

## بهبود وارون سازی دو بُعدی داده های مگنتوتلوریک با استفاده از روش های خودکار انتخاب پارامتر منظم سازی

رضا قائدرحمتی<sup>۱</sup>، علی مرادزاده<sup>۲\*</sup>، نادر فتحیان پور<sup>۳</sup> و سونگ کن لی<sup>۴</sup>

<sup>۱</sup>دانشکده فنی مهندسی، دانشگاه لرستان، خرم آباد، ایران

<sup>۲</sup>دانشکده مهندسی معدن، پردیس دانشکده های فنی دانشگاه تهران، ایران

<sup>۳</sup>دانشکده مهندسی معدن، دانشگاه صنعتی اصفهان، ایران

<sup>۴</sup>KIGAM، کره جنوبی

(تاریخ دریافت: ۱۳۹۱/۱۲/۱۳، تاریخ پذیرش: ۱۳۹۳/۹/۲)

### چکیده

تولید یک مدل مناسب در حل منظم مسئله وارون به انتخاب مناسب پارامتر منظم سازی وابسته است، لذا برآورد این پارامتر می تواند اهمیت زیادی داشته باشد. در اکثر مسائل وارون، این پارامتر به صورت تجربی انتخاب می شود. هدف از تحقیق حاضر، عرضه و به-کارگیری روشی برای انتخاب خودکار پارامتر منظم سازی مناسب برای وارون سازی دو بُعدی داده های مگنتوتلوریک است. برای این منظور دو روش اعتبارسنجی تقاطعی تعمیم یافته (GCV: Generalized Cross Validation) بهبود داده شده و منحنی L (L-Curve) در الگوریتم وارون سازی دو بُعدی داده های مگنتوتلوریک به کار برده می شود. برآورد پارامتر منظم سازی با این روش ها در یک مثال مصنوعی تقریباً پیچیده و با اعمال دو درصد نوفه تصادفی و همچنین برای یک دسته داده واقعی تشریح می شود. نتایج حاصل نشان می دهد که هر دو روش فوق در انتخاب پارامتر منظم سازی در داده های مصنوعی توانمند هستند. همچنین نتایج به دست آمده برای داده های واقعی و مقایسه آنها با نتایج به دست آمده به روش ACB (Active Constrain Balancing) نشان می دهد که روش GCV بهبود یافته به خوبی قادر است پارامتر منظم سازی را برای تولید یک مدل مناسب برآورد کند، در صورتی که روش منحنی L به همراه یک طرح کنترلی می تواند مفید واقع شود.

**واژه های کلیدی:** وارون سازی دو بُعدی، مگنتوتلوریک، پارامتر منظم سازی، روش GCV، روش منحنی L

## An improvement of 2-D inversion of MT data using automatic selection methods for regularization parameter

Reza Ghaedrahmati<sup>1</sup>, Ali Moradzadeh<sup>2\*</sup>, Nader Fathianpour<sup>3</sup> and Seong kon Lee<sup>4</sup>

<sup>1</sup>Mining Department, Engineering Faculty, Lorestan University, Khoramabad, Iran

<sup>2</sup>School of Mining, College of Engineering, University of Tehran, Iran

<sup>3</sup>Faculty of Mining, Isfahan University of Technology, Isfahan, Iran

<sup>4</sup>KIGAM, South Korea

(Received: 3 March 2013, accepted: 23 November 2014)

\*Corresponding author:

a\_moradzadeh@ut.ac.ir

\*نگارنده رابط:

## Summary

The inverse problem is usually ill-posed which means that there is more than one model which fits the noisy data. Such problems are solved through regularization and a major computational cost arises because the regularization parameter is not known *a priori*.

Undoubtedly, the most common and well-known form of regularization is the one known as Tikhonov regularization (Tikhonov and Arsenin, 1977). In Tikhonov regularization, the regularization parameter ( $\lambda$ ) is a parameter that acts to trade off between minimizing the norm of data misfit and the norm of the model. A good regularization parameter should yield a fair balance between the misfit and the model norm in the regularized solution.

One of the main problems in the solution of inverse problem in terms of Tikhonov regularization is that the regularization parameter is unknown. The inversion algorithms for selection of regularization parameter can be roughly divided into two groups. In one group, the regularization parameter is estimated by a fixed value and the problem is solved by the fixed regularization parameter during the inversion process. In another group, the regularization parameter is estimated at each iteration of inversion. The first method which uses a fixed regularization parameter, i.e. the minimization of Tikhonov regularization (or functional of inverse problem) is done a few times. Each minimization is solved with an experimental regularization parameter and a solution is obtained. If the solution is judged to be satisfactory by some criteria, then the inverse problem is considered to have been solved. In the second inversion group, it is however preferred that the regularization parameter is estimated at each iteration of the inversion. Most of the methods in the second group use the discrepancy principle criterion to choose the regularization parameter. The discrepancy principle method is based on the noise level of the data. Unfortunately for most of the field data the noise is not known.

In this study, it was attempted to use the modified generalized cross validation (GCV) and L-curve criteria as two automatic selection approaches for regularization parameter in two-dimensional (2-D) magnetotelluric (MT) data inversion. GCV is based on the philosophy that if an arbitrary element of the observations is left out, then the corresponding regularized solution should predict this observation well, and the choice of regularization parameter should be independent of an orthogonal transformation of the observation vector. This leads to choosing the regularization parameter which minimizes the well-known GCV function.

If solutions of the inverse problem are computed for all values of the regularization parameter, the graph, using log-log axes, of the misfit versus the model norm tends to have a characteristic 'L' shape called L-curve. The optimal regularization parameter corresponds to a point on the curve near the "corner" of the L-shaped region. There are several algorithms to find the corner of the L-curve; here the robust adaptive pruning algorithm was used for this purpose.

The above methods were included in a 2-D magnetotelluric data inversion codes provided by the fourth author (Lee, et al., 2009). The performance of each of the two regularization parameter selection methods is then investigated by the 2-D inversion of synthetic and real MT data sets. The resulting 2-D inverse models produced by the inversion of the synthetic data set using the modified GCV and the L-curve approaches were generally in good agreement with the model from which the data were generated. However, the constructed model from this synthetic data using the modified GCV was slightly better than the model obtained from L-curve method compared to the original synthetic model. This reflected that the values of regularization parameter obtained from the modified GCV routine were more suitable than those obtained from the L-curve

method. This is clear in a distinct minimum of the GCV function and slightly indistinct minimum value in the L-curve of each iteration in the 2-D inversion.

The obtained 2-D geoelectrical models from real MT data set using the modified GCV and L-curve methods have been compared with the model obtained by the inversion of the same MT data set using the active constrain balancing (ACB) method. In a 2-D inversion using the ACB method, the various set of values, minimum and maximum, of regularization parameter were tested for several performances of inversion of the real data to obtain the suitable model with respect to misfit and model norm. The inverse model obtained using the GCV method for the real MT data was well comparable with that obtained using the ACB method. The closeness of the corresponding values of regularization parameter for the modified GCV and ACB methods in this example could also indicate the robustness of modified GCV approach for the inversion of MT data. Although the results for the L-curve were not as well as those obtained using the modified GCV, the obtained results indicated that application of this method combined with an imposed cooling-schedule-type behavior could be efficient for inversion of MT data.

The computation time was not an issue in this study, but it is important and should be considered. For example, on an Intel Core i5 CPU (2.53 GHz), 4 GB RAM computer, the inversions using the modified GCV and the L-curve methods for the real data took 267.4 and 210 sec., respectively, while this computation time for one performance of the inversion using ACB method was 209.8 sec.

**Keywords:** 2-D inversion, MT, regularization parameter, GCV method, L-curve method

## ۱ مقدمه

می‌شود (برای مثال؛ کانستسبل و همکاران، ۱۹۸۷؛ رودی و مکی ۲۰۰۱؛ اسمیت و بوکر، ۱۹۹۱؛ سیریون و اپورن و اگبرت، ۲۰۰۰؛ ساساکی، ۲۰۰۴؛ لی و همکاران، ۲۰۰۹).

با استفاده از روش منظم‌سازی تیخونف مسئله وارون به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\phi(m) = \phi_d(m) + \lambda^2 \phi_m(m), \quad (1)$$

که  $m$  بردار پارامترهای مدل،  $\phi$  تابع هدف که باید کمینه شود،  $\phi_d$  نبود برازش (misfit)،  $\phi_m$  یک پایدارکننده که بیانگر نرّم مدل یا ناهمواری آن است و  $\lambda$  ضریب لاگرائز یا پارامتر منظم‌سازی است که مقادیر هنج (نرّم) مدل و نبود برازش را در کمینه کردن تابع هدف کنترل می‌کند. به طوری که اگر  $\lambda$  مقدار بزرگی انتخاب شود تأثیر میزان برازش در مدل کم می‌شود و همچنین اگر  $\lambda$  مقدار کوچکی انتخاب شود از اهمیت پایداری مدل کاسته می‌شود. پارامتر منظم‌سازی همچنین حساسیت حل منظم پارامترهای مدل را نسبت به آشفتگی داده‌های

مفهوم مسائل بدوضع (Ill-posed) را ابتدا آدامار (۱۹۲۳) مطرح کرد. مطابق تعریف آدامار (۱۹۲۳) مسئله بدوضع مسئله‌ای است که حل آن یکتا نیست. مسائل وارون عمدتاً جزء مسائل بدوضع هستند. مسئله وارون مگنتوتلوریک (Magnetotelluric) یک مسئله به شدت جور نشده است (نیومن و آلومباخ، ۲۰۰۰). وجود پاسخ برای مسئله، یکتایی پاسخ آن و پایدار بودن مسئله شرط‌های لازم برای خوش-وضع (Well-posed) بودن یک مسئله وارون هستند. نبود برقراری یکی از شرط‌های فوق باعث بدوضع بودن مسئله می‌شود (هابر، ۱۹۹۷؛ ژادانو، ۲۰۰۲). تیخونف و آرسنین (۱۹۷۷) اصول نظری حل مسائل بدوضع را بررسی کردند و یک روش منظم‌سازی (Regularization) برای حل مسئله وارون را توسعه دادند. روش تیخونف و آرسنین یکی از مهم‌ترین روش‌ها در منظم‌سازی مسائل بدوضع است. این روش برای حل منظم شده اکثر مسائل وارون ژئوفیزیکی و به خصوص مگنتوتلوریک به کار گرفته

مشاهده‌ای و ماتریس حساسیت وارون‌سازی کنترل می‌کند. یکی از مسائل مهم در روش منظم‌سازی تیخونف انتخاب مناسب مقدار پارامتر منظم‌سازی است (هابر و الدنبرگ، ۲۰۰۰؛ فرکوهارسون و الدنبرگ، ۲۰۰۴؛ باوئر و کیندرمن، ۲۰۰۹؛ کالتنبرچر و همکاران، ۲۰۱۱).

روش‌های موجود وارون‌سازی داده‌های مگنتوتلوریک را می‌توان از نظر پارامتر منظم‌سازی به دو گروه تقسیم کرد، اول روش‌هایی که در آنها پارامتر منظم‌سازی در طول عملیات وارون‌سازی ثابت در نظر گرفته می‌شود، مثل روش‌های نیومن و آلومبا (۲۰۰۰)، رودی و مکی (۲۰۰۱) و لی و همکاران (۲۰۰۹). در این روش‌ها جواب مناسب برای وارون‌سازی در اجراهای گوناگون به‌ازای مقادیر متفاوت پارامتر منظم‌سازی که به‌صورت تجربی انتخاب شده حاصل می‌شود. دوم روش‌هایی که در آنها پارامتر منظم‌سازی در هر تکرار برآورد می‌شود که در زیر به آنها اشاره خواهد شد.

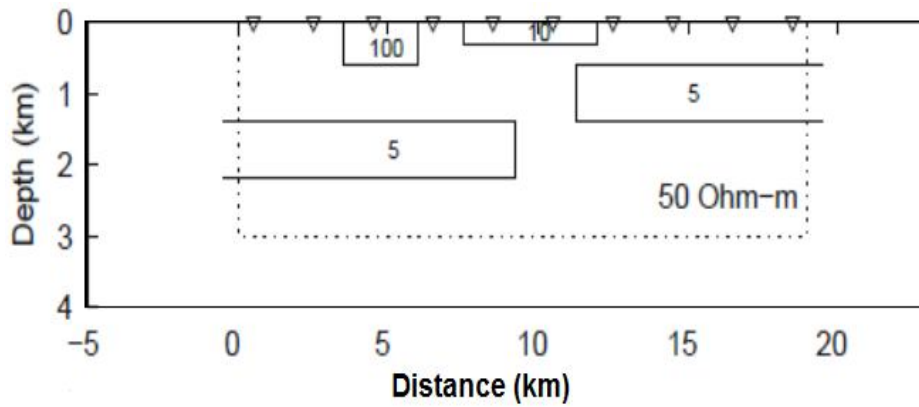
در تعدادی از روش‌های وارون‌سازی مگنتوتلوریک از روش اصل نبود انطباق (Discrepancy principle) استفاده شده است (مثل کانستیل و همکاران، ۱۹۸۷؛ اسمیت و بوکر، ۱۹۸۸). روش اصل نبود انطباق در هسن (۱۹۹۷) به‌طور کامل تشریح شده است. این روش به سطح نوفه داده‌ها وابسته است. در این روش بایستی هر تکرار وارون‌سازی برای محدوده وسیعی از پارامترهای منظم‌سازی اجرا شود تا زمانی که مقدار نبود برازش به نبود برازش هدف که همان سطح نوفه داده‌ها است برسد. روش دیگر که در واقع از نظر شیوه جست‌وجو برای پارامتر منظم‌سازی یک شکل منظم‌تر از روش اصل نبود انطباق است را سیریون و اراپورن و اگبرت (۲۰۰۰) به کار گرفته‌اند. هابر (۱۹۹۷) و هابر و الدنبرگ (۲۰۰۰) روش «اعتبارسنجی تقاطعی تعمیم‌یافته» (GCV: generalized cross-validation) را برای برآورد پارامتر منظم‌سازی در حل مسئله وارون غیرخطی گاوس-نیوتن پیشنهاد دادند و الگوریتم خود را برای وارون‌سازی یک‌بُعدی داده‌های مگنتوتلوریک و همچنین گرانی‌سنجی) در یک مثال مصنوعی به کار گرفتند. لی و الدنبرگ (۱۹۹۹) روش منحنی L (L-curve) را برای برآورد پارامتر منظم‌سازی در حل مسئله وارون سه‌بُعدی گاوس-نیوتن میرا برای داده‌های مقاومت ویژه (DC: Direct Current) به کار گرفتند. والکر (۱۹۹۹) استفاده از روش GCV را در وارون‌سازی یک‌بُعدی داده‌های الکترومغناطیس حلقه-حلقه (Loop-Loop Electromagnetic) بررسی کرد. وی یکی از مشاهدات کار خود را به این صورت عرضه کرد که این روش در بعضی مواقع باعث ایجاد ساختارهای اضافه در تکرارهای اولیه می‌شود و در تکرارهای بعدی، حذف آنها زمان‌بر است. فرکوهارسون و الدنبرگ (۲۰۰۴) روش‌های GCV و منحنی L و اصل نبود انطباق را در وارون‌سازی یک‌بُعدی داده‌های الکترومغناطیس مورد مقایسه قرار دادند. آنها روشن ساختند که در صورت معین بودن سطح نوفه در داده‌ها، به کارگیری روش اصل نبود انطباق در یک محدوده جست‌وجوی مناسب می‌تواند روشی مؤثر و با دقت باشد. البته با توجه به اینکه در این روش، هر مقدار پارامتر منظم‌سازی مورد جست‌وجو، معادل یک حل پیشرو (Forward Modeling) است؛ لذا این روش در مسائل با حجم زیاد، از نظر تعداد داده و پارامترهای مدل ممکن است باعث کاهش بازدهی محاسباتی شود. همچنین این محققان اظهار داشتند که در یک طرح مناسب محدوده جست‌وجو برای پارامتر منظم‌سازی، روش منحنی L از روش GCV نیرومندتر ولی از نظر سرعت کندتر است.

یوچیدا (۱۹۹۳) و میتسوهاتا و همکاران (۲۰۰۲) روش

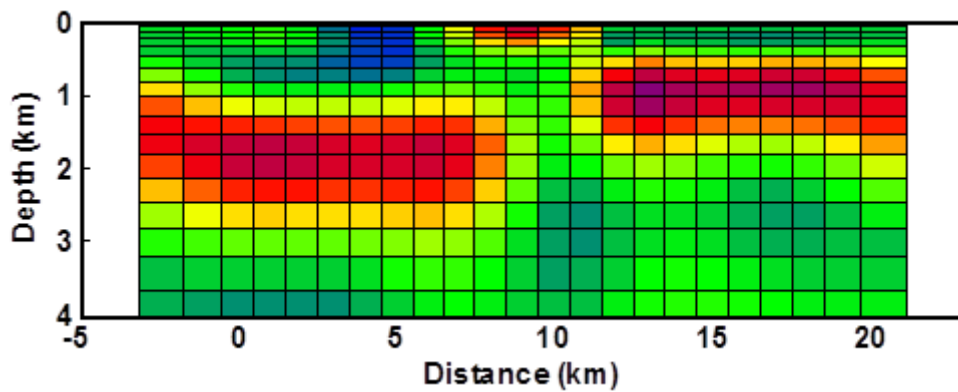
مشاهده‌ای و ماتریس حساسیت وارون‌سازی کنترل می‌کند. یکی از مسائل مهم در روش منظم‌سازی تیخونف انتخاب مناسب مقدار پارامتر منظم‌سازی است (هابر و الدنبرگ، ۲۰۰۰؛ فرکوهارسون و الدنبرگ، ۲۰۰۴؛ باوئر و کیندرمن، ۲۰۰۹؛ کالتنبرچر و همکاران، ۲۰۱۱).

روش‌های موجود وارون‌سازی داده‌های مگنتوتلوریک را می‌توان از نظر پارامتر منظم‌سازی به دو گروه تقسیم کرد، اول روش‌هایی که در آنها پارامتر منظم‌سازی در طول عملیات وارون‌سازی ثابت در نظر گرفته می‌شود، مثل روش‌های نیومن و آلومبا (۲۰۰۰)، رودی و مکی (۲۰۰۱) و لی و همکاران (۲۰۰۹). در این روش‌ها جواب مناسب برای وارون‌سازی در اجراهای گوناگون به‌ازای مقادیر متفاوت پارامتر منظم‌سازی که به‌صورت تجربی انتخاب شده حاصل می‌شود. دوم روش‌هایی که در آنها پارامتر منظم‌سازی در هر تکرار برآورد می‌شود که در زیر به آنها اشاره خواهد شد.

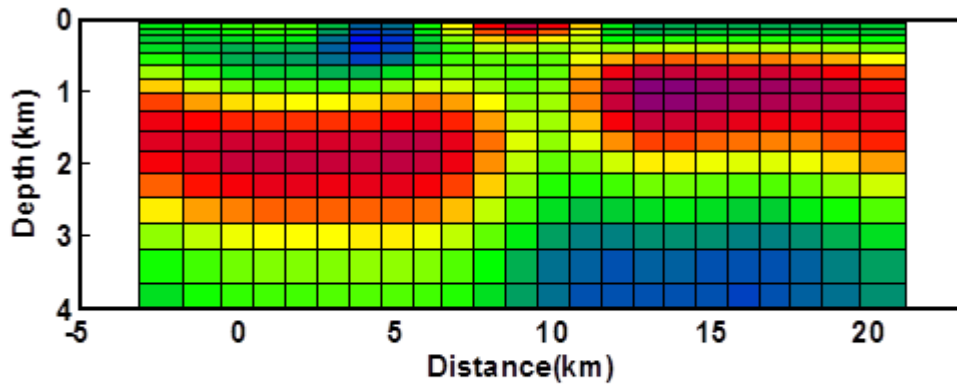
در تعدادی از روش‌های وارون‌سازی مگنتوتلوریک از روش اصل نبود انطباق (Discrepancy principle) استفاده شده است (مثل کانستیل و همکاران، ۱۹۸۷؛ اسمیت و بوکر، ۱۹۸۸). روش اصل نبود انطباق در هسن (۱۹۹۷) به‌طور کامل تشریح شده است. این روش به سطح نوفه داده‌ها وابسته است. در این روش بایستی هر تکرار وارون‌سازی برای محدوده وسیعی از پارامترهای منظم‌سازی اجرا شود تا زمانی که مقدار نبود برازش به نبود برازش هدف که همان سطح نوفه داده‌ها است برسد. روش دیگر که در واقع از نظر شیوه جست‌وجو برای پارامتر منظم‌سازی یک شکل منظم‌تر از روش اصل نبود انطباق است را سیریون و اراپورن و اگبرت (۲۰۰۰) به کار گرفته‌اند. هابر (۱۹۹۷) و هابر و الدنبرگ (۲۰۰۰) روش «اعتبارسنجی تقاطعی تعمیم‌یافته» (GCV: generalized cross-validation) را برای برآورد



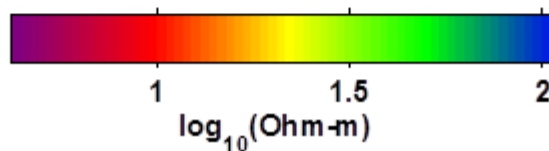
(الف)



(ب)



(ج)



شکل ۱. (الف) یک مدل مصنوعی مطابق مدل منظور شده ساساکی (۱۹۸۹)، این مدل شامل یک لایه رسانا گسل خورده با مقاومت ویژه ۵ اهم‌متر است که در یک محیط میزبان با رسانایی متوسط قرار گرفته است. این مدل همچنین دارای یک توده رسانا با مقاومت ویژه ۱۰ اهم‌متر و یک توده مقاوم با مقاومت ویژه ۱۰۰ اهم‌متر است که درست در زیر سطح قرار گرفته‌اند. مثلث‌های وارون موقعیت ایستگاه‌های مجازی مگنتوتلوریک را نشان می‌دهند. (ب) مدل وارون به‌دست آمده با استفاده از روش GCV بهبودیافته. (ج) مدل وارون به‌دست آمده با استفاده از روش منحنی L.

انتخاب پارامتر منظم‌سازی بهبود یابد. همچنین با به کارگیری الگوریتم بهبود یافته برای مدل‌سازی وارون دو بُعدی داده‌های مصنوعی و صحرائی توانایی این روش‌ها در عمل مورد بررسی قرار می‌گیرد.

## ۲ نظریه

### ۱-۲ مسئله وارون مگنتوتلوریک

مسئله وارون منظم شده مطابق نظریه تیخونف در رابطه (۱) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

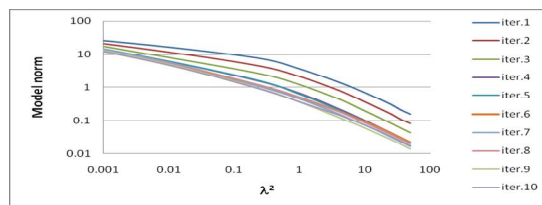
(۲)

$$\phi(m) = \|W_d[d - F(m)]\|^2 + \lambda^2 \|W_m[m - m_0]\|^2,$$
 که  $d$  بردار داده‌ها،  $m$  بردار پارامترهای مدل،  $F(m)$  تابع پیشرو،  $W_m$  و  $W_d$  به ترتیب ماتریس‌های وزنی برای داده‌ها و پارامترهای مدل،  $m_0$  یک مدل مرجع (اولیه)،  $\lambda$  پارامتر منظم‌سازی و  $\|\cdot\|$  مشخصه هنج (نرم) مرتبه دو است. پس از خطی‌سازی با استفاده از بسط مرتبه اول سری تیلور، حل تکراری برای پارامترهای مدل در تکرار  $k$ ام به صورت زیر به دست می‌آید:

(۳)

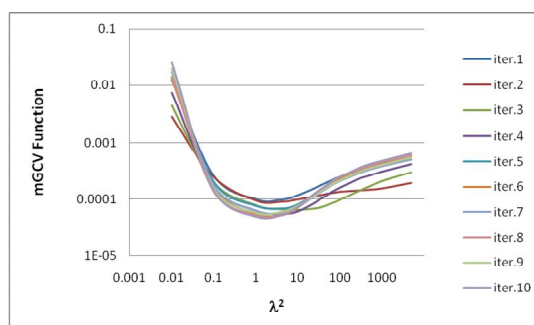
$$m_{k+1} = [\lambda^2 W_m + J_k^T W_d J_k]^{-1} J_k^T W_d [d - F(m_k)] + J_k(m_k - m_0) + m_0,$$

که  $J$  جاکوبی یا ماتریس حساسیت است (برای بررسی بیشتر به مراجعی مثل سیریون و اراپورن و آگبرت، ۲۰۰۰؛ لی و همکاران، ۲۰۰۹ مراجعه شود).



شکل ۳. منحنی‌های (L شکل) حاصل از تغییرات هنج (نرم) مدل نسبت به مقدار نبود برازش به‌ازای مقادیر متفاوت پارامتر منظم‌سازی در هر تکرار وارون‌سازی برای مدل مصنوعی نشان داده شده در شکل ۱.

ABIC (Akaike Bayesian Information Criterion) را برای یک حل منظم شده مسئله وارون دو بُعدی داده‌های مگنتوتلوریک و الکترومغناطیس با منبع کنترل شده (CSEM) به کار گرفتند. لی و همکاران (۲۰۰۹) روش یی و همکاران (۲۰۰۳) یعنی روش ACB (Active Constrain Balancing) یا متعادل‌سازی قید فعال را که در آن پارامتر منظم‌سازی به صورت یک تابع فضایی تعریف می‌شود، برای وارون‌سازی دو بُعدی داده‌های مگنتوتلوریک پیشنهاد دادند و آن را در مثال‌های مصنوعی و واقعی اعتبارسنجی کردند. آنها اظهار داشتند که در این روش با تعداد کمی از پارامترهای منظم‌سازی که به صورت مقادیر بیشترین و کمترین در هر اجرا وارد می‌شود، می‌توان در تعداد کمی از اجراها به جواب مناسب رسید.



شکل ۴. تغییرات تابع GCV بهبود یافته نسبت به پارامتر منظم‌سازی در هر تکرار وارون‌سازی برای مدل مصنوعی نشان داده شده در شکل ۱.

هدف اصلی تحقیق حاضر این است تا اولین بار روش‌های GCV بهبود یافته و منحنی L با الگوریتم آرایش تطابقی (Adaptive pruning algorithm) برای پیدا کردن گوشه (Corner) منحنی L شکل (هنسن و همکاران، ۲۰۰۷)، به‌طور جداگانه در الگوریتم وارون‌سازی دو بُعدی مگنتوتلوریک برای برآورد خودکار پارامتر منظم‌سازی  $\lambda$  وارد شود و بدین شکل الگوریتم وارون‌سازی دو بُعدی داده‌های مگنتوتلوریک در بخش

این صورت پارامتر منظم‌سازی برآوردی، بایستی مقدار مناسبی برای همه داده‌ها باشد. در واقع تابع اعتبارسنجی تقاطعی (CV: Cross-Validation) یک تابع عادی است. این تابع را می‌توان طوری بیان کرد که برای حذف هر داده به یک حل صریح مسئله وارون نیاز نباشد. همچنین یک بهبود در تابع عادی CV یک تابع CV تعمیم یافته (GCV) به دست داده است (وهبا، ۱۹۹۰).

برای یک مسئله وارون غیرخطی که معمولاً به روش تکراری حل می‌شود، روش GCV را می‌توان در هر تکرار وارون‌سازی خطی شده به کار گرفت. لذا با در نظر گرفتن مسئله وارون مطابق روابط (۲) و (۳) تابع GCV برای این مسئله در تکرار  $k+1$  وارون‌سازی به صورت زیر نوشته می‌شود (فرکوهارسون و الدنبرگ، ۲۰۰۴):

(۴)

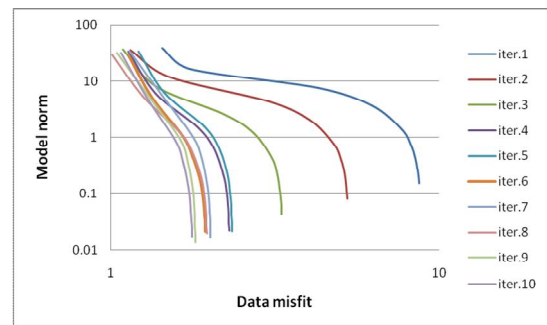
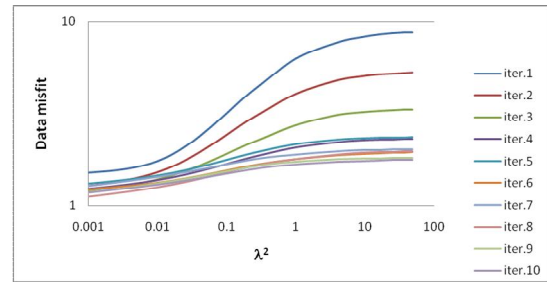
$$GCV_{k+1}(\lambda) = \frac{\|W_d \hat{d} - W_d J_k M^{-1} (J_k^T W_d^T W_d \hat{d} + r)\|^2}{[\text{trace}(I - W_d J_k M^{-1} J_k^T W_d^T)]^2},$$

که

$$M(\lambda) = (J_k^T W_d^T W_d J_k + \lambda^2 W_m^T W_m),$$

$$r = \lambda^2 W_m^T W_m (m_0 - m_k), \hat{d} = d - F(m)$$

آن مقدار پارامتر منظم‌سازی که تابع GCV در رابطه (۴) را کمینه می‌کند مقدار مناسب پارامتر منظم‌سازی در این روش است. نتایج تحقیقات صورت گرفته (والکر، ۱۹۹۹) نشان می‌دهد که پارامتر منظم‌سازی برآورد زده شده توسط این روش معمولاً در تکرارهای اولیه به مقدار نهایی آن نزدیک شده که این مسئله باعث ظاهر شدن ساختار-های اضافه در مدل می‌شود. یک بهبود ساده در این روش به این صورت است که با وارد کردن یک پارامتر پایدار کننده در تابع GCV می‌توان پایداری روش فوق را افزایش داد. این روش به روش اصلاح شده GCV معروف است (ویو و همکاران، ۲۰۰۴؛ باوئر و لوکاس، ۲۰۱۱). با وارد کردن پارامتر پایدارکننده  $c$  در رابطه (۴) رابطه اصلاح شده GCV به صورت زیر نوشته می‌شود:



شکل ۴. تغییرات مقادیر نبود برازش و هنج مدل به منزله تابع‌هایی از پارامتر منظم‌سازی در هر تکرار وارون‌سازی برای مدل مصنوعی نشان داده شده در شکل ۱ در روش منحنی  $L$ .

## ۲-۲ روش اعتبارسنجی تقاطعی تعمیم یافته (GCV)

روش اعتبارسنجی تقاطعی روشی براساس منطق معروف 'leaving-out-one' است که وهبا (۱۹۹۰) آن را برای برآورد پارامتر منظم‌سازی مناسب تعریف کرد. در این روش در یک مسئله وارون همه داده‌ها به جز داده  $k$ ام وارون می‌شود و داده  $k$ ام از پاسخ مدل به دست آمده از آنها به ازای یک پارامتر منظم‌سازی براساس سعی و خطا به دست می‌آید. برای اینکه پارامتر منظم‌سازی منظور شده یک مقدار مناسب باشد مقدار  $k$ امین داده به دست آمده از پاسخ مدل ذکر شده باید به مقدار مشاهده‌ای داده نزدیک باشد. حال این روش را می‌توان تکرار کرد؛ یعنی در هر اجرا یکی از داده‌ها حذف و مابقی داده‌ها در وارون‌سازی منظور شود و پاسخ مربوط به داده حذف شده از مدل به دست آمده محاسبه و با مقدار واقعی آن مقایسه شود. در

برازش و افزایش بزرگی در هنج مدل ایجاد می‌کند. همچنین برای  $\lambda$  کوچک‌تر از مقدار آن در گوشه منحنی، تغییر  $\lambda$  یک افزایش کوچک در هنج مدل و یک کاهش بزرگ در مقدار نبود برازش ایجاد می‌کند. لذا مقدار  $\lambda$  در گوشه منحنی می‌تواند مقداری مناسب برای تعادل دو بخش تابع هدف یعنی نبود برازش و هنج مدل باشد. برای مسئله وارون غیرخطی با به کارگیری این ایده در مسئله وارون خطی شده در هر تکرار وارون‌سازی، پارامتر منظم-سازی انتخاب می‌شود (لی و الدنبرگ، ۱۹۹۹). هر چقدر که روش تقریب مسئله وارون غیرخطی مناسب‌تر باشد انتخاب پارامتر منظم‌سازی با این روش مناسب‌تر است.

در روش منحنی L مسئله مهم الگوریتم یا طرح مناسب برای پیدا کردن گوشه منحنی و به‌طور متناظر پارامتر منظم‌سازی مربوط به گوشه منحنی است. یک الگوریتم معمول برای پیدا کردن  $\lambda$  متناظر با گوشه منحنی L، پیدا کردن بیشترین خمیدگی در منحنی مربوط است (هنسن، ۱۹۹۷؛ فرکوهارسون و الدنبرگ، ۲۰۰۴). زمانی که منحنی L هموار و یا دارای گوشه‌های محلی گوشه منحنی L به‌دست دادند. این الگوریتم بر پایه هراس باشد این

(۵)

$$GCV_{k+1}(\lambda) = \frac{\|W_d \hat{d} - W_d J_k M^{-1} (J_k^T W_d^T W_d \hat{d} + r)\|^2}{[\text{trace}(I - c W_d J_k M^{-1} J_k^T W_d^T)]^2},$$

 $c > 1$ 

در مثال‌های داده شده باوئر و لوکاس (۲۰۱۱)،  $c = 3$  منظور شده است. در کار تحقیقی حاضر با آزمایش‌های گوناگون مقدار مناسب این پارامتر برای داده‌های مصنوعی ۵ و برای داده‌های واقعی ۲۵ منظور شده است.

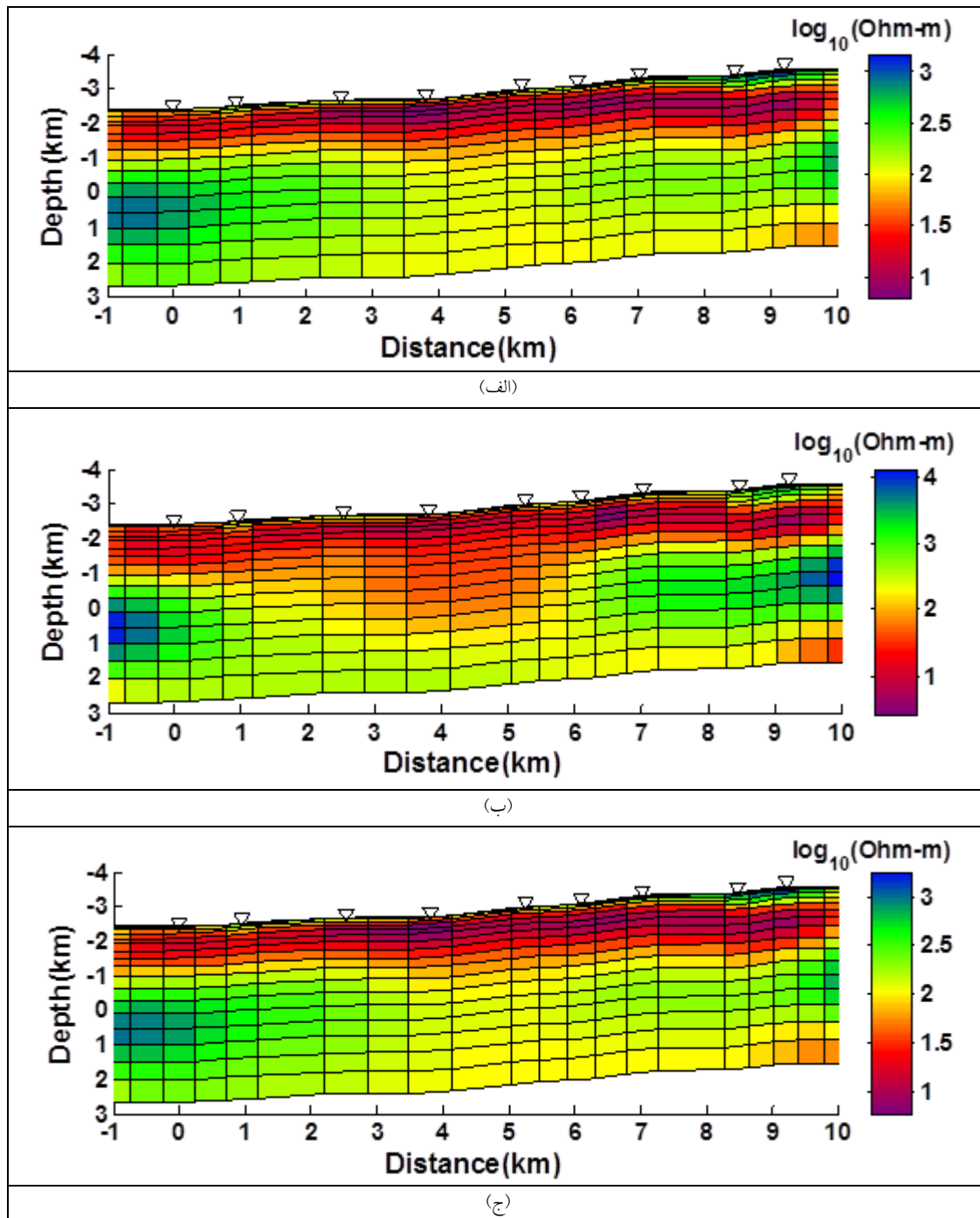
### ۳-۲ روش منحنی L

با حل یک مسئله وارون خطی برای مقادیر متفاوت پارامتر منظم‌سازی و رسم منحنی نبود برازش در مقابل هنج مدل در مقیاس لگاریتمی برای مقادیر متناظر با هر پارامتر منظم‌سازی مشاهده می‌شود که یک منحنی با شکل L به‌دست می‌آید (هنسن، ۱۹۹۷). در گوشه این منحنی تغییر در مقدار پارامتر منظم‌سازی باعث تغییرات قابل توجهی در مقدار نبود برازش و هنج مدل می‌شود. در صورتی که در دوشاخه این منحنی برای  $\lambda$  بزرگ‌تر از آن در گوشه منحنی، تغییر این پارامتر کاهش کوچکی در مقدار نبود

جدول ۱. مقادیر پارامتر منظم‌سازی در هر تکرار وارون‌سازی با استفاده از روش‌های GCV بهبودیافته و منحنی L برای مدل مصنوعی شکل ۱ و داده‌های واقعی در شکل ۵ (n شماره تکرار،  $\lambda_{GCV}^*$  پارامتر منظم‌سازی محاسبه شده با روش GCV بهبودیافته،  $\lambda_{GCV}^n$  پارامتر منظم‌سازی منظور شده در وارون‌سازی با استفاده از طرح کنترلی در روش GCV،  $\lambda_L^*$  پارامتر منظم‌سازی محاسبه شده به روش منحنی L،  $\lambda_L^n$  پارامتر منظم‌سازی منظور شده در وارون‌سازی با استفاده از طرح کنترلی در روش منحنی L).

| n  | داده‌های مصنوعی   |                   |               |               | داده‌های واقعی    |                   |               |               |
|----|-------------------|-------------------|---------------|---------------|-------------------|-------------------|---------------|---------------|
|    | $\lambda_{GCV}^*$ | $\lambda_{GCV}^n$ | $\lambda_L^*$ | $\lambda_L^n$ | $\lambda_{GCV}^*$ | $\lambda_{GCV}^n$ | $\lambda_L^*$ | $\lambda_L^n$ |
| 1  | 2                 | 10                | 3             | 10            | 6                 | 14.1              | 4             | 20            |
| 2  | 2                 | 5                 | 3             | 5             | 17.3              | 17.3              | 4             | 10            |
| 3  | 3                 | 3                 | 3             | 3             | 17.3              | 17.3              | 4             | 5             |
| 4  | 2                 | 2                 | 3             | 3             | 10                | 10                | 3             | 3             |
| 5  | 2                 | 2                 | 3             | 3             | 9                 | 9                 | 3             | 3             |
| 6  | 2                 | 2                 | 3             | 3             | 8                 | 8                 | 3             | 3             |
| 7  | 2                 | 2                 | 3             | 3             | 7                 | 7                 | 3             | 3             |
| 8  | 1                 | 1                 | 3             | 3             | 7                 | 7                 | 3             | 3             |
| 9  | 1                 | 1                 | 3             | 3             | 6                 | 6                 | 3             | 3             |
| 10 | 1                 | 1                 | 3             | 3             | 6                 | 6                 | 3             | 3             |





شکل ۵. مدل‌های وارون به دست آمده برای داده‌های واقعی هر دو وضعیت TE و TM با استفاده از روش‌های GCV بهبودیافته (RMS = 3.61)، منحنی L (RMS = 3.21) و ACB (RMS = 3.57) که به ترتیب در قسمت‌های (الف)، (ب) و (ج) نشان داده شده‌اند.

(۲۰۰۷) یک الگوریتم هرَس تطابقی ( Adaptive pruning) برای پیدا کردن  $\lambda$  متناظر با منحنی L برای

الگوریتم در پیدا کردن پارامتر منظم‌سازی بهینه مؤثر نخواهد بود (هنسن و همکاران، ۲۰۰۷). هنسن و همکاران

پارامتر منظم‌سازی هستند که کاربر انتخاب می‌کند. در این روش با انتخاب جفت‌های متفاوت  $\lambda_{min}$  و  $\lambda_{max}$  برای اجراهای متفاوت وارون‌سازی، مدل بهینه به دست می‌آید.

## ۲-۵ بهبود برنامه وارون‌سازی

در این تحقیق از برنامه وارون‌سازی لی و همکاران (۲۰۰۹) به منزله برنامه پایه استفاده شده است. سپس با اعمال تغییراتی در گداهای مربوط به این برنامه در بخش انتخاب پارامتر منظم‌سازی، و با توجه به روش‌های تشریح شده در بخش‌های ۲-۲ و ۲-۳ در آن بهبود داده شده است. با توجه به کار فرکوهارسون و الدنبرگ (۲۰۰۴) مقادیر محاسبه شده برای پارامتر منظم‌سازی در تکرارهای اولیه مقادیری بسیار کمتر از مقادیر مناسب این پارامتر هستند و عملیات وارون‌سازی با این مقادیر باعث شده است تا وارون‌سازی با مشکل مواجه شود. برای حل این مشکل آنها از طرحی به صورت یک رفتار کنترلی با نام برنامه خنک‌سازی مدل (Cooling-Schedule-Type) استفاده کردند. در این طرح مقدار پارامتر منظم‌سازی ( $\lambda$ ) در تکرار  $k+1$  به صورت زیر انتخاب می‌شود.

$$\lambda_{k+1} = \max(q\lambda_k, \lambda^*), \quad (7)$$

که  $0.01 \leq q \leq 0.5$ ،  $\lambda_k$  پارامتر منظم‌سازی در تکرار  $k$ ام و  $\lambda^*$  مقدار پارامتر منظم‌سازی محاسبه شده از روش GCV یا منحنی L است. مقدار  $q$  در این تحقیق برای میزان پایداری بیشتر وارون‌سازی و همچنین میزان کنترل بیشتر در ایجاد شرایط بدوضع ۰/۵ انتخاب شده است. البته در این تحقیق نشان داده می‌شود که مقادیر پارامتر منظم‌سازی محاسبه شده از روش‌های GCV اصلاح شده و منحنی L با الگوریتم آرایش تطابقی حتی برای تکرارهای اولیه تا حدود زیادی مناسب‌اند و مشکل فوق را ایجاد نمی‌کنند. به این معنی که روش وارون‌سازی بهبود یافته در اینجا بدون نیاز به پارامتر منظم‌سازی شروع

حذف گوشه‌های محلی و مشخص کردن گوشه بهینه است و در دو مرحله اجرا می‌شود. در مرحله اول گوشه-های متفاوتی با استفاده از منحنی در مقیاس‌های متفاوت محاسبه می‌شود، سپس در مرحله دوم بهترین گوشه از بین آنها انتخاب می‌شود (هنسن و همکاران، ۲۰۰۷).

## ۲-۴ روش متعادل‌سازی قید فعال (ACB)

لی و همکاران (۲۰۰۹) روش متعادل‌سازی قید فعال یا ACB (بی و همکاران، ۲۰۰۳)، را در وارون‌سازی دو بُعدی داده‌های مگنتوتلوریک در یک الگوریتم گاوس-نیوتن صریح به کار گرفتند. اساس این روش به این صورت است که در آن پارامتر منظم‌سازی با یک تابع فضایی (به صورت  $\lambda(x, z)$  که  $x$  و  $z$  به ترتیب مشخص‌کننده موقعیت در طول نیم‌رُخ و عمق هستند) تعریف می‌شود. در این روش پارامتر منظم‌سازی  $\lambda$  در حکم یک پارامتر فضایی در درون تفکیک حل پارامتری منکه (منکه، ۱۹۸۹) قرار می‌گیرد و با استفاده از این تفکیک برآورد می‌شود. در واقع الگوریتم ACB در وارون‌سازی برای به دست آوردن یک قید بهینه همواری اجرا می‌شود. با توجه به این الگوریتم پارامتر منظم‌سازی به‌طور بهینه با یک تابع توزیع (Spread function)  $SP_i$  از اُمین پارامتر مدل تنظیم می‌شود که این پارامتر را ماتریس تفکیک پارامتر (Parameter resolution matrix) منکه (۱۹۸۹) تعریف می‌کند. در این روش پارامتر منظم‌سازی از درون‌یابی خطی لگاریتمی به صورت زیر به دست می‌آید.

(۶)

$$\log(\lambda_i) = \log(\lambda_{min}) + \frac{\log(\lambda_{max}) - \log(\lambda_{min})}{\log(SP_{max}) - \log(SP_{min})} \{ \log(SP_i) - \log(SP_{min}) \},$$

که  $SP_{min}$  و  $SP_{max}$  به ترتیب بیشترین و کمترین مقادیر تابع توزیع و  $\lambda_{min}$  و  $\lambda_{max}$  مقادیر بیشترین و کمترین برای

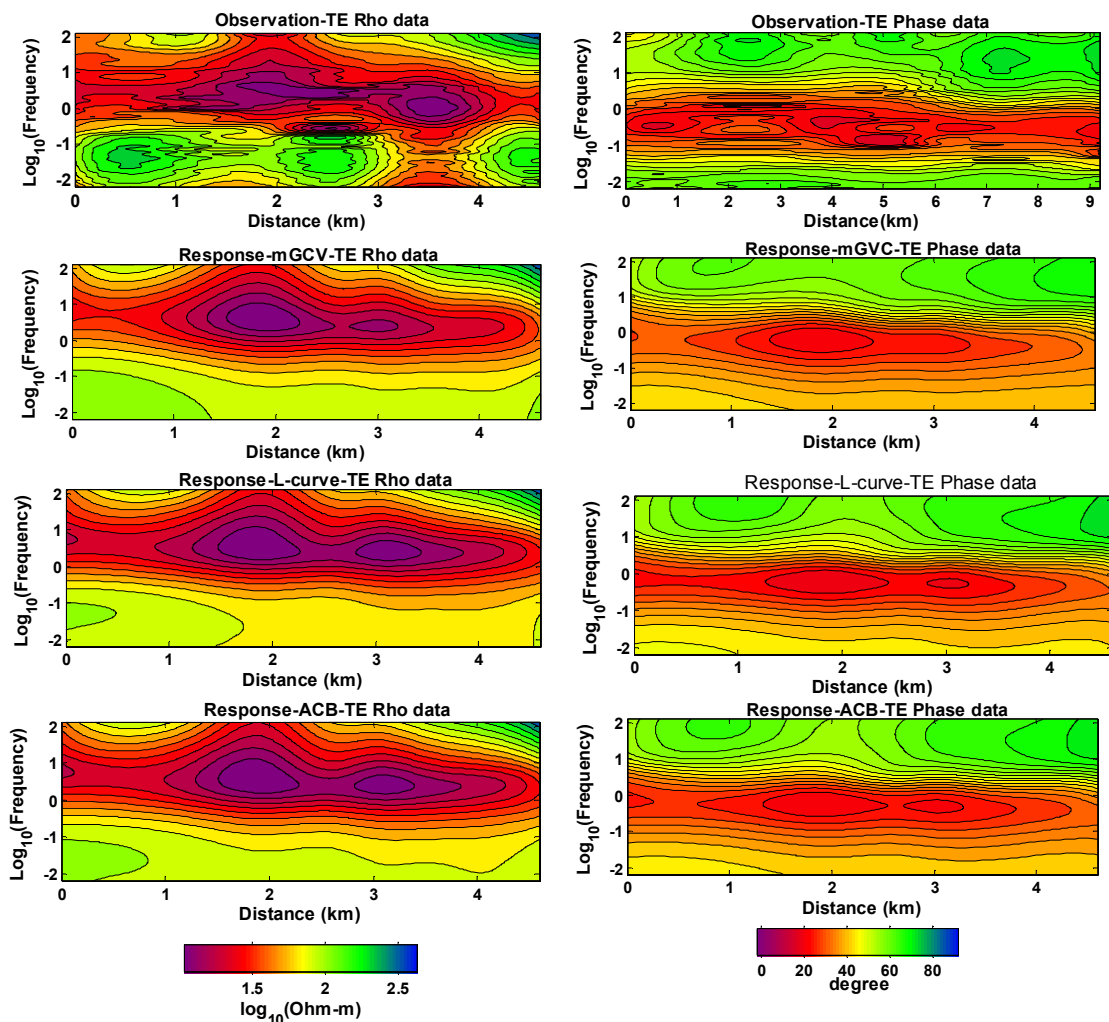
پیچیده تشریح می‌شود. شکل ۱-الف یک مدل مصنوعی را مشابه با مدل طراحی شده ساساکی (۱۹۸۹) نشان می‌دهد. در این مدل یک لایه رسانا با مقاومت ویژه ۵ اهم‌متر که دارای یک ناپیوستگی یا گسل است در یک محیط میزبان با رسانایی متوسط (مقاومت ویژه ۵۰ اهم‌متر) قرار گرفته است. در این مدل همچنین یک بی‌هنجاری رسانا با مقاومت ویژه ۱۰ اهم‌متر و یک بی‌هنجاری مقاوم با مقاومت ویژه ۱۰۰ اهم‌متر درست در بخش فوقانی مدل

هم با موفقیت پیش می‌رود. البته در این کار نیز از طرح کنترلی فوق برای مقایسه نتایج استفاده شده است.

### ۳ تحلیل‌های عددی

#### ۱-۳ مدل مصنوعی

در ابتدا توانایی روش‌های GCV بهبود یافته و منحنی L برای انتخاب پارامتر منظم‌سازی در وارون‌سازی دو بُعدی داده‌های مگنتوتلوریک با یک مثال مصنوعی تقریباً



شکل ۶. مقایسه شیب مقاطع داده‌های مشاهده‌ای وضعیت TE و پاسخ متناظر از مدل حاصل از وارون‌سازی دو بُعدی داده‌های واقعی قُطبش TE با استفاده از روش‌های GCV بهبود یافته، منحنی L و ACB.

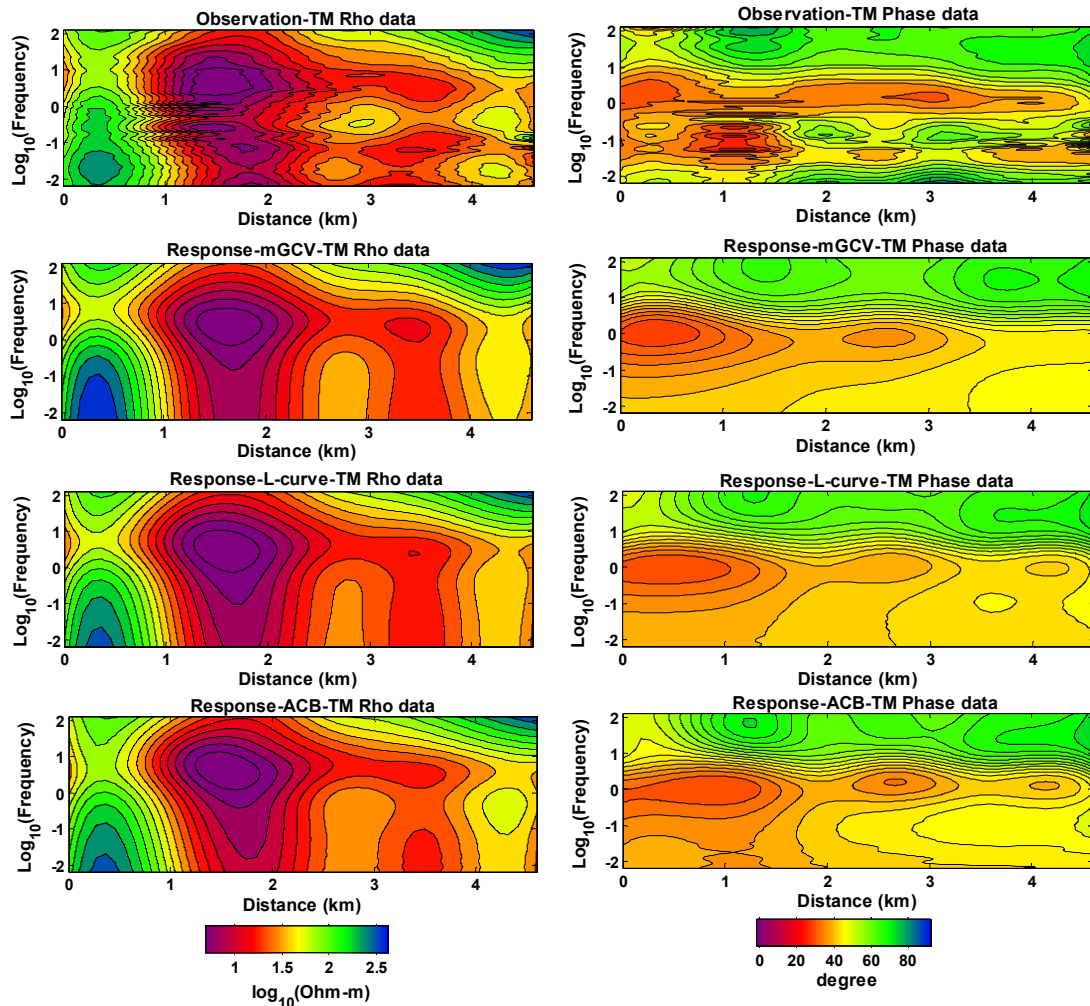
از این روش به جز در تکرارهای اولیه (تکرارهای ۱ و ۲) در دیگر تکرارها برابر مقادیر به دست آمده با استفاده از طرح کنترلی (رابطه ۶) هستند. شکل ۳ میزان تغییرات هیچ مدل نسبت به نبود برازش معادل به ازای مقادیر متفاوت پارامتر منظم سازی را در هر تکرار وارون سازی با استفاده از روش منحنی  $L$  نشان می دهد. این منحنی ها در واقع همان منحنی های  $L$  هستند. هر چند در اینجا به صورت منحنی  $L$  آرمانی نیستند و تا حدودی جزء منحنی های  $L$  از نوع بد (رودریگز و تیس، ۲۰۰۵) قرار می گیرند، ولی با توجه به جدول ۱ دیده می شود که الگوریتم به کار رفته در این تحقیق برای پیدا کردن گوشه این منحنی ها توانایی لازم را دارد. به طوری که مقدار به دست آمده برای پارامتر منظم سازی در هر تکرار، مقدار مناسبی است. درستی این ادعا زمانی اثبات می شود که عملیات وارون سازی بدون منظور کردن روش خودکار انتخاب پارامتر منظم سازی اجرا شود؛ یعنی پارامتر  $\lambda$  منظم سازی به طور تجربی در اجراهای متفاوت تعیین شود. در این صورت دیده شده است که مقدار  $\lambda$  به دست آمده در جدول ۱ برای روش منحنی  $L$  در این مثال یعنی ۳ مناسب ترین مقدار برای وارون سازی است. اگرچه مقدار پارامتر منظم سازی در این روش در همه تکرارها برابر ۳ به دست آمده است و همانند روش GCV بهبود یافته دارای یک سیر نزولی مناسب از تکرارهای اولیه به سمت تکرارهای نهایی (مجو، ۱۹۹۴؛ فرکوهارسون و الدنبرگ، ۲۰۰۴) نیست ولی این مقدار، اختلاف ناچیزی با مقادیر به دست آمده در روش GCV بهبود یافته دارد. شکل ۴ تغییرات نبود برازش و هیچ مدل را به ازای پارامترهای متفاوت منظم سازی در هر تکرار وارون سازی نشان می دهد. به خوبی دیده می شود که تغییرات نبود برازش و هیچ مدل نسبت به پارامتر منظم سازی در جهت عکس هم عمل می کنند.

قرار گرفته اند. برای تولید داده های مصنوعی ۱۰ ایستگاه مجازی برای اندازه گیری داده های مگنتوتلوریک با فواصل ۲۰۰۰ متری در طول نیم رُخ طراحی شده است. در همه ایستگاه ها مقادیر مقاومت ویژه و فاز ظاهری برای دو وضعیت یا مُد قُطبش الکتریک عرضی (TE: Transverse Electric) و مغناطیس عرضی (TM: Transverse Magnetic) در ۹ بسامد (۰/۱، ۰/۲۲، ۰/۵، ۱، ۲/۲، ۵، ۱۰، ۲۲ و ۵۰ هرتز) با استفاده از مدل سازی پیشرو (وانامیکر و همکاران، ۱۹۸۷)، محاسبه شده است. برای بررسی بهتر توانایی روش های به کار گرفته شده در این تحقیق در انتخاب پارامتر منظم سازی ۲ درصد نوفه تصادفی (Random noise) به داده های مصنوعی تولید شده اضافه شده است. سپس با طرح یک شبکه مناسب برای پارامترهای مدل و تنظیم دیگر پارامترهای وارون سازی، عملیات وارون سازی روی این داده ها صورت گرفته است. شکل های ۱-ب و ۱-ج به ترتیب مدل های وارون به دست آمده برای داده های مصنوعی فوق را با استفاده از روش های GCV بهبود یافته و منحنی  $L$  در تکرار دهم وارون سازی نشان می دهند. به طور کلی ملاحظه می شود که هر دو مدل به دست آمده تطابق به نسبت خوبی با مدل مصنوعی شکل ۱-الف دارند. البته مدل به دست آمده روش GCV بهبود یافته تطابق بهتری را نسبت به مدل به دست آمده روش منحنی  $L$  با مدل مصنوعی نشان می دهد. شکل ۲ تغییرات تابع GCV بهبود یافته را نسبت به پارامتر منظم سازی در هر تکرار وارون سازی با استفاده از روش GCV نشان می دهد. دیده می شود که تابع GCV بهبود یافته در هر تکرار برای محدوده به نسبت وسیعی از پارامتر منظم سازی دارای یک کمینه مشخص است یا به طور معادل می توان گفت که تابع GCV بهبود یافته به ازای پارامتر منظم سازی خاصی در هر تکرار وارون سازی کمینه شده است. با توجه به جدول ۱ دیده می شود که مقادیر پارامتر منظم سازی به دست آمده

### ۲-۳ داده‌های واقعی

تانسور امیدانس مگنتوتلوریک مقادیر مقاومت ویژه و فاز ظاهری برای محدوده بسامدی ۰/۰۰۲۸ تا ۳۲۲ هرتز محاسبه شد. برای پردازش، تعیین وضعیت‌های TE و TM، و به دست آوردن منحنی‌های مقاومت ویژه و فاز ظاهری داده‌های مگنتوتلوریک از نرم‌افزار WinGlink (Geosystem, 2003) استفاده شد. پس از حذف داده‌های پرت و داده‌های حاوی خطای بالا، مقادیر مقاومت ویژه و فاز ظاهری برای هر دو وضعیت TE و TM در ۵۰ بسامد از محدوده بسامدی فوق برای وارون‌سازی آماده شده است.

برای بررسی بهتر توانایی روش‌های انتخاب پارامتر منظم‌سازی، در این تحقیق نتایج وارون‌سازی یک مجموعه داده واقعی (صحرائی) مگنتوتلوریک با استفاده از هر دو روش ذکر شده برای انتخاب پارامتر منظم‌سازی عرضه می‌شود. همچنین این نتایج با نتایج وارون‌سازی به دست آمده با استفاده از روش ACB مقایسه می‌شود. داده‌های مورد بررسی در اینجا شامل ۹ ایستگاه اندازه‌گیری مگنتوتلوریک روی یک نیم‌رخ در منطقه زمین‌گرمایی سبلان در استان اردبیل است (نیم‌رخ P01 در EDC، ۲۰۱۰). پس از پردازش داده‌ها و محاسبه



شکل ۷. مقایسه شبه‌مقاطع داده‌های مشاهده‌ای وضعیت TM و پاسخ متناظر از مدل حاصل از وارون‌سازی دو بُعدی داده‌های واقعی قطبش TM با استفاده از روش‌های GCV بهبودیافته، منحنی L و ACB.

تکرارهای بیشتر دارای یک سیر نزولی با آهنگ کاهش مناسب است، به طوری که این چنین مدلی برای پارامتر منظم سازی باعث تولید یک مدل وارون پایدار شده است. همچنین مشاهده می شود که مقادیر پارامتر منظم سازی به دست آمده از روش GCV بهبود یافته به جز در تکرار اول در مابقی تکرارها با مقادیر به دست آمده این پارامتر از طرح کنترلی (رابطه ۶) یکسان است. مقادیر پارامتر منظم سازی به دست آمده از روش منحنی L (جدول ۱) کمتر از حد مناسب هستند چرا که این مقادیر باعث تولید مدلی با هنج بیشتر یا ناهموارتر شده اند (شکل ۵-ب). در چنین مواردی ممکن است ساختارهای غیر واقعی در مدل وارد شود. البته علت اینکه مدل تا اندازه ای به مدل های به دست آمده از دو روش دیگر نزدیک است، وجود طرح کنترلی برای پارامتر منظم سازی در وارون سازی است.

#### ۴ نتیجه گیری

انتخاب پارامتر منظم سازی در مسائل وارون همواره اهمیت خاصی دارد چرا که تولید مدل مناسب یا یک حل مناسب مسئله وارون که همواره یک چالش بوده است به مقدار مناسب این پارامتر وابسته است. در این تحقیق استفاده از روش های GCV بهبود یافته و منحنی L برای انتخاب پارامتر منظم سازی مناسب در الگوریتم وارون سازی دو بُعدی داده های مگنتوتلوریک تشریح شده است. با به کارگیری این روش ها در وارون سازی داده های مصنوعی و یک دسته داده واقعی نشان داده شده است که روش GCV بهبود یافته، هم در مثال های مصنوعی و هم در داده های واقعی به خوبی قادر به برآورد پارامتر منظم سازی در هر تکرار وارون سازی است. لذا این روش را می توان به مثابه روشی خودکار برای انتخاب پارامتر منظم سازی در وارون سازی دو بُعدی داده های مگنتوتلوریک به کار گرفت. نتایج به دست آمده از تحقیق حاضر نشان می دهد که اگرچه روش منحنی L در برآورد پارامتر منظم سازی،

شکل ۵ مدل های وارون دو بُعدی به دست آمده از وارون سازی داده های واقعی در این تحقیق را برای وارون سازی با استفاده از روش های GCV بهبود یافته، منحنی L و ACB نشان می دهد. همچنین در شکل های ۶ و ۷ پاسخ نظری مقاومت ویژه و فاز ظاهری این مدل ها با داده های مشاهده ای متناظر مقایسه شده است. با توجه به اینکه در روش منظم سازی ACB باید کمترین و بیشترین مقادیر پارامتر منظم سازی  $\lambda$  از سوی کاربر انتخاب شود، لذا نیاز است که برای رسیدن به یک مدل مناسب از نظر مقادیر نبود برآزش یا همخوانی پاسخ ها با داده های مشاهده ای و هنج (نرم) مدل که مشخص کننده پایداری مدل است، چندین جفت پارامتر منظم سازی در حکم مقادیر کمترین و بیشترین در اجراهای گوناگون وارون سازی آزمایش شود. در اینجا پس از چند آزمایش مقادیر ۱۵ و ۸ به ترتیب در حکم کمترین و بیشترین مقادیر مناسب پارامتر منظم سازی به دست آمده است. شکل ۵-ج مدل حاصل از وارون سازی داده های واقعی را با استفاده از این مقادیر نشان می دهد. با توجه به مدل های به دست آمده برای وارون سازی با استفاده از GCV بهبود یافته (شکل ۵-الف) و منحنی L (شکل ۵-ب)، دیده می شود که مدل به دست آمده برای روش GCV بهبود یافته دارای تطابق بیشتری با مدل به دست آمده با روش ACB است. این موضوع با توجه به جدول ۱ و مقایسه مقادیر پارامتر منظم سازی به دست آمده برای روش های GCV بهبود یافته و منحنی L در تکرارهای متفاوت وارون سازی به خوبی قابل تفسیر است. مقادیر پارامتر منظم سازی به دست آمده در تکرارهای متفاوت وارون سازی برای روش GCV بهبود یافته از نظر تجربی برای وارون سازی یک دسته داده واقعی مقادیری مناسب اند و دیده می شود که به مقادیر مناسب مربوط به روش ACB بسیار نزدیک هستند. نکته دیگر اینکه مشاهده می شود به جز در تکرار اول در دیگر تکرارها مقدار پارامتر منظم سازی به سمت

- problems: *Computer and Geosciences*, **4**, 41–63.
- Hadamard, J., 1923, *Lectures on Cauchy's Problem in Linear Partial Differential Equations*: Yale University Press, New Haven.
- Hansen, P. C., 1997, *Rank-deficient and Discrete Ill-posed Problems: Numerical Aspects of Linear Inversion*: SIAM, Philadelphia.
- Hansen, P. C., Jensen, T. K., and Rodriguez, G., 2007, An adaptive pruning algorithm for the discrete L-curve criterion: *J. Comput. Appl. Math.*, **198**, 483–492.
- Kaltenbacher, B., Kirchner, A., and Vexler, B., 2011, Adaptive discretizations for the choice of a Tikhonov regularization parameter in nonlinear inverse problems: *Inverse Problems*, **27**, 125008 (28pp).
- Lee, S. K., Kim, H., J., Song, Y., and Lee, C., 2009, MT2DInvMatlab- A program in MATLAB and FORTRAN for two-dimensional magnetotelluric inversion: *Computers and Geosciences*, **35**, 1722-1735.
- Li, Y., and Oldenburg, D. W., 1999, 3-D inversion of DC resistivity data using an L-curve criterion: 69th Ann. Int. Meeting of the SEG, Expanded Abstracts, 251–254.
- Meju, M. A., 1994, *Geophysical Data Analysis: Understanding Inverse Problem, Theory and Practice*: SEG.
- Menke, W., 1989, *Geophysical Data Analysis Discrete Inverse Theory*, revised ed, Academic Press Inc, San Diego.
- Mitsuhata, Y., Uchida, T., and Amano, H., 2002, 2.5-D inversion of frequency domain electromagnetic data generated by a grounded-wire source: *Geophysics*, **67**, 1753–1768.
- Newman, G. A., and Alumbaugh, D. L., 2000, Three-dimensional magnetotelluric inversion using non-linear conjugate gradients: *Geophys. J. Int.*, **140**, 410 – 424.
- Rodi, W. L., and Mackie, R. L., 2001, Nonlinear conjugate gradients algorithm for 2-D magnetotelluric inversion: *Geophysics*, **66**, 174–187.
- Rodriguez, G., and Theis, D., 2005, An algorithm for estimating the optimal regularization parameter by the L-curve: *Rendiconti di Matematica, Serie VII*, **25**, 69-84.
- Sasaki, Y., 1989. Two-dimensional joint inversion of magnetotelluric and dipole-dipole resistivity data: *Geophysics*, **54**, 254–262.
- به‌خصوص برای مدل‌سازی داده‌های واقعی، به اندازه روش GCV بهبود یافته توانمند نیست ولی این روش هم به همراه یک طرح کنترلی می‌تواند برای تعیین پارامتر منظم‌سازی مناسب مفید واقع شود. اگرچه در این تحقیق بازدهی محاسباتی روش‌ها از اهداف اصلی کار نبوده است ولی مدل‌سازی داده‌های مصنوعی و واقعی نشان می‌دهد که اعمال این روش‌ها در وارون‌سازی، دارای بار محاسباتی زیادی نیست. برای مثال، وارون‌سازی داده‌های واقعی در این تحقیق با استفاده از روش GCV بهبود یافته ۲۶۷/۴ ثانیه، با روش منحنی L، ۲۱۰ ثانیه و با روش ACB در یک اجرا ۲۰۹/۸ ثانیه روی یک رایانه Intel Core i5 "CPU (2.53 GHz), 4 GB RAM" زمان صرف کرده است.

## منابع

- Bauer, F., and Kindermann, S., 2009, Recent results on the quasi-optimality principle: *J. Inverse Ill-Posed Prob*, **17**, 5–18.
- Bauer, F., and Lukas, M. A., 2011, Comparing parameter choice methods for regularization of ill-posed problems: *Mathematics and Computer in Simulation*, **81**, 1795-1841.
- Constable, S. C., Parker, R. L., and Constable, C. G., 1987, Occam's inversion: A practical algorithm for generating smooth models from electromagnetic sounding data: *Geophysics*, **52**, 289–300.
- EDC (Energy Development Corporation), 2010, 2009 MT Survey of NW Sabalan Geothermal Project, NW Iran: Report submitted to SUNA, 13 p.
- Farquharson, C. G., and Oldenburg, D. W., 2004, A comparison of automatic techniques for estimating the regularization parameter in non-linear inverse problems: *Geophys. J. Int.*, **156**, 411–425.
- Geosystem SRL., 2003, A Guide for Using WinGLink Software, ver.2. 1. 1.
- Haber, E., 1997, *Numerical Strategies for the Solution of Inverse Problems*: Ph.D Thesis, University of British Columbia, Vancouver, Canada.
- Haber, E., and Oldenburg, D. W., 2000, A GCV based method for nonlinear ill-posed

- Vio, R., Ma, P., Zhong, W., Nagy, J., Tenorio, L., and Wamsteker, W., 2004, Estimation of regularization parameters in multiple-image deblurring: *Astron. Astrophys.*, **423**, 1179–1186.
- Wahba, G., 1990, *Spline Models for Observational Data*: SIAM, Philadelphia.
- Walker, S. E., 1999, *Inversion of EM Data to Recover 1-D Conductivity and a Geometric Survey Parameter*: MSc Thesis, University of British Columbia.
- Wannamaker, P. E., Stodt, J. A., Rijo, L., 1987, A stable finite-element solution for two-dimensional magnetotelluric modeling: *Geophys. J. R. Astr. Soc.*, **88**, 277-296.
- Yi, M. J., Kim, J. H., and Chung, S. H., 2003, Enhancing the resolving power of least-squares inversion with active constraint balancing: *Geophysics*, **68**, 931–941.
- Zhdanov, M. S., 2002, *Geophysical Inverse Theory and Regularization Problems*: Elsevier.
- Sasaki, Y., 2004, Three-dimensional inversion of static-shifted magnetotelluric data: *Earth Planets Space*, **56**, 239–248.
- Siripunvaraporn, W., and Egbert, G., 2000, An efficient data-sub space inversion method for 2-D magnetotelluric data: *Geophysics*, **65**, 791–803.
- Smith, J. T., and Booker, J. R., 1988, Magnetotelluric inversion for minimum structure: *Geophysics*, **53**, 1565–1576.
- Smith, J. T., and Booker, J. R., 1991, Rapid relaxation inversion of two- and three-dimensional magnetotelluric data: *J. Geophys. Res.*, **96**, 3905–3922.
- Tikhonov, A. N., and Arsenin, V. Y., 1977, *Solution of Ill-posed Problems*: V. H. Winston and Sons.
- Uchida, T., 1993, Smooth 2-D Inversion for Magnetotelluric data based on statistical Criterion ABIC: *J. Geomagnetism Geoelectricity*, **45**, 841–858.