

## عرضه رهیافتی جدید برای تعیین مولفه‌های انحراف قائم با استفاده از تصویربرداری سمت‌الرأسی از ستارگان

عباس عابدینی\* و سعید فرزانه

گروه مهندسی نقشه‌برداری، پردیس دانشکده‌های فنی دانشگاه تهران، ایران

(تاریخ دریافت: ۱۳۹۱/۸/۱، تاریخ پذیرش: ۱۳۹۳/۸/۲۵)

### چکیده

شبکه‌های انحراف قائم در محاسبات ژئودزی فیزیکی و محاسبه ژئوئید بسیار پراهمیت هستند. یکی از روش‌های تعیین مولفه‌های انحراف قائم ( $\eta, \zeta$ ) مقایسه مختصات نجومی و ژئودتیک است. در قرن اخیر با پیشرفت‌های صورت گرفته قادر به تعیین مختصات ژئودتیک با استفاده از مشاهدات GPS با دقت بسیار زیاد هستیم. همچنین با به‌کارگیری روش‌های الکترواپتیکی نجوم ژئودتیک، تغییرات اساسی در روش‌های کلاسیک نجوم ژئودتیک در تعیین مختصات نجومی به وقوع پیوسته است. هدف از این مقاله عرضه یک روش خودکار و دقیق برای تعیین مختصات نجومی و در نهایت مولفه‌های انحراف قائم است. امروزه با در اختیار قرار گرفتن دوربین‌های رقمی با دقت هندسی و تابش‌سنجی زیاد، فصل جدیدی در به‌کارگیری نجوم ژئودتیک در کاربردهای گوناگونی نظیر تعیین وضعیت ماهواره، مختصات نجومی و مولفه‌های انحراف قائم، با عنوان نجوم ژئودتیک بینایی‌منا گشوده شده است. چنانچه از ستارگان در راستای سمت‌الرأس (زنیت) تصویربرداری شود، می‌توان مختصات نجومی محل را با دقتی بهتر از ۰/۰۱ ثانیه تعیین کرد. با تعیین مختصات نجومی و مشاهده مختصات ژئودتیک می‌توان مولفه‌های انحراف قائم را تعیین کرد. در این مقاله پس از تشریح اصول روش پیشنهادی، آن را روی تصویر اخذ شده از یک ایستگاه آزمایش می‌کنیم. نتایج حاصل دستیابی به مولفه‌های انحراف قائم با دقت بسیار زیاد را نشان می‌دهد.

**واژه‌های کلیدی:** دوربین سمت‌الرأسی رقمی، طول و عرض نجومی، مولفه‌های انحراف قائم، تصویربرداری سمت‌الرأسی، نظریه حرکت موقت، SIFT

## New approach for vertical deflection determination using digital Zenith cameras

Abbas Abedini\* and Saeed Farzaneh

Department of Surveying and Geomatics Engineering, Faculty of Engineering, University of Tehran, Iran

(Received: 22 October 2012, accepted: 16 November 2014)

\*Corresponding author:

abedeni@ut.ac.ir

\*نگارنده رابط:

## Summary

Celestial positioning has been used for navigation purposes for many years. Stars as the extra-terrestrial benchmarks provide a unique opportunity in absolute point positioning. However, astronomical field data acquisition and data processing of the collected data is very time consuming. The advent of the Global Positioning System (GPS) has nearly made the celestial positioning system obsolete. The new satellite-based positioning system has been very popular since it is quite efficient and convenient for many daily life applications. Several years ago, the determination of vertical deflections (the angle between the true zenith (plumb line) and the line perpendicular to the surface of the reference ellipsoid) often required 2-3 h or even more, using conventional astrogeodetic instrumentation such as analogue zenith cameras or astrolabes. The invention of the electro-optical devices at the beginning of the 21st century was really a rebirth in geodetic astronomy. Today, digital cameras with relatively high geometric and radiometric accuracy have opened a new insight into satellite attitude determination and the study of the Earth's surface geometry and physics of its interior, i.e. computation of astronomical coordinates and the vertical deflection components. The Digital Zenith Camera System consists of a zenith camera equipped with a CCD imaging sensor, which is used for the determination of astronomical latitude,  $\Phi$ , (the angle between the plane of the earth's equator and the plumb line (direction of gravity) at a given point on the earth's surface) and longitude,  $\Lambda$ , (the angular distance of a point on the celestial sphere from the great circle perpendicular to the ecliptic at the point of the vernal equinox, measured through  $360^\circ$  eastward parallel to the ecliptic). By means of the positions of stars on the celestial sphere which are defined by equatorial coordinates  $(\alpha, \delta)$ . The equatorial coordinates can be linked to the astronomical parameters by GAST (Greenwich Apparent Siderial Time):

$$\Phi = \delta_z$$

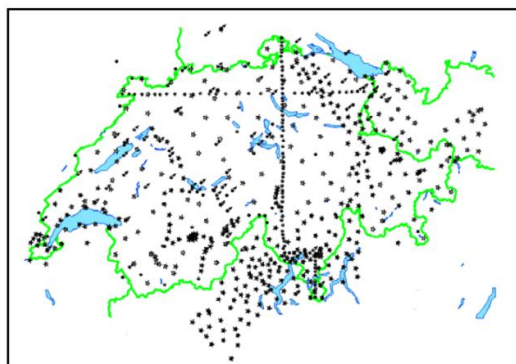
$$\Lambda = \alpha_z - GAST,$$

The second component is a GPS receiver which is used for time tagging of the exposure epochs as well as for determining geodetic latitude and longitude  $(\varphi, \lambda)$  of the camera. Vertical deflections at the surface can be obtained by combining both components:

$$\xi = \phi - \varphi, \quad \eta = (\Lambda - \lambda) \cos \varphi,$$

In the automatic star detection, high precision and reliable in the extraction of the star centers from the captured images and relating them to the astronomical coordinates is the most important point. In this study, the star's centers were extracted by an advanced image processing technique with sub-pixel precision. Relating the parameters of the presented technique to the star's Mag was one of its exclusive properties. Using the theory of coherent motion, the corresponding stars were detected first, and the outliers were removed by the MSAC algorithm afterwards. The suggested method was applied to the images taken by a TZK2-D camera which consisted of two major components: A zenith camera equipped with a CCD was used for the determination of the plumb line and a GPS-receiver for precisetiming and measurement of the ellipsoidal coordinates. Validations showed that the adopted approach in this study is highly capable of yielding reliable results.

**Keywords:** Digital Zenith cameras, astronomical latitude and longitude, vertical deflection, coherent motion theory, SIFT



شکل ۱. شبکه ملی انحراف قائم مربوط به کشور سوئیس.

با مقایسه روش‌های گرانی‌سنجی و نجوم ژئودتیک (انحراف‌های قائم) برای محاسبه ژئوئید، ارزش هر ایستگاه انحراف قائم را ۲۰-۳۰ برابر یک ایستگاه گرانی دانسته‌اند (ولاریک، ۲۰۱۳). محاسبات مربوط به انحراف‌های قائم در تعیین ژئوئید بسیار مطمئن و سراسر است؛ برخلاف روش گرانی‌سنجی که نیاز به اطلاعات ارتفاعی رقومی و اطلاعات گرانی‌سنجی کل دنیا است و پیچیدگی‌های زیادی دارد. تنها مشکل روش انحراف قائم در تعیین ژئوئید، کندی تکثیر ایستگاه‌های انحراف قائم است. طی چند سال اخیر این مشکل برطرف شده است. با استفاده از دوربین رقمی سمت‌الرأسی در عرض کمتر از نیم‌ساعت یک ایستگاه انحراف قائم با دقت ۰.۱-۰.۰۰۵ ثانیه قوسی به‌صورت تمام خودکار و بدون نیاز به عامل فنی مجرب قابل ایجاد است. اساس این روش در شکل ۲ نمایش داده شده است. در ایران ۱۶ نقطه انحراف قائم (نقاط لاپلاس) وجود دارد که در مقایسه با سایر کشورها بسیار ناچیز است و نیاز به گسترش این شبکه به شدت احساس می‌شود.

## ۱ مقدمه

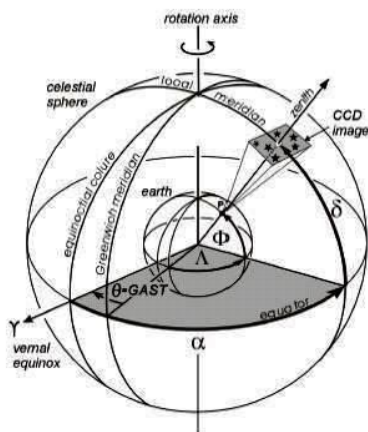
تعیین دقیق میدان گرانی زمین برای همه دانش‌های وابسته به زمین مفید خواهد بود. در میان این دانش‌ها، ژئودزی به برآورد دقیقی از میدان گرانی در مقیاس محلی (برای کاربردهای مهندسی) و جهانی (برای کاربردهای مدار) نیاز دارد. شبکه‌های انحراف قائم در محاسبات ژئودزی فیزیکی و محاسبه ژئوئید بسیار پراهمیت هستند. این شبکه‌ها مشکل محاسبه ژئوئید به روش گرانی‌سنجی در مناطق صعب‌العبور (کوهستانی، کویر) و همچنین در حاشیه مرزها را به شکل مطلوبی رفع می‌کنند.

همان‌طور که می‌دانیم، داده‌های نجوم ژئودتیک ترکیب شده با داده‌های گرانی‌سنجی روش بهینه برای تعیین ژئوئید است. همچنین در اراضی مسطح، عمدتاً از روش‌های گرانی‌سنجی در تعیین ژئوئید بهره می‌جویند که زمان مشاهدات در این روش بسیار کم است. با این حال برای رسیدن به دقت زیاد، نیاز به ۲۰۰-۵۰۰ نقطه در هر ۱۰۰۰ کیلومتر مربع هست، درحالی‌که در روش نجوم ژئودتیک برای رسیدن به همان دقت موردنظر، فقط نیاز به ۱۰-۲۰ نقطه با زوایای انحراف معلوم است.

ایجاد شبکه‌های انحراف قائم بیش از ۱۰۰ سال در دنیا سابقه دارد و از دیرباز هدف اصلی از این شبکه‌ها، محاسبات مربوط به شبکه‌های مسطحاتی کلاسیک و تعیین ژئوئید بوده است. از شبکه‌های انحراف قائم با تراکم حدود ۵۰ کیلومتر، به همراه شبکه‌های گرانی برای محاسبات ژئوئید دقیق استفاده می‌شود. در کشورهای امریکا و کانادا، هزاران ایستگاه مربوط به شبکه انحراف قائم اندازه‌گیری شده است. در کشور کوچک سوئیس، با مساحت کمتر از ۲۰۰×۳۰۰ کیلومتر مربع، حدود ۷۰۰ ایستگاه انحراف قائم ایجاد شده است و فقط از روی همین اطلاعات یک ژئوئید دقیق با دقت ۲-۴ سانتی‌متر محاسبه شده است (شکل ۱).

## ۲ روش تحقیق

اولین قدم در تعیین مولفه های انحراف قائم، تعیین مختصات نجومی ایستگاه تصویربرداری است. شکل ۳ اصول پایه تعیین مختصات نجومی را به روش تصویربرداری سمت الرأسی از ستارگان نشان می دهد. همان طور که می دانیم عرض نجومی ( $\Phi$ )، زاویه بین قائم محل و صفحه استوا است که در صفحه نصف النهار نجومی از ۰ تا ۹۰ درجه در جهت خلاف عقربه های ساعت اندازه گیری می شود. این زاویه براساس اندازه گیری مستقیم فاصله سمت الرأسی z در لحظه ای که ستاره در حال عبور از نصف النهار است تعیین می شود و یا به طور غیرمستقیم، با تبدیل فاصله سمت الرأسی اندازه گیری شده ستاره به نصف النهار در حالتی که نزدیک نصف النهار است، صورت می پذیرد.

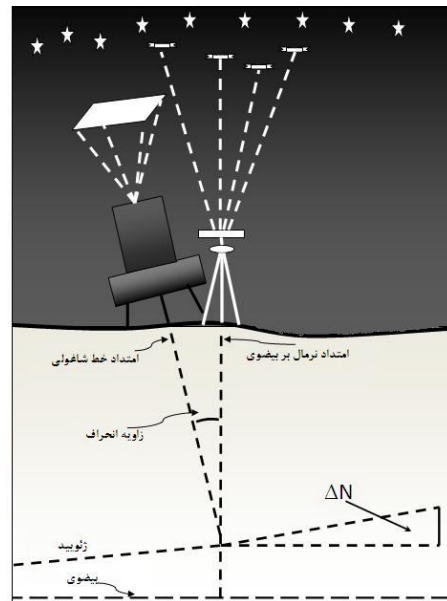


شکل ۳. اصول پایه تعیین مختصات نجومی (هیرت و ریس، ۲۰۰۴).

طول نجومی نیز، زاویه بین صفحه نصف النهار متوسط گرینویچ و صفحه نصف النهار نجومی محل ناظر است و براساس رابطه زیر تعیین می شود:

$$\Lambda = LAST - GAST, \quad (1)$$

که  $LAST$  (Local Apparent Sideral Time) زمان نجومی ظاهری محل است که با مشاهدات نجومی تعیین می شود و  $GAST$  زمان نجوم ظاهری گرینویچ است که با



شکل ۲. تعیین زاویه انحراف قائم با استفاده از یک دوربین رقمی و GPS.

در ابتدای قرن بیست و یکم تغییرات اساسی در نجوم ژئودتیک با به کارگیری روش های الکترواپتیکی نجوم ژئودتیک به وقوع پیوست، به طوری که روشی با کارایی بالا، خودکار و قابلیت آنی تحلیل داده ها به دست آمد (مولر و همکاران، ۲۰۰۴). با این روش می توان مختصات نجومی و در نتیجه مولفه های انحراف قائم را با دقت بهتر از ۰/۰۱ ثانیه تعیین کرد (هیرت و همکاران، ۲۰۱۰).

نورسنجی با CCD روش نوینی است که امروزه به طور گسترده در دانش های گوناگون، از جمله اندازه گیری های نجومی مورد استفاده قرار گرفته است. با استفاده از CCD و به کارگیری یک تلسکوپ مناسب می توان روشی با قابلیت رویت پذیری زیاد برای ثبت ستارگان با درخشندگی کم که حتی با تلسکوپ عادی غیرقابل دیدن هستند به وجود آورد. (نورسنجی فرایندی است که در آن مقدار درخشش ستارگان را اندازه گیری می کنند. به عبارت دیگر این روش شمارش و اندازه گیری تعداد فوتون های کسب شده از ستاره در یک تصویر CCD است).

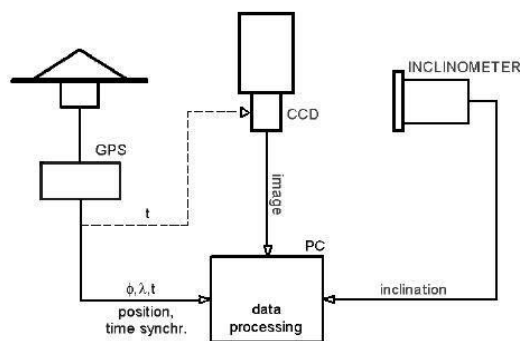
ثبت شده باشد، می‌توان مولفه‌های انحراف قائم را از رابطه زیر تعیین کرد (سالر و همکاران، ۲۰۱۳):

$$\xi = \phi - \varphi, \quad \eta = (\Lambda - \lambda) \cos \varphi, \quad (3)$$

مراحل تعیین خودکار مولفه‌های انحراف قائم با استفاده از الگوریتم پیشنهادی را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

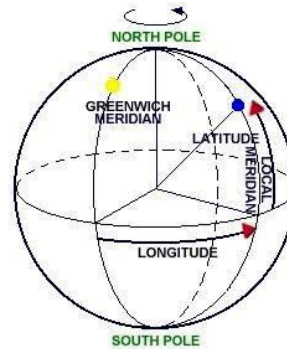
- ۱- تصویربرداری با استفاده از CCD
- ۲- اندازه‌گیری دقیق انحراف محور قائم دستگاه
- ۳- استخراج دقیق مراکز ستارگان
- ۴- تشخیص و اندازه‌گیری ستارگان
- ۵- تعیین بهترین مدل ریاضی بین مختصات پیکسلی و آسمانی ستارگان
- ۶- تعیین بُعد و میل ستاره فرضی در نقطه سمت‌الرأس
- ۷- اندازه‌گیری مختصات ژئودتیکی ایستگاه تصویربرداری

تصویربرداری و اندازه‌گیری انحراف محور قائم شکل ۶ نمودار تابعی دستگاه را نشان می‌دهد. گیرنده GPS به منظور تعیین مختصات ژئودتیکی و ثبت دقیق زمان، مورد استفاده قرار می‌گیرد. اطلاعات به دست آمده از GPS به صورت مستقیم به رایانه فرستاده و در آنجا ذخیره می‌شود. زمان رایانه با سیگنال ۱ PPS با گیرنده GPS هم‌زمان شده است.



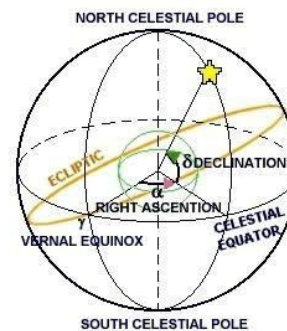
شکل ۶. نمودار جمع‌آوری اطلاعات (کادریس، ۲۰۰۷).

هم‌زمان ساختن زمان‌سنج مورد استفاده با علائم زمانی دریافت شده از گیرنده رادیویی تعیین می‌شود (شکل ۴).



شکل ۴. طول و عرض نجومی (هوجبرگ، ۲۰۰۸).

مختصات ستارگان مورد استفاده در فهرست‌نامه‌ها با دو کمیت بُعد (زاویه بین دایره ساعتی گذرنده از نقطه اعتدال بهاری و دایره ساعتی گذرنده از ستاره) و میل (زاویه بین امتداد ستاره و صفحه استوای آسمانی) بیان می‌شود (شکل ۵).



شکل ۵. بُعد و میل ستاره (هوجبرگ، ۲۰۰۸).

با توجه به شکل ۳ رابطه اساسی در تعیین مختصات نجومی با استفاده از الگوریتم پیشنهادی رابطه زیر بیان می‌شود:

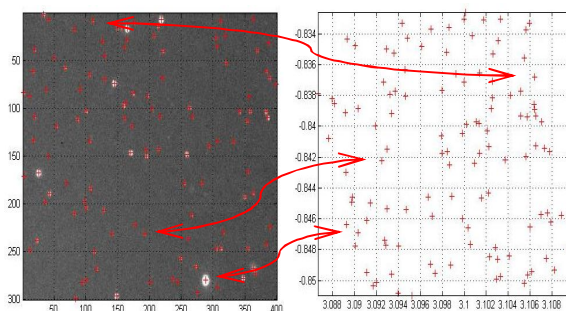
$$\Phi = \delta_z \quad (2)$$

به طوری که LAST در تصویربرداری سمت‌الرأس برابر بُعد نقطه سمت‌الرأس است. پس از تعیین مختصات نجومی در صورتی که مختصات ژئودتیکی دوربین با GPS

با استفاده از الگوریتم پیشنهادی شریفی و همکاران، مراکز ستارگان با دقت زیرپیکسل استخراج می‌شود. نمودار گردش استخراج مراکز ستارگان با استفاده از الگوریتم پیش گفته در شکل ۸ نشان داده شده است.

## ۲-۲ تشخیص و اندازه‌گیری ستارگان

پس از این مرحله بایستی ستارگان متناظر با ستارگان استخراج شده از تصویر را در فهرست‌نامه شناسایی کرد. به عبارت دیگر، هدف منطبق کردن ستارگان در دستگاه مختصات پیکسلی و بُعدی است.



شکل ۹. تشخیص و اندازه‌گیری ستارگان، هدف از این مرحله یافتن ستارگان متناظر بین تصویر (سمت چپ) و فهرست‌نامه (سمت راست) است.

شکل ۹ نمونه‌ای از تصویر ستارگان به همراه فهرست‌نامه را نشان می‌دهد. به منظور نیل به هدف پیش گفته، از الگوریتم پیشنهادی شریفی و همکاران استفاده می‌شود. نمودار گردش شناسایی و اندازه‌گیری ستارگان در شکل ۱۰ آورده شده است.

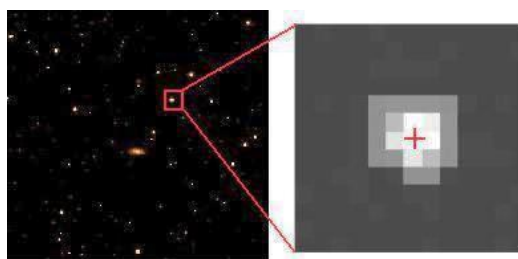
## ۲-۳ تعیین مدل ریاضی

پس از مراحل فوق موقعیت ستارگان در دستگاه مختصات بُعدی  $(\alpha, \delta)$  و دستگاه مختصات پیکسلی موجود است. چون مختصات صفحه تصویر  $(x, y)$  از ستارگان استخراج شده را نمی‌توان به‌طور مستقیم به مختصات بُعدی  $(\alpha, \delta)$  که از فهرست‌نامه استخراج شده ارتباط

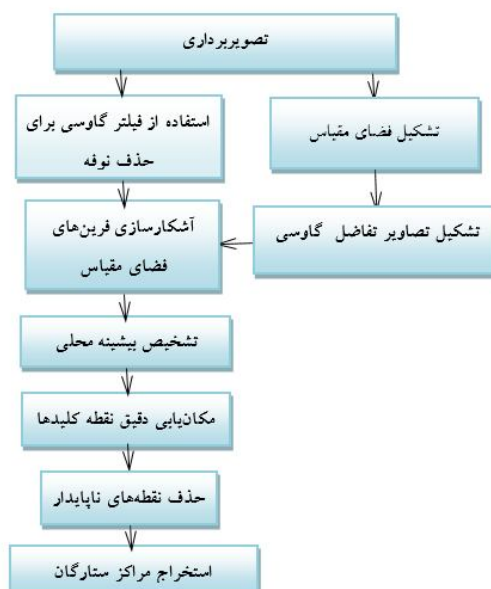
حس گر CCD تصاویری از ستارگان در امتداد سمت‌الرأس محل تهیه کرده و هم‌زمان میل‌سنج دستگاه، زاویه میل محور چرخش دستگاه را حول محور قائم به‌طور پیوسته اندازه‌گیری می‌کند. این مشاهدات به همراه زمان، در رایانه ثبت می‌شود (تیان و همکاران، ۲۰۱۴).

## ۲-۱ استخراج دقیق مراکز ستارگان

پس از تصویربرداری از ستارگان بایستی مراکز ستارگان را با دقت بسیار بالایی استخراج کرد. به عبارت دیگر هدف از این مرحله یافتن مختصات ستارگان در دستگاه مختصات پیکسلی است (علامت به‌علاوه در شکل ۷).



شکل ۷. توزیع شدت پیرامون ستاره تصویر شده روی آشکارساز.



شکل ۸. نمودار گردش استخراج مراکز ستارگان.

روابط فوق در صورت وجود فرض‌های زیر برقرار است:  
الف) محور نوری تلسکوپ از مبدا مختصات روی صفحه عکاسی می‌گذرد.

ب) صفحه عکاسی بر محور نوری عمود است.

ج) محور  $\eta'$  با تصویر دایره نصف‌النهار مرکزی، برای اپک  $t$  روی صفحه مماس دقیقاً یکی است.

د) محور  $\eta'$  بر محور  $\xi'$  عمود است.

در عمل رسیدن به این وضع بدون داشتن نقص هندسی، امکان‌پذیر نیست و در نتیجه باید انتظار داشت که مختصات تصویر ستاره، که نسبت به محورهای روی صفحه تصویر اندازه گرفته می‌شود، با مختصات استاندارد نظری تفاوت داشته باشد. علاوه بر آن از اثر شکست و از اثر ابیراهی چشم‌پوشی شده است؛ در حالی که موقعیت تصویر ستاره در اثر این پدیده‌ها با موقعیت واقعی آن متفاوت خواهد بود.

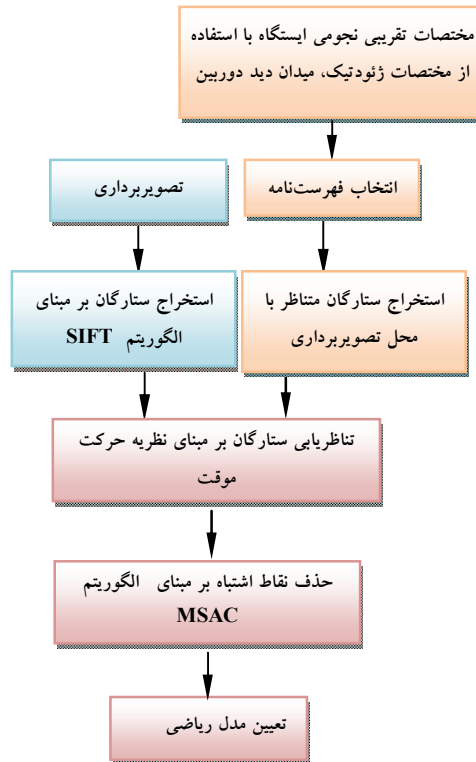
در صورتی که مختصات استاندارد واقعی ستاره را با  $\xi', \eta'$  و مختصات تحت‌تأثیر خطای ویژه موردنظر را با  $x$  و  $y$  نشان دهیم، ثابت می‌شود که مختصات پیش‌گفته تحت تبدیل پروژکتیو به یکدیگر مرتبط می‌شوند (هیرت و ریس، ۲۰۰۴):

$$\xi' = \frac{ax+by+c}{gx+hy+1} \quad (5)$$

$$\eta' = \frac{ex+fy+g}{gx+hy+1}$$

با توجه به مجهول بودن مختصات بُعدی ستاره فرضی در نقطه سمت‌الرأس، به جای استفاده از مدل‌های فیزیکی از مدل‌های تجربی مثل تابع‌های گویا و چندجمله‌ای‌ها با ضرایب گوناگون استفاده می‌شود. برای حل معادله‌های موردنظر و برقراری ارتباط بین دو فضا به تعدادی نقاط متناظر نیاز است که در مراحل قبل با دقت زیاد به دست آمده است.

داد، مختصات صفحه مماس  $(\xi', \eta')$ ، به منزله یک واسطه معرفی می‌شود. مختصات مماسی  $(\xi', \eta')$  معادل با مختصات بُعدی آنها هستند، این مختصات با تصویر کردن مختصات بُعدی  $(\alpha, \delta)$  روی صفحه مماس بر کره آسمانی در نقطه  $(\alpha_0, \delta_0)$  (نقطه‌ای که محور نوری دوربین متوجه آن است) به دست می‌آید.



شکل ۱۰. نمودار گردش شناسایی ستارگان.

مختصات مماسی  $\xi'$  و  $\eta'$  از روابط زیر محاسبه می‌شود (هوجبرگ، ۲۰۰۸):

$$\xi' = -\frac{\cos \delta \sin(\alpha - \alpha_0)}{\cos \delta_0 \cos \delta \cos(\alpha - \alpha_0) + \sin \delta_0 \sin \delta} \quad (4)$$

$$\eta' = \frac{\sin \delta_0 \cos \delta \cos(\alpha - \alpha_0) - \cos \delta_0 \sin \delta}{\cos \delta_0 \cos \delta \cos(\alpha - \alpha_0) + \sin \delta_0 \sin \delta}$$

جدول ۱. مدل ریاضی تابع‌های گویا.

$$R_{2D}(XY) = \frac{P1(X,Y)}{P2(X,Y)} = \frac{\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n a_{ij} X^i Y^j}{\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n b_{ij} X^i Y^j}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha = \frac{a_1 x + a_2 y + a_3}{a_4 x + a_5 y + 1} \\ \delta = \frac{a_6 x + a_7 y + a_8}{a_9 x + a_{10} y + 1} \end{array} \right. \quad \text{تابع گویا درجه ۱}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha = \frac{a_1 x + a_2 y + a_3 yx + a_4 x^2 + a_5 y^2 + a_6}{a_7 x + a_8 y + a_9 yx + a_{10} x^2 + a_{11} y^2 + a_{12} + 1} \\ \delta = \frac{a_{13} x + a_{14} y + a_{15} yx + a_{16} x^2 + a_{17} y^2 + a_{18}}{a_{19} x + a_{20} y + a_{21} yx + a_{22} x^2 + a_{23} y^2 + a_{24} + 1} \end{array} \right. \quad \text{تابع گویا درجه ۲}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha = \frac{a_1 x^2 + a_2 y^2 + a_3 y^2 x + a_4 x^2 y + a_5 xy + a_6 x^3 + a_7 y^3 + a_8 yx + a_9 xy + a_{10}}{a_{11} x^2 + a_{12} y^2 + a_{13} y^2 x + a_{14} x^2 y + a_{15} xy + a_{16} x^3 + a_{17} y^3 + a_{18} x + a_{19} y + 1} \\ \delta = \frac{a_{20} x^2 + a_{21} y^2 + a_{22} y^2 x + a_{23} x^2 y + a_{24} xy + a_{25} x^3 + a_{26} y^3 + a_{27} yx + a_{28} xy + a_{29}}{a_{30} x^2 + a_{31} y^2 + a_{32} y^2 x + a_{33} x^2 y + a_{34} xy + a_{35} x^3 + a_{36} y^3 + a_{37} x + a_{38} y + 1} \end{array} \right. \quad \text{تابع گویا درجه ۳}$$

(۷)

$$RMSE = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\hat{X}(i) - X(i))^2 + \sum_{i=1}^n (\hat{Y}(i) - Y(i))^2}{n-1}}$$

در رابطه بالا  $(\hat{X}, \hat{Y})$  موقعیت به دست آمده برای پیکسل و  $(X, Y)$  موقعیت واقعی نقاط است.

## ۲-۵ مدل ریاضی تابع‌های گویا

مدل ریاضی تابع‌های گویا به صورت تقسیم دو چندجمله‌ای - ای است. در عمل معمولاً این چندجمله‌ای‌ها از درجه ۳ هستند که در حالت سه‌بُعدی تعداد پارامترهای مدل برای هر مولفه مختصاتی ۳۹ مجهول است (۲۰ ضریب برای صورت، ۱۹ ضریب برای مخرج) و در حالت دو بُعدی دارای ۲۹ مجهول است. معادله‌های مربوط در جدول شماره ۱ آورده شده است (ولدان‌زوج و صادقیان، ۲۰۰۹).

## ۲-۴ چندجمله‌ای‌ها

با انتخاب تعداد و حالت‌های گوناگون نقاط متناظر می‌توان از چندجمله‌ای‌ها با درجات متفاوت استفاده کرد:

$$x = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{n-i} a_{ij} X^i Y^j$$

$$y = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{n-i} b_{ij} X^i Y^j, \quad (۶)$$

با اضافه کردن جمله‌های اضافی به معادله‌ها، می‌توانیم تاثیر عوامل ایجادکننده خطاهای سامان‌مند را حذف کنیم. بنابراین با افزایش درجه چندجمله‌ای، خطاهایی با درجه بالاتر حذف می‌شوند. همچنین با اضافه کردن جمله‌های جدید به چندجمله‌ای نوسان چندجمله‌ای بین نقاط کنترل افزایش می‌یابد، و اعمال این نوسان‌ها روی نقاط چک می‌تواند خطا را افزایش دهد. بنابراین باید آن چندجمله‌ای را انتخاب کرد که بهترین نتیجه را ایجاد کند.

به منزله معیاری برای تعیین بهینه بودن نتیجه حاصل می‌توان از رابطه زیر استفاده کرد:



## ۲-۶ حل معادله‌های گویا

در این حالت مختصات بُعدی از تقسیم دو چندجمله‌ای به دست می‌آید. این مدل شبیه به معادله‌های شرط هم خطی ارتباط بین فضای شیء و تصویر را برقرار می‌کند. یک مدل عمومی از تابع‌های گویا که برای انتقال از فضای آسمانی به فضای دو بُعدی تصویر مناسب باشد در جدول شماره ۱ عرضه شده است.

در معادله‌های داده شده در جدول شماره ۱،  $(\alpha, \delta)$  مختصات بُعدی نقاط و  $(x, y)$  مختصات تصویری متناظر با آنها است، و ضرایب چندجمله‌ای‌ها هستند که به آنها ضرایب تابع‌های گویا می‌گویند.

از آنجا که در تابع‌های گویا وجود دستگاه مختصات با مقادیر مختصات خیلی بزرگ غیرعادی نیست، اگر به همراه مختصات بزرگ، چندجمله‌ای با درجه به نسبت زیاد نیز به کار رود، به سبب فقدان استحکام عددی، خطاهای سرریزی یا بُرشی ممکن است رخ دهد. لذا به منظور استحکام بخشی محاسباتی و کاهش تجمع خطاها در طول محاسبات، دو مختصات بُعدی و سه مختصات تصویری هر کدام انتقال دهی و مقیاس دهی می‌شوند تا در بازه +۱ و -۱ قرار گیرد. این امر باعث استحکام محاسباتی و کاهش و کمینه شدن خطاهای محاسباتی می‌شود.

فرایند بهنجارش (نرمال سازی) مختصات با استفاده از روابط زیر صورت می‌گیرد:

$$\begin{cases} x_n = \frac{x-x_0}{x_s}, y_n = \frac{y-y_0}{y_s} \\ \alpha_n = \frac{\alpha-\alpha_0}{\alpha_s}, \delta_n = \frac{\delta-\delta_0}{\delta_s} \end{cases} \quad (8)$$

که  $x_0$  و  $y_0$  مقادیر انتقال و  $x_s$  و  $y_s$  مقادیر مقیاس مختصات عکسی هستند. مشابه آن  $\alpha_0$ ،  $\delta_0$ ، مقادیر انتقال و  $\alpha_s$ ،  $\delta_s$  مقادیر مقیاس مختصات تصویری هستند.

عموماً بیشینه توان هر مختصات تصویری محدود به ۳ است و مجموع توان همه مختصات تصویری نیز محدود به

۳ است به این معنی که:  $0 \leq m \leq 3$ ،  $0 \leq n \leq 3$ ،  $m+n \leq 3$ . در نتیجه ۲۹ ضریب شامل ۲۰ ضریب برای صورت و ۹ ضریب برای مخرج خواهیم داشت که برای حل ضرایب معادله‌های گویا، حداقل به ۲۹ نقطه کنترل نیاز است.

## ۲-۷ تبدیل مدل به مدل پارامتریک خطی

صورت خطی شده معادله‌های جدول ۱ به صورت زیر است (ولدان زوج و صادقان، ۲۰۰۹):

$$\begin{aligned} y &= \frac{(1 \ x \ y \ \dots \ y^3) \cdot (c_0 \ c_1 \ \dots \ c_9)^T}{(1 \ x \ y \ \dots \ y^3) \cdot (1 \ d_1 \ \dots \ d_9)^T} \\ x &= \frac{(1 \ x \ y \ \dots \ y^3) \cdot (a_0 \ a_1 \ \dots \ a_9)^T}{(1 \ x \ y \ \dots \ y^3) \cdot (1 \ b_1 \ \dots \ b_9)^T}, \end{aligned} \quad (9)$$

$$(10)$$

$$\begin{aligned} v_\alpha &= [A]J - \frac{\alpha}{B} \\ A &= \frac{1}{B} \begin{bmatrix} X & Y & \dots & y^3 & -\alpha x & -\alpha y & \dots & -\alpha y^3 \\ B & B & B & B & B & B & B & B \end{bmatrix} \\ v_\delta &= [C]K - \frac{\delta}{D}, \\ C &= \frac{1}{D} \begin{bmatrix} x & y & \dots & y^3 & -\delta x & -\delta y & \dots & -\delta y^3 \\ D & D & D & D & D & D & D & D \end{bmatrix} \end{aligned}$$

یا

$$(11)$$

$$\begin{aligned} v'_\alpha &= Bv_\alpha = [A]J - \alpha \\ A &= \begin{bmatrix} 1 & x & y & \dots & y^3 & -\alpha x & -\alpha y & \dots & -\alpha y^3 \end{bmatrix} \\ v'_\delta &= Bv_\delta = [C]K - \delta, \\ C &= \begin{bmatrix} 1 & x & y & \dots & y^3 & -\delta x & -\delta y & \dots & -\delta y^3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

که

$$N = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & \cdots & y_1^3 & -\delta_1 x_1 & \cdots & -\delta_1 y_1^3 \\ 1 & x_2 & \cdots & y_2^3 & -\delta_2 x_2 & \cdots & -\delta_2 y_2^3 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & y_n^3 & -\delta_n x_n & \cdots & -\delta_n y_n^3 \end{bmatrix}, \quad (18)$$

و  $P$  را می توان به منزله ماتریس وزن باقی مانده ها به صورت زیر در نظر گرفت:

$$P = \begin{bmatrix} P_x & 0 \\ 0 & P_y \end{bmatrix}, \quad (19)$$

که

$$P_x = \begin{bmatrix} \frac{1}{B_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{B_2} & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{B_n} \end{bmatrix}, P_y = \begin{bmatrix} \frac{1}{D_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{D_2} & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{D_n} \end{bmatrix}, \quad (20)$$

همچنین  $A$  ماتریس ضرایب،  $x$  بردار مجهولات و  $l$  بردار مشاهدات (مختصات تصویری مشاهده شده) است. در نتیجه معادله های نرمال به صورت زیر خواهد شد:

$$(A^T P^2 A)x - A^T P^2 l = 0 \rightarrow x = (A^T P^2 A)^{-1} A^T P^2 l, \quad (21)$$

معادله بالا را می توان با دو روش حل کرد: روش مستقیم و روش تکراری.

$$\begin{aligned} B &= (1 \ x \ y \ \cdots \ y^3) \cdot (1 \ b_1 \ \cdots \ b_9)^T \\ D &= (1 \ x \ y \ \cdots \ y^3) \cdot (1 \ d_1 \ \cdots \ d_9)^T \\ J &= (a_0 \ a_1 \ \cdots \ a_9 \ b_1 \ \cdots \ b_9)^T \\ K &= (c_0 \ c_1 \ \cdots \ c_9 \ d_1 \ \cdots \ d_9)^T, \end{aligned} \quad (12)$$

با  $n$  نقطه کنترل، معادله خطای مشاهداتی را می توان به صورت زیر نوشت (تاوو و هوو، ۲۰۰۱):

$$\begin{bmatrix} V_\alpha \\ V_\delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_\alpha & 0 \\ 0 & P_\delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J \\ K \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} P_\alpha & 0 \\ 0 & P_\delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R \\ C \end{bmatrix}, \quad (13)$$

و رابطه بالا را می توان به صورت زیر خلاصه کرد:

$$V = PAx - Pl, \quad (14)$$

و در روابط بالا  $R$  و  $C$  و  $M$  و  $N$  به صورت زیر تعریف می شوند:

$$R = [x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_n]^T, \quad (15)$$

$$C = [y_1 \ y_2 \ \cdots \ y_n]^T, \quad (16)$$

$$M = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & \cdots & y_1^3 & -\alpha_1 x_1 & \cdots & -\alpha_1 y_1^3 \\ 1 & x_2 & \cdots & y_2^3 & -\alpha_2 x_2 & \cdots & -\alpha_2 y_2^3 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & y_n^3 & -\alpha_n x_n & \cdots & -\alpha_n y_n^3 \end{bmatrix}, \quad (17)$$

## ۸-۲ روش مستقیم

روش حل مستقیم تابع‌های گویا با قرار دادن ماتریس  $P$  به صورت ماتریس یک‌ه است. در این صورت معادله نرمال را می‌توان با استفاده از سرشکنی کمترین مربعات استاندارد حل کرد:

$$x = (A^T A)^{-1} A^T l, \quad (22)$$

## ۹-۲ روش تکراری

در روش تکراری به منظور ارتقای دقت پارامترهای تعیین شده و رسیدن به مقادیر دقیق‌تر، از روش سرشکنی کمترین مربعات تکراری در تعیین پارامترهای مجهول استفاده می‌شود. در مورد روش تکراری، مقدار اولیه ضرایب را می‌توان ابتدا از روش مستقیم به دست آورد، سپس  $P^j$  و  $x^j$  را می‌توان با استفاده از حل معادله نرمال به صورت تکراری تا زمان رسیدن به شرط نهایی محاسبه کرد. همچنین می‌توان مخرج را از نظر صفر نشدن در طول محاسبات نیز کنترل کرد تا از تقسیم ماتریس وزن بر صفر جلوگیری به عمل آید.

از تابع‌های گویای درجه اول برای تصحیح واپیچش‌های ایجاد شده از ناحیه دستگاه پرسپکتیو استفاده می‌شود. تصحیح خط‌هایی همچون کروی بودن زمین، شکست جوئی و واپیچش عدسی با استفاده از جمله‌های درجه دوم تابع‌های گویا صورت می‌پذیرد. سایر واپیچش‌ها پیچیده و از درجات بالاتر همچون نوسان‌های دورین، با جمله‌های درجه سوم تصحیح می‌شوند.

## ۱۰-۲ تعیین بُعد و میل نقطه سمت‌الرأس

مرحله آخر پس از یافتن بهترین مدل ریاضی، استفاده از آن در محاسبه بُعد و میل امتداد سمت‌الرأس است که با معلوم بودن زوایای انحراف از امتداد قائم که با تیلت متر مشاهده می‌شود، همچنین مختصات پیکسلی مرکز تصویر

به دست می‌آید. در صورتی که امتداد محور دورین زاویه  $\alpha$  امتداد قائم و  $\beta$  با نصف‌النهار محل داشته باشد، همچنین  $\delta_0, \alpha_0$  به ترتیب بُعد و میل امتداد محور دورین باشد که با استفاده از مدل به دست آمده است، مختصات بُعدی امتداد سمت‌الرأس از رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{cases} \delta = \delta_0 \pm \beta \\ \alpha = \alpha_0 \pm \gamma, \end{cases} \quad (23)$$

به طوری که علامت مثبت به ترتیب برای انحراف جنوبی و شرقی محور دورین از امتداد سمت‌الرأس و علامت منفی برای انحراف شمالی و غربی است. با معلوم شدن مختصات بُعدی امتداد سمت‌الرأس می‌توان مختصات نجومی محل را با استفاده از رابطه (۲) تعیین کرد. در نهایت با مشاهده مختصات ژئودتیک ایستگاه تصویر برداری و محاسبه مختصات نجومی با استفاده از رابطه (۳) می‌توان مولفه‌های انحراف قائم را به دست آورد.

## ۱۱-۲ پیاده‌سازی و ارزیابی

در این مقاله روش پیشنهادی براساس داده‌های ذکر شده در جدول ۲ مورد ارزیابی قرار گرفته است. پس از تصویربرداری از ستارگان بایستی مراکز آنها را با دقت زیادی استخراج کرد. دقت این مرحله تاثیر بسزایی در دقت تعیین موقعیت نجومی و تعیین وضعیت با استفاده از تصویربرداری رقومی از ستارگان خواهد داشت؛ چراکه نقاط استخراج شده در حکم مختصات ستارگان در دستگاه مختصات پیکسلی در نظر گرفته می‌شود.

الگوریتم کشف ستارگان برای تصویر مورد آزمایش صورت گرفته تا مراکز آنها به صورت نشان داده شده در شکل ۱۱ به دست آید. با داشتن مختصات پیکسلی ستارگان بایستی مختصات بُعدی آنها نیز تعیین شود.

لازم به یادآوری است که در این مرحله به علت استفاده از الگوریتم MSAC احتمال وجود نقاط با تناظر اشتباه به حداقل رسیده است.

پس از شناسایی و استخراج ستارگان به منظور یافتن بُعد و میل ستاره فرضی در امتداد سمت الرأس بایستی بهترین مدل ریاضی بین ستارگان در دستگاه مختصات پیکسلی و بُعدی به دست آید.

شکل ۱۲ (الف) الی (و) بردار باقی مانده حاصل از روش های گوناگون را نشان می دهد. موقعیت نقاط کنترل در شکل ۱۳ نشان داده شده است. همچنین مقادیر مجذور میانگین مربعات خطا در جدول ۳ بیان شده است همان طور که ملاحظه می شود تابع های گویا از درجه سوم بهترین نتیجه را از لحاظ میزان باقی مانده و حذف همه خطاها (نوسان های دورین، کروی بودن زمین، شکست جوئی و واپیچش عدسی) به دست می دهد. باین حال توجه به این نکته ضروری است که افزایش ضرایب، باعث افزایش نیاز به تعداد نقاط متناظر می شود که این خود به منزله یک محدودیت است. زیرا در برخی تصاویر اخذ شده ممکن است به تعداد کافی نقاط کنترل موجود نباشد. بنابراین باید به دنبال تبدیلی باشیم که هم کمترین بردار خطا و هم کمترین تعداد نقاط کنترل را نیاز داشته باشد. با توجه به بردارهای باقیمانده می توان تابع های چندجمله ای از درجه سوم را برگزید.

در تصویر مورد ارزیابی در این مقاله فرض شده است که امتداد محور دورین در راستای سمت الرأس است، بنابراین برای یافتن بُعد و میل نقطه سمت الرأس کافی است مختصات مرکز تصویر را - که برابر با (۱۵۰، ۲۰۰) است - در مدل ریاضی انتخابی از مرحله قبل جای گذاری کنیم. در مورد تصویر مورد ارزیابی در این مقاله دو پارامتر فوق برابر است با:

$$\delta_z = 48^{\circ}14'22.8419''$$

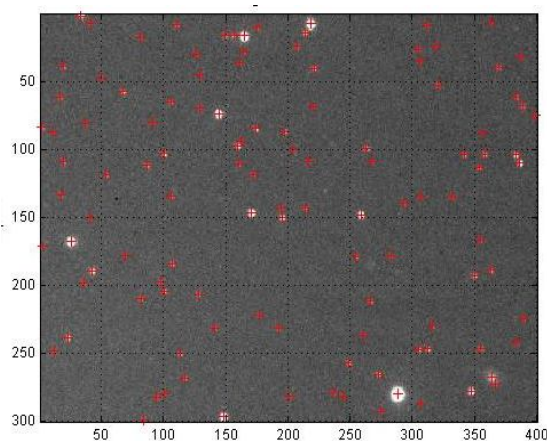
$$\alpha_z = 11^{\text{h}}50^{\text{m}}0.759^{\text{s}}$$

جدول ۲. مشخصات داده های مورد استفاده.

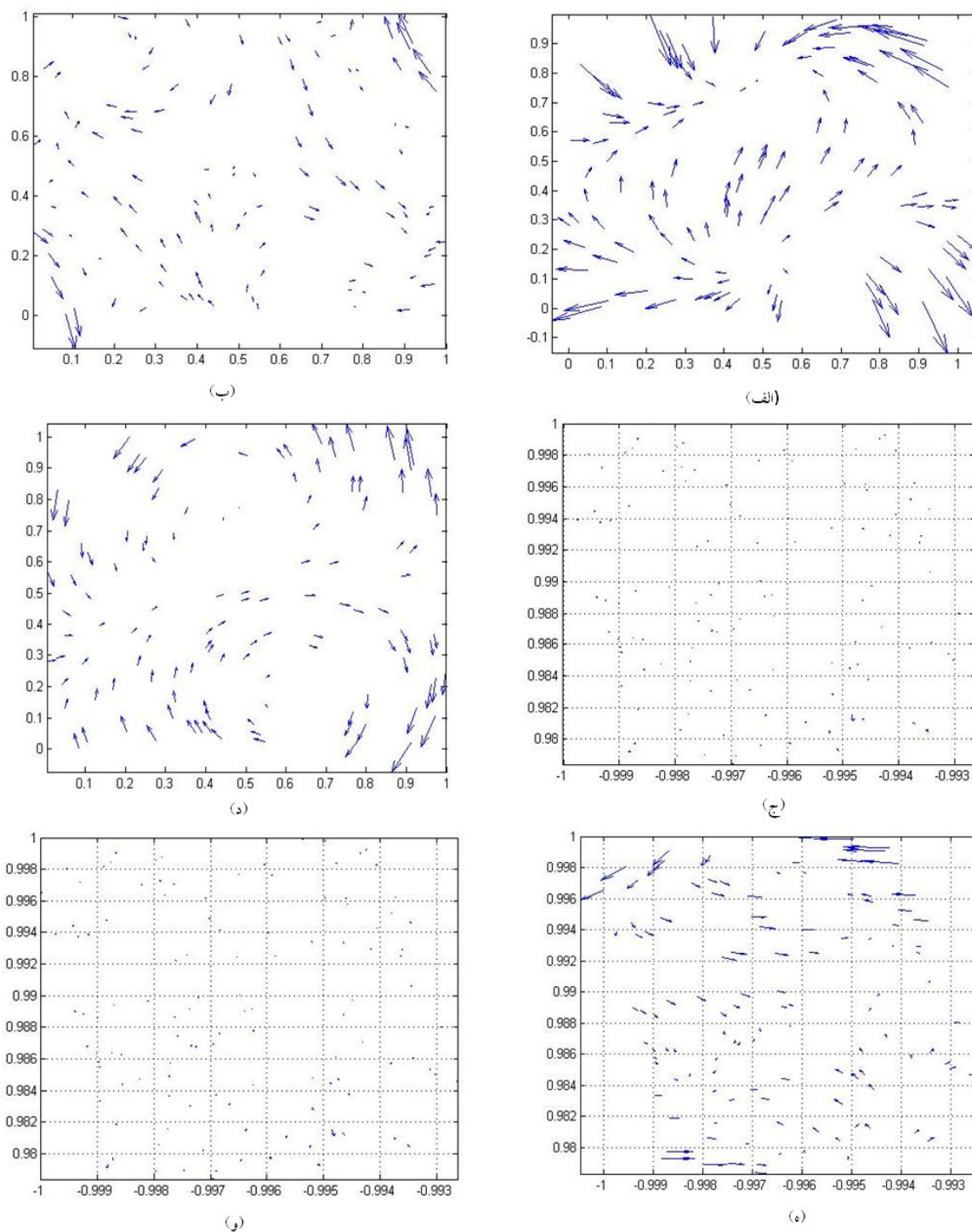
دورین	TZK2-D
CCD	400×300
Pixel Size	9.33" / pixel
FOV	1.037×0.778
فهرست نامه	Tycho-2
تاریخ عکسبرداری	۷ مارس ۱۹۹۸
دمای هوا	۱۶ درجه سلسیوس
فشار هوا	۹۹۰ میلی بار
UTC	۱۷ <sup>h</sup> ۳۶ <sup>m</sup> ۵۱ <sup>s</sup>
زمان نوردهی	۱۰ ثانیه

جدول ۳. مقادیر خطا به ازای مدل های گوناگون ریاضی (برحسب رادیان).

مدل ریاضی	RMSE
چندجمله ای درجه اول	$1.592 \times 10^{-5}$
چندجمله ای درجه دوم	$3.778 \times 10^{-6}$
چندجمله ای درجه سوم	$5.498 \times 10^{-7}$
تابع گویا درجه اول	$1.496 \times 10^{-5}$
تابع گویا درجه دوم	$3.436 \times 10^{-6}$
تابع گویا درجه سوم	$5.084 \times 10^{-7}$



شکل ۱۱. استخراج مراکز ستارگان.



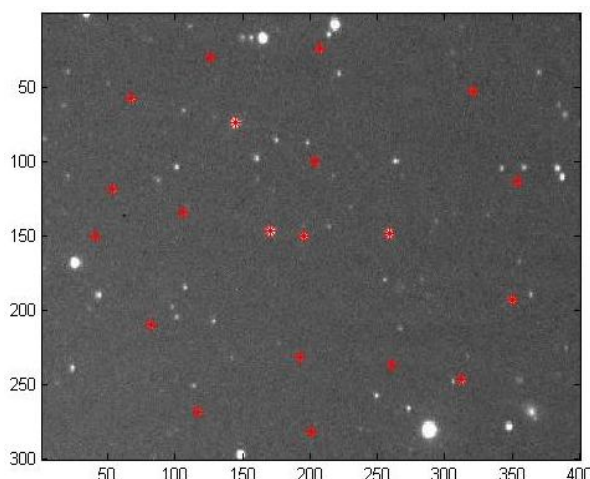
**شکل ۱۲.** (الف) بردارهای خطای مسطحاتی در دستگاه مختصات پیکسلی تابع چندجمله‌ای درجه ۱ بزرگ‌نمایی ۳۰. (ب) بردارهای خطای مسطحاتی در دستگاه مختصات پیکسلی تابع چندجمله‌ای درجه ۲ بزرگ‌نمایی ۱۰۰. (ج) بردارهای خطای مسطحاتی در دستگاه مختصات پیکسلی تابع چندجمله‌ای درجه ۳ بزرگ‌نمایی ۱۰۰. (د) بردارهای خطای مسطحاتی در دستگاه مختصات پیکسلی تابع Projective با بزرگ‌نمایی ۳۰. (ه) بردارهای خطای مسطحاتی در دستگاه مختصات پیکسلی تابع گویا درجه ۲ بزرگ‌نمایی ۱۰۰. (و) بردارهای خطای مسطحاتی در دستگاه مختصات پیکسلی تابع گویا درجه ۳ بزرگ‌نمایی ۱۰۰.

توانایی هندسی و تابش‌سنجی حس‌گر مورد استفاده و ویژگی‌های اپتیکی تلسکوپ مورد استفاده و الگوریتم‌های استخراج و شناسایی ستارگان اشاره کرد.

#### منابع

شریفی، م. ع.، صمدزادگان، ف. و فرزانه، س.، ۱۳۸۸، ارائه یک روش تطابقی جهت استخراج ستارگان از تصاویر رقومی نجومی: نشریه پژوهشگاه هوا فضا، (۲)۴، ۲۷-۳۷.

- Hirt, C., Marti, U., Bürki, B., and Featherstone, W., 2010, Assessment of EGM2008 in Europe using accurate astrogeodetic vertical deflections and omission error estimates from SRTM/DTM2006.0 residual terrain model data: J. Geophys. Res., 10.1029/2009JB007057.
- Hirt, C., and Reese, B., 2004, High-Precision Astrogeodetic Determination of a Local Geoid Profile Using the Digital Zenith Camera System TZK2-D, Electronic Proc. IAG GGSM2004 Symposium, Porto, Portugal.
- Hooijberg, M., 2008, Geometrical Geodesy, 2<sup>nd</sup> edn. Springer, Berlin.
- Kudryns, J., 2007, Automatic determination of vertical deflection components from GPS and zenithal star observation: Acta Geodyn. Geomater, 4(4), 169-172.
- Müller, A., Bürki, B., Hirt, C., Marti, U. and Kahle, H.-G., 2004, First Results from New High-precision Measurements of Deflections of the Vertical in Switzerland: Proc. IAG GGSM2004 Symposium, Porto, Portugal.
- Soler, T., Han, J., and Weston, N., 2013, On deflection of the vertical components and their transformations: J. Surveying Engineering, 10.1061/(ASCE)SU.1943-5428.0000126, 04014005.
- Tao, C. V., and Hu, Y., 2001, 3-D Reconstruction Algorithms based on the Rational Function Model: Proceeding of Joint ISPRS Workshop on High Resolution Mapping from Space 2001, Hannover.
- Tian, L., Guo, J., Han, Y., Lu, X., Liu, W., Wang, Z., Wang, B., Yin, Z., and Wang, H., 2014, Digital zenith telescope prototype of China: Chinese Science Bulletin, 10.1007/s11434-014-0256-z, 1978-1983.
- Valadan Zoj, M. J., and Sadeghian, S., 2003, Rigorous and non-rigorous photogrammetric



شکل ۱۳. موقعیت نقاط کنترل.

در نهایت با توجه به رابطه (۲) می‌توان مختصات نجومی ایستگاه تصویربرداری را محاسبه کرد. برای محاسبه مختصات نجومی دقیق لازم است که بُعد و میل امتداد سمت الرأس  $(\alpha_z, \delta_z)$  با دقت زیاد محاسبه شود که با توجه به جدول ۳ الگوریتم پیشنهادی دقت زیادی در محاسبه این دو پارامتر به دست می‌دهد.

#### ۳ نتیجه‌گیری

امکان به کارگیری تصاویر رقومی نجومی به منظور تعیین مولفه‌های انحراف قائم مورد بررسی قرار گرفت. با توجه به نتایج حاصل (تعیین مدل ریاضی با دقت بسیار زیاد شکل ۱۲- ج و شکل ۱۲- و) به کارگیری روش به صورت عملی مورد تأیید قرار گرفته است. روش عرضه شده را می‌توان به منزله راه‌حلی برای دستیابی به مختصات نجومی و مولفه‌های انحراف قائم به صورت جایگزین روش‌های کلاسیک به کار برد. به علت کارایی زیاد این روش، می‌توان مولفه‌های انحراف قائم را بین ۸ تا ۱۲ ایستگاه در هر شب تعیین کرد.

عوامل موثر در کارایی روش فوق در عمل وابسته به پارامترهای گوناگونی است که از اهم آنها می‌توان به

II/IV: High Resolution Mapping From Space,  
6–8 October 2003, Hannover, Germany, 6 pp.

processin of Ikonos Geo Image. Joint  
Workshop of ISPRS WG I/2, I/5, IC WG