشابه مدل تک‌لایه، حدود ۱۰۰ درصد است.

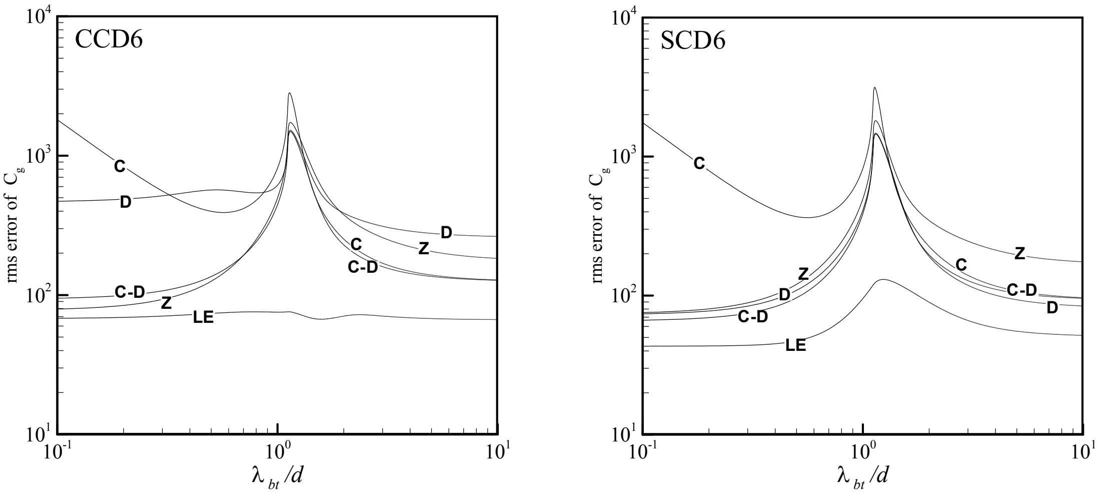
۶ قله خطا در مسئله امواج راسبی

قله‌ای که در منحنی‌های خطای کلی سرعت گروه امواج





شکل ۱۵. منحنی خطای کلی روش‌های CCD6 و SCD6 برای بسامد امواج راسبی دولایه‌ای در مُد کژفشار به‌ازای $\beta\lambda_{bt}\Delta t=3.2$ (برحسب درصد).

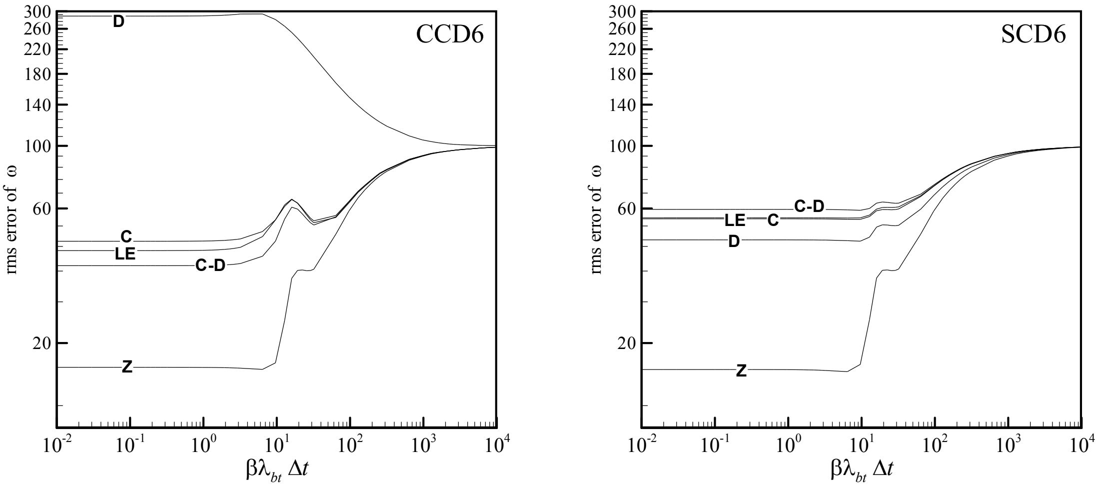


شکل ۱۶. مشابه شکل۱۵ ولی برای سرعت گروه امواج راسبی دولایه‌ای.

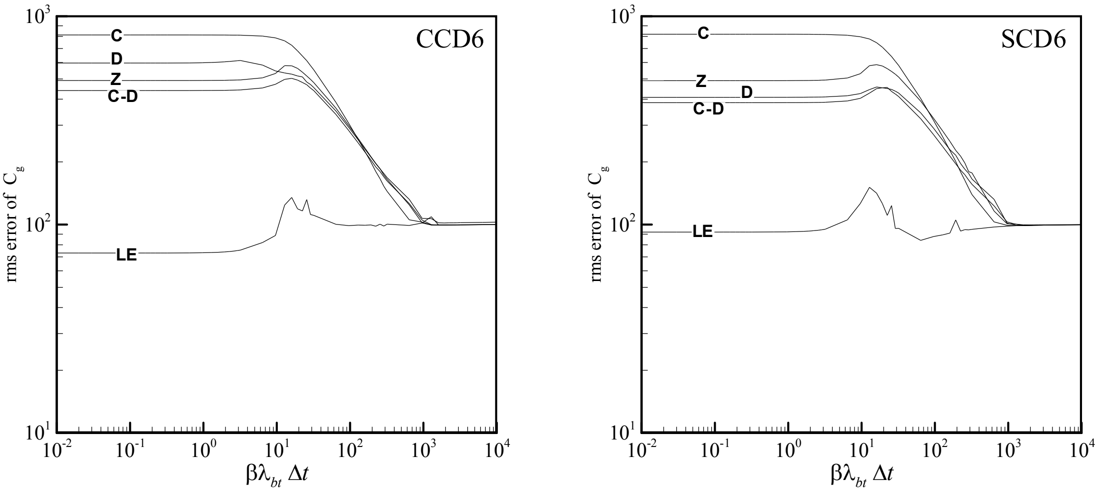
راسبی هم در مُد فشارورد و هم در مُد کژفشار مشاهده می‌شود، بیانگر حساسیت زیاد این خطا به مقدار λ_{bt}/d است. این قله که طبق تحقیق گلشاهی و همکاران (۲۰۱۱)، در مُد فشارورد (تقریباً معادل با مدل تک‌لایه) به‌ازای مقدار بحرانی $\lambda_{bt}/d \approx 0.34$ و در مُد کژفشار به‌ازای مقدار بحرانی $\lambda_{bt}/d \approx 1.14$ روی می‌دهد، تقریباً مستقل از نوع شبکه به کار گرفته شده است. طبق این تحقیق، سرعت گروه امواج راسبی به‌ازای یک λ_{bt}/d معین دارای یک کمینه است و در نتیجه در محاسبه خطای نسبی، مخرج کسر خیلی کوچک می‌شود و خطا به‌شدت افزایش می‌یابد.

برای بررسی جامع‌تر این قله، جواب دقیق سرعت گروه امواج راسبی تک‌لایه را واکاوی می‌کنیم. طبق رابطه پاشندگی امواج راسبی تک‌لایه - رابطه (۱۷) - جواب دقیق سرعت گروه امواج راسبی تک‌لایه به شکل زیر است:

$$C_{gexact} = \frac{\lambda_{bt}^2 \beta \left[\left(1+\lambda_{bt}^2 (k^2+l^2)\right)^2 - 4\lambda_{bt}^2 k^2 \right]^{\frac{1}{2}}}{\left(1+\lambda_{bt}^2 (k^2+l^2)\right)^2} \quad (۳۲)$$



شکل ۱۷. منحنی خطای کلی روش‌های CCD6 و SCD6 برای بسامد امواج راسبی دولایه‌ای در مُد کژفشار به‌ازای $\lambda_{bt}/d = 1$ (برحسب درصد).



شکل ۱۸. مشابه شکل۱۷ ولی برای سرعت گروه امواج راسبی دولایه‌ای.

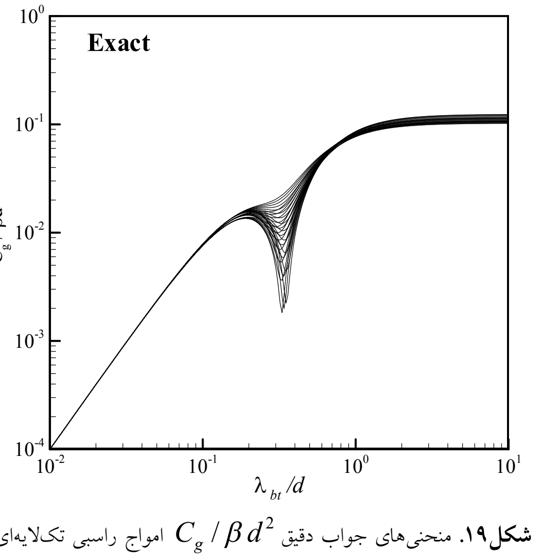
نقاط فرین این تابع از رابطه زیر به‌دست می‌آید:

$$\lambda_{bt}^2 = \frac{2\left(k^2+l^2\right) - 3l^2 \pm k\sqrt{k^2-8l^2}}{\left(k^2+l^2\right)\left(3k^2+l^2\right)} \, . \qquad (۳۳)$$

طبق این رابطه، تنها به‌ازای $k^2 \geq 8l^2$ سرعت گروه دارای فرین است. بنابراین، می‌توان با تقریب خوبی از l^2 در مقابل k^2 صرف‌نظر کرد. به‌این‌ترتیب، با در نظر گرفتن $l^2=0$، فرین سرعت گروه امواج راسبی تک‌لایه در $\lambda_{bt}^2 = \frac{2\pm1}{3k^2} = \frac{1}{k^2}, \frac{1}{3k^2}$ روی می‌دهد به گونه‌ای که در $\lambda_{bt}^2 = \frac{1}{k^2}$ (یعنی در $\lambda_{bt}/d = \frac{1}{kd}$)، سرعت گروه به صفر میل می‌کند. شکل ۱۹، جواب دقیق عبارت $C_g/\beta d^2$ امواج راسبی تک‌لایه را برحسب λ_{bt}/d و شکل ۲۰، خطای نسبی آن را برای روش CCD6 در شبکه‌های LE، C-D و Z به‌ازای برخی از kd و ldها نشان می‌دهد که در آن، خطای نسبی محاسبه بسامد امواج راسبی تک‌لایه برای گام‌های زمانی کوچک ($\Delta t \to 0$) محاسبه شده است. با توجه به اینکه، تابع‌های انتقال $\mathrm{T}(k)$ در kdهای بزرگ، خطای بیشتری دارند، بزرگ‌ترین قله‌ها به‌ازای $kd=\pi$ در حدود $\lambda_{bt}/d = \frac{1}{\pi} \approx 0.32$ ایجاد می‌شوند که به مقدار $\lambda_{bt}/d \approx 0.34$ خیلی نزدیک است.

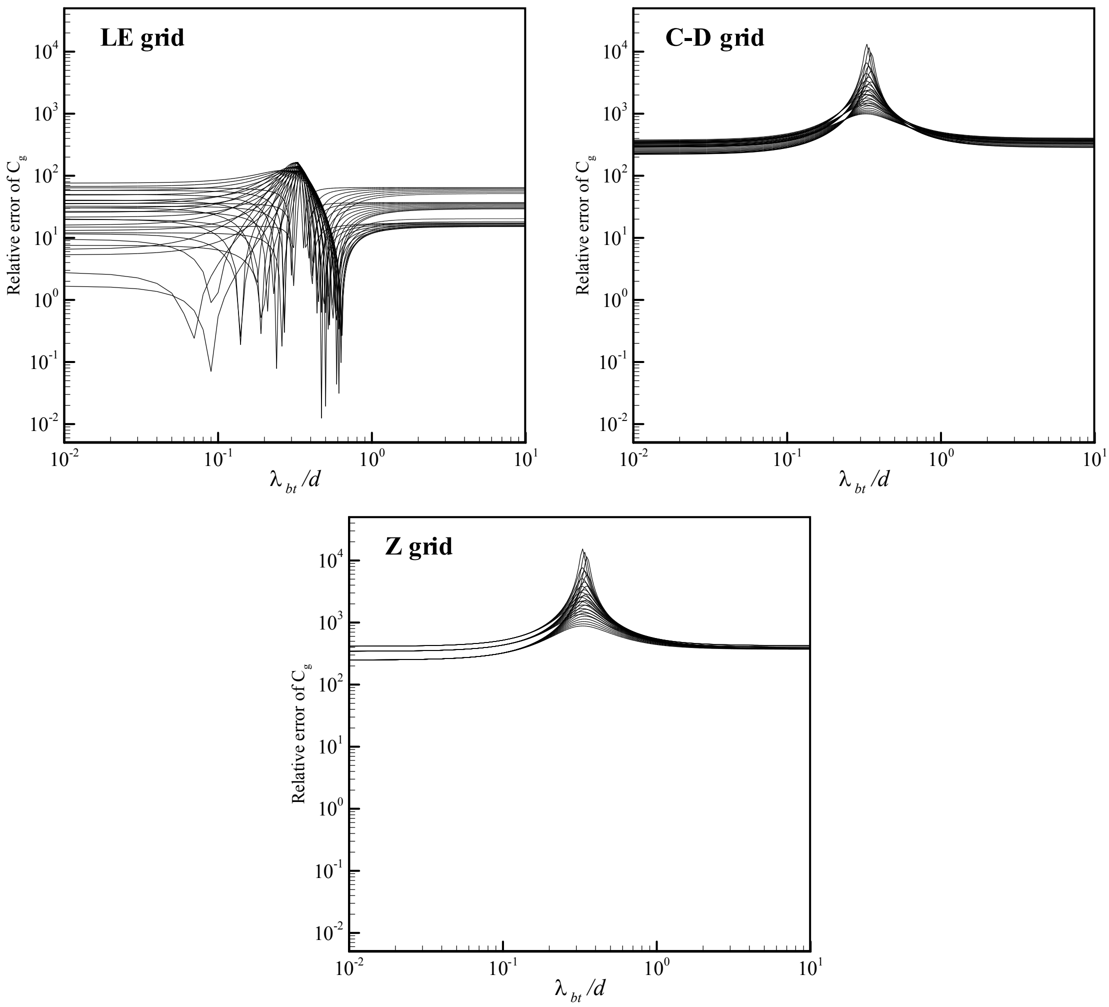
۷ نتیجه‌گیری

در این پژوهش، با استخراج شکل عمومی روابط پاشندگی گسسته تک‌لایه‌ای و دولایه‌ای امواج گرانی- لختی و امواج راسبی در شبکه‌های C-D و LE، دقت روش‌های اَبَرفشرده و فشرده ترکیبی مرتبه ششم در محاسبه بسامد و سرعت گروه این امواج مورد ارزیابی قرار گرفت. باید توجه داشت که شکل عمومی روابط پاشندگی گسسته امواج گرانی- لختی در شبکه‌های C-D



شکل۱۹. منحنی‌های جواب دقیق $C_g/\beta d^2$ امواج راسبی تک‌لایه‌ای برحسب λ_{bt}/d به‌ازای برخی kd و ldها.

و LE با هم برابرند ولی در مسئله امواج راسبی، این روابط یکسان نیستند. نتایج نشان می‌دهد که در مسئله امواج گرانی-لختی، اگرچه با افزایش گام زمانی، خطاهای کلی روش CCD6 روند افزایشی بیشتری نسبت به روش SCD6 دارند، اما در گام‌های زمانی کوچک، هم در محاسبه بسامد و هم در محاسبه سرعت گروه این امواج، روش CCD6 در شبکه‌های C-D و LE (همانند شبکه Z) نسبت به روش SCD6 برتری دارد. به‌علاوه، دقت روش CCD6 در شبکه‌های C-D و LE کمی بهتر از شبکه Z است. این مسئله بیانگر قابلیت زیاد روشCCD6 در این شبکه‌ها برای مسئله امواج گرانی-لختی است. برای مسئله امواج راسبی، در هر دو روش CCD6 و SCD6 با افزایش گام زمانی، خطای کلی محاسبه بسامد در شبکه‌های C-D و LE افزایش پیدا می‌کند ولی خطای کلی محاسبه سرعت گروه، در شبکه C-D کاهش و در شبکه LE افزایش می‌یابد. به‌علاوه، دقت روش CCD6 در محاسبه بسامد امواج راسبی، هم در شبکه C-D و هم در شبکه LE بهتر از روش SCD6 است اما در محاسبه سرعت گروه این امواج، عملکرد روش SCD6 کمی بهتر است. بنابراین در مجموع، برای مسئله امواج راسبی نمی‌توان یکی از این دو



شکل ۲۰. منحنی‌های خطای نسبی محاسبه سرعت گروه امواج راسبی تک‌لایه برحسب λ_{bt}/d به‌ازای kd و ldهای شکل ۱۹ و $\Delta t \to 0$، برای روش CCD6 در شبکه‌های C-D، LE و Z (برحسب درصد).

روش را بهتر از دیگری معرفی کرد. برای هر دو روش SCD6 و CCD6، خطای محاسبه بسامد امواج راسبی در شبکه Z به مراتب کمتر از شبکه C-D است به گونه‌ای که کمترین خطای محاسبه بسامد این امواج در شبکه Z روی می‌دهد. این در حالی است که کمترین خطا در محاسبه سرعت گروه این امواج در شبکه LE مشاهده می‌شود. به‌طورکلی، هم برای امواج گرانی- لختی و هم برای امواج راسبی، نتایج نشان می‌دهد که با تغییر شبکه از آراکاوا C به شبکه C-D نه‌تنها خطا در λ_{bt}/d های کوچک کاهش یافته، بلکه رفتار مطلوب شبکه C در λ_{bt}/d های بزرگ نیز حفظ شده است.

از دیگر مواردی که در این پژوهش به آن پرداخته شد، قله‌ای است که در خطای کلی محاسبه سرعت گروه امواج راسبی مشاهده می‌شود. این قله بیانگر حساسیت زیاد خطای سرعت گروه امواج راسبی به مقدار λ_{bt}/d است. در بررسی صورت گرفته روی سرعت گروه امواج راسبی تک‌لایه، مشخص شد که در برخی از طول موج‌ها جواب دقیق سرعت گروه این امواج به صفر میل می‌کند که به خطای نسبی بزرگ‌تر و ایجاد قله در منحنی خطای کلی محاسبه سرعت گروه امواج راسبی منجر می‌شود.

نتایج این پژوهش، با استفاده از مدل‌های آب کم‌عمق تک‌لایه و دولایه خطی شده برای مسئله امواج گرانی- لختی و راسبی به‌دست آمده است و استفاده از شبکه C-D برای شکل پیچیده‌تر و غیرخطی معادلات آب کم‌عمق، موضوعی است که باید به آن پرداخته شود.

تشکر و قدردانی

نویسندگان مقاله از دانشگاه آزاد اسلامی واحد شوشتر به خاطر حمایت از این کار تشکر می‌کنند.

منابع

اصفهانیان، و. و قادر، س.، ۱۳۸۶، بررسی دقت روش‌های فشرده و اَبَرفشرده در گسسته‌سازی مکانی معادلات آب کم‌عمق خطی شده: مجله فیزیک زمین و فضا، **۳۳** (۱)، ۱۰۷-۱۱۸.

قادر، س.، احمدی‌گیوی، ف. و گلشاهی، ح.، ۱۳۸۹، مقایسه عملکرد روش‌های اَبَرفشرده و فشرده ترکیبی مرتبه ششم در گسسته‌سازی مکانی مدل آب کم‌عمق دولایه‌ای: نمایش امواج گرانی- لختی و راسبی خطی: مجله ژئوفیزیک ایران، **۴**(۲)، ۴۹-۶۹.

Adcroft, A. J., Hill, C. N., and Marshal, J. C., 1999, A new treatment of the Coriolis terms in C-grid models at both high and low resolutions: Mon. Wea. Rev., **127**, 1928-1936.

Arakawa, A., and Lamb, V. R., 1977, Computational design of the basic dynamical processes of the UCLA general circulation model: Methods of Computational Physics, **17**, 173-265.

Blayo, E., 2000, Compact finite difference schemes for ocean models: 1. Ocean waves: Journal of Computational Physics, **164**, 241–257.

Cantha, L. H., and Clayson, C. A., 2000, Numerical Models of Oceans and Oceanic Processes: Academic Press.

Castro, M. J., Garcia-Rodriguez, J. A., Gonzalez-Vida, J. M., Macias, J., and Pares, C., 2007, Improved FVM for two-layer shallow-water models: Application to the strait of Gibraltar: Advances in Engineering Softwares, **38**, 386-398.

Chu, P. C., and Fan, C., 1998, A three-point combined compact difference scheme: Journal of Computational Physics, **140**, 370–399.

Chu, P. C., and Fan, C., 2000, A three-point sixth-order staggered combined compact difference scheme: Mathematical and Computer Modeling, **32**, 323-340.

Dobricic, S., 2006, An improved calculation of Coriolis terms on the C grid: Mon. Wea. Rev., **134**, 3764–3773.

Dukowicz, J. K., 1995, Mesh effects for Rossby waves: Journal of Computational Physics, **119**, 188-194.

Esfahanian, V., Ghader, S., and Mohebalhojeh, A. R., 2005, On the use of super compact scheme for spatial differencing in numerical models of

China Ser. D, **48**(9), 1559-1568

Ma, Y., and Fu, D., 1996, Super compact finite difference method (SCFDM) with arbitrary high accuracy: Computation Fluid Dynamics Journal, **5**, 259-276.

Mohebalhojeh, A. R., and Dritschel, D. G., 2007, Assessing the numerical accuracy of complex spherical shallow-water flows: Mon. Wea. Rev., **135**, 3876-3894.

Nechaev, D., and Yaremchuk, M., 2004, On the approximation of the Coriolis terms in C-grid models: Mon. Wea. Rev., **132**, 2283-2289.

Neta, B., and Williams, R. T., 1989, Rossby wave frequencies and group velocities for finite element and finite difference approximations to the vorticity-divergence and the primitive forms of the shallow water equations: Mon. Wea. Rev., **117**, 1439–1457.

Park, N., Yoo, J. Y., and Choi, H., 2004, Discretization errors in large eddy simulation: on the suitability of centered and upwind-biased compact difference schemes: Journal of Computational Physics, **198**, 580-616.

Randall, D. A., 1994, Geostrophic adjustment and the finite-difference shallow-water equations: Mon. Wea. Rev., **122**, 1371-1377.

Rizzetta, D. P., Visbal, M. R., and Morgan, P. E., 2008, A high-order compact finite-difference scheme for large-eddy simulation of active flow control: Progress in Aerospace Sciences, **44**, 397-426.

Skamarock, W. C., 2008, A linear analysis of the NCAR CCSM finite-volume dynamical core: Mon. Wea. Rev., **136**, 2112-2119.

Smith, R. D., Boudra, D. B., and Bleck, R., 1990, A wind-driven isopycnal coordinate model of the north and equatorial Atlantic Ocean: The Atlantic-basin experiments: J. Geophys. Res., **95**, 13 105–13 128.

Wajsowicz, R. C., 1986, Free planetary waves in finite-difference numerical models: J. Phys. Oceanogr., **16**, 773–789.

the atmosphere: Q. J. Roy. Meteorol. Soc., **131**, 2109-2130.

Ghader, S., and Esfahanian, V., 2006, Generalized combined compact differencing method: WSEAS Transactions on Fluid Mechanics, **1**(5), 445-449.

Ghader, S., Mohebalhojeh, A. R., and Esfahanian, V., 2009, On the spectral convergence of the supercompact finite-difference schemes for the f-plane shallow-water equations: Mon. Wea. Rev., **137**, 2393-2406.

Ghader, S., Ghasemi, A., Banazadeh, M. R., and Mansoury, D., 2012, High-order compact scheme for Boussinesq equations: Implementation and numerical boundary condition issue: International Journal for Numerical Methods in Fluids, **69**(3), 590-605.

Gill, A. E., 1982, Atmosphere–Ocean Dynamics: Academic Press.

Golshahy, H., Ghader, S., and Ahmadi-Givi, F., 2011, Accuracy assessment of the super compact and combined compact schemes for spatial differencing of a two-layer oceanic model: Presentation of linear inertia-gravity and Rossby waves: Ocean Modelling, **37**, 49-63.

Haidvogel, D. B., and Beckmann, A., 1999, Numerical Ocean Circulation Modeling: Imperial College Press.

Hirsh, R. S., 1975, Higher order accurate difference solutions of fluid mechanics problems by a compact differencing technique: Journal of Computational Physics, **19**, 90-109.

Lele, S. k., 1992, Compact finite difference schemes with spectral-like resolution: Journal of Computational Physics, **103**, 16-42.

Lin, S. J., and Rood, R. B., 1997, An explicit flux-form semi-Lagrangian shallow-water model on the sphere: Q. J. Roy. Meteorol. Soc., **123** (544), 2477-2498.

Liu, Y. D., 2005, Computational properties of a new horizontal staggered grid: Science in