حل عددی شکل پایستار معادلات تراکم‌پذیر دوبُعدی و ناآب‌ایستایی جوّ با روش فشرده مک‌کورمک

رضا جوان نژاد[1]، امیرحسین مشکواتی[2*]، سرمد قادر[3] و فرهنگ احمدی گیوی[3]

[1] دانشجوی دکتری، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات تهران، گروه هواشناسی، تهران، ایران
[2] استادیار، گروه هواشناسی، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات تهران، ایران
[3] دانشیار، گروه فیزیک فضا، مؤسسه ژئوفیزیک، دانشگاه تهران، ایران

(تاریخ دریافت: ۹۴/۰۴/۰۲، تاریخ پذیرش: ۹۴/۰۸/۱۰)

چکیده

یکی از زمینه‌های پژوهشی مورد توجه در ارتباط با حل عددی معادلات حاکم بر جوّ، افزایش دقت عددی شبیه‌سازی‌ها می‌باشد. در این پژوهش روش مک‌کورمک فشرده مرتبه چهارم با پیشروی زمانی رُنگ-کوتا مورد توجه قرارگرفته است. روش مک‌کورمک فشرده مرتبه چهارم با پیشروی زمانی رُنگ-کوتای چهارمرحله‌ای برای حل عددی معادلات تراکم‌پذیر دوبُعدی و ناآب‌ایستایی جوّ مورداستفاده قرارگرفته و نتایج آن با روش‌های مک‌کورمک مرتبه دوم و مک‌کورمک فشرده مرتبه چهارم با پیشروی زمانی مرتبه دوم مقایسه شده است. برای انجام این مقایسه، از آزمون موردی حباب سرد و حباب گرم در جوّ خنثی استفاده شده است. بررسی پریشیدگی دمای بالقوه (پتانسیلی)، پریشیدگی سرعت قائم و افقی، پریشیدگی فشار و بررسی میزان همگرایی حل عددی، موقعیت لبه جلویی جبهه در این روش‌ها و مقایسه آنها با توجه به فواصل مختلف شبکه‌ای نشان داد، استفاده از روش مک‌کورمک فشرده مرتبه چهارم با پیشروی زمانی رُنگ-کوتای چهارمرحله‌ای در حل عددی نسبت به دو روش دیگر مورد مطالعه برای معادلات تراکم‌پذیر دوبُعدی و ناآب‌ایستایی جوّ منجر به بهبود جواب‌ها می‌شود.

واژه‌های کلیدی: روش مک‌کورمک فشرده، دقت عددی، حباب سرد، حباب گرم

۱ مقدمه

از زمانی که مطالعه بر روی قوانین حاکم بر جوّ به‌صورت علمی مدوّن درآمد و معادلات حاکم بر پدیده‌های جوّی توسط دانشمندان ارائه و گسترش یافت، تلاش برای حل آنها نیز آغاز شد. ازآنجایی‌که حل تحلیلی این معادلات پیچیده نیازمند ساده‌سازی‌های بسیاری است، روش‌های حل عددی توسعه‌یافته‌اند. براین‌اساس، مدل‌های عددی بسیاری برای حل معادلات طراحی شده‌اند که با پیشرفت سریع رایانه‌ها و افزایش سرعت محاسبات، این علم نیز پیشرفت‌های فراوانی داشته است.

در سال‌های اخیر با توجه به افزایش توان محاسباتی رایانه‌ها امکان استفاده از روش‌های عددی با توان تفکیک بالا برای شبیه‌سازی معادلات حاکم بر جریان شاره بیش از پیش فراهم‌شده است. با توجه به عملکرد امیدوارکننده‌-روش‌های فشرده، در سال‌های اخیر گرایش به به‌کارگیری این روش‌ها در شبیه‌سازی شارش‌های جوّی و اقیانوسی با توجه به پیچیدگی ذاتی این شارش‌ها افزایش‌یافته است. ایده روش‌های فشرده به کارهای انجام‌شده توسط نِیومِرُو (۱۹۲۴)، فاکس و گُودوین (۱۹۴۹) در نیمه اول قرن بیستم میلادی برمی‌گردد. البته این روش‌ها بیشتر پس از کار

*نگارنده رابط: ameshkatee@yahoo.com *Corresponding author:

انجام‌شده توسط کرایس و اولیگر (۱۹۷۲) و کار بنیادی انجام‌شده توسط لِل (۱۹۹۲) شناخته‌شده و به‌عنوان ابزاری نیرومند برای شبیه‌سازی معادلات جریان شاره در شاخه‌های مختلف مورداستفاده قرارگرفته‌اند. روش‌های مذکور علاوه بر سایر شاخه‌های مکانیک شاره‌ها در حوزه دینامیک شاره‌های ژئوفیزیکی نیز موردتوجه قرارگرفته‌اند.

ازجمله کارهای انجام‌شده در زمینه شارش‌های جوّی که در آنها از روش‌های عددی با دقت بالا و فشرده استفاده‌شده می‌توان به کارهای انجام‌شده توسط نِیوُن و ریفاگِن (۱۹۷۹)، لِل (۱۹۹۲)، ژانگ و همکاران (۲۰۰۲) و اصفهانیان و همکاران (۲۰۰۵) اشاره کرد که به بررسی استفاده از روش اَبَرفشرده (Super Compact) برای گسسته‌سازی مکانی در مدل‌های عددی جوّ و اقیانوس پرداختند. در تحقیقات محب الحجه و دریچل (۲۰۰۷) روش‌های تفاضل متناهی فشرده و اَبَرفشرده با توجه به کارایی مناسب آنها در شبیه‌سازی معادلات حاکم بر دینامیک شاره‌ها، موردتوجه قرارگرفته است. قادر و همکاران (۲۰۰۹) به بررسی همگرایی طیفی روش‌های اَبَرفشرده از مرتبه دوم تا مرتبه هشتم پرداختند. در کار انجام‌شده توسط گلشاهی و همکاران (۲۰۰۹) روش‌های اَبَرفشرده و فشرده ترکیبی برای گسسته‌سازی مکانی مدل اقیانوسی دولایه‌ای مطرح‌شده است. نتایج کار مذکور حاکی از عملکرد مناسب روش‌های اَبَرفشرده و فشرده ترکیبی برای گسسته‌سازی مکانی شکل خطی شده معادلات آب کم‌عمق دولایه‌ای است.

قادر و نوردشتروم (۲۰۱۵) به حل عددی معادلات آب کم‌عمق بر حسب متغیرهای تاوایی، واگرایی و ارتفاع در مختصات کروی با استفاده از روش‌های فشرده مرتبه چهارم، اَبَرفشرده مرتبه ششم و هشتم و فشرده ترکیبی مرتبه ششم و هشتم پرداختند. در این کار، کارایی روش‌های مذکور از دیدگاه دقت و حجم محاسبات برای آزمون‌های موردی مربوط به معادلات آب کم‌عمق در مختصات کروی مورد بررسی و مقایسه قرار گرفته است.

ازجمله دیگر روش‌های فشرده می‌توان به روش‌های مک‌کورمک فشرده اشاره کرد (هیکسون و ترکل، ۲۰۰۰) و با توجه به اینکه ماهیت این روش‌ها دونقطه‌ای‌اند، علاوه بر کاهش حجم محاسبات، امکان شبیه‌سازی پدیده‌های همراه با شیوهای شدید با توانایی مناسب‌تری فراهم می‌شود. ازجمله کارهای عددی مرتبط که در آنها به حل عددی معادلات تراکم‌پذیر و ناآب‌ایستایی با استفاده از این روش‌ها پرداخته شده می‌توان به لیلی (۱۹۶۲) و مِندز–نُنز و کارول (۱۹۹۴)، اِستراکا و همکاران (۱۹۹۳)، جیرالدو و رستللی (۲۰۰۷) ، مولر و همکاران (۲۰۱۳) و یِلاشا و همکاران (۲۰۱۴) اشاره کرد.

در بررسی‌های میان‌مقیاس حرکت‌های جوّی، مناطق دارای شیو (گرادیان) شدیدِ متغیرهای دینامیکی حاکم بر شارش‌های جوّی، از اهمیت زیادی برخوردارند. از پدیده‌های مهمی که در این مقیاس با خاصیت شیو شدید رخ می‌دهند می‌توان به جبهه، همرفت، توفان تندری، جریان‌گرانی و توفان همرفتی اشاره کرد. این پدیده‌ها معمولاً با افزایش و یا کاهش شدید و ناگهانی کمیت‌های دینامیکی حاکم بر شاره‌ها مانند افزایش فشار و یا کاهش دما و حرکات بالاسو و پایین‌سو شدید همراه هستند (برای مثال بیدختی و همکاران،۱۳۸۳).

چنین شارش‌هایی با توجه به اهمیت و بزرگی حرکات قائم در آنها برخلاف شارش‌های بزرگ‌مقیاس، ماهیت ناآب‌ایستایی دارند. درنتیجه حل تحلیلی معادلات حاکم بر این شارش‌ها به‌جز در موارد اندک و با در نظر گرفتن فرضیات ساده کننده فراوان، امکان‌پذیر نیست و بنابراین برای پیش‌بینی رفتار آینده جوّ و شبیه‌سازی شارش‌های جوّی اغلب از روش‌های عددی استفاده می‌شود (برای مثال تان‌هیل و همکاران، ۱۹۹۷).

اغلب روش‌های فشرده از نوع مرکزی هستند و درواقع چنین روش‌هایی با توجه به ماهیت ذاتی موجود در آنها برای شبیه‌سازی میدان شارش همراه با ناپیوستگی مناسب نیستند. بنابراین اگر در نظر باشد که میدان شارش همراه با ناپیوستگی، با دقت بالا و استفاده از روش‌های تفاضل متناهی فشرده شبیه‌سازی شود، می‌بایست از روشی استفاده کرد که در آن بتوان علاوه برافزایش دقت، تعداد نقاط درگیر در فرمول‌بندی روش تفاضل متناهی را به دو نقطه محدود ساخت. با این دیدگاه روش مک‌کورمک فشردهٔ مرتبهٔ چهارم مورد بررسی قرار می‌گیرد.

برای درک رفتار و نحوه عملکرد روش‌های عددی مورداستفاده در حل معادلات ناآب‌ایستایی جوّ معمولاً از آزمون‌های موردی براساس پدیده‌های مختلفی استفاده می‌شود. تحول حباب سرد (اِستراکا و همکاران، ۱۹۹۳) و گرم (مِندز–نُنز و کارول، ۱۹۹۴) در جوّ خنثی و همچنین شبیه‌سازی جریان گرانی نمونه‌هایی از پدیده‌های استاندارد مورداستفاده برای بررسی عملکرد روش عددی هستند.

حل عددی مسئله تنظیم راسبی غیرخطی ناپایای دوبعدی با استفاده از روش فشرده مک‌کورمک مرتبه چهارم را قادر و همکاران (۱۳۸۹) انجام دادند. قادر و همکاران (۱۳۹۰) شکل پایستار معادلات تراکم‌پذیر دوبُعدی و ناآب‌ایستایی جوّ را با استفاده از روش مک-کورمک مرتبه دوم حل کردند که از نتایج آن برای مقایسهٔ عملکرد روش‌های به کارگرفته شده در این مطالعه استفاده خواهد شد.

در کار حاضر در روش‌شناسی ابتدا فرمول‌بندی روش مک‌کورمک فشرده مرتبه چهارم با پیشروی زمانی رُنگ–کوتای چهارمرحله‌ای به‌طور خلاصه بیان می‌شود. سپس نتایج مربوط به نحوه اعمال و چگونگی حل عددی شکل پایستار معادلات تراکم‌پذیر، دوبعدی و ناآب‌ایستایی جوّ بی‌دررو با استفاده از این روش مطرح می‌شود. همچنین به مقایسه کیفی تعدادی از نتایج روش‌های مختلف مک کورمک خواهیم پرداخت.

۲ روش مک‌کورمک فشرده

نحوه به‌دست آوردن و جزئیات فرمول‌بندی روش‌های مک‌کورمک مرتبه دوم و فشرده مرتبه چهارم با پیشروی زمانی مرتبه دوم در کارهای هیکسون و ترکل (۲۰۰۰)، قادر و همکاران (۱۳۸۹، ۱۳۹۰) بیان‌شده است. هم‌چنین روش مک‌کورمک فشرده مرتبه چهارم با پیشروی زمانی رُنگ–کوتای چهارمرحله‌ای را هیکسون و ترکل (۲۰۰۰) به‌صورت مشروح بیان کرده‌اند. در اینجا فقط فرمول‌بندی روش مک‌کورمک فشرده مرتبه چهارم با پیشروی زمانی رُنگ-کوتای چهارمرحله‌ای به‌صورت خلاصه بیان می-شود.

۲-۱ پیشروی زمانی

برای معرفی این روش، ابتدا صورت کلی شکل پایستار معادلات حاکم را به شکل زیر در نظر می‌گیریم:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+F(u)=0 \ , \qquad (۱)$$

که در رابطه بالا u متغیر پیش‌یابی و F تابعی از u است، که با توجه به تعداد بُعدهای مسئله می‌تواند از یک تا سه بعد داشته باشد. این تابع همچنین شامل مشتق اول در راستای محورهای مختصات مختلف است. شکل گسسته زمانی معادله (۱) با استفاده از روش مک‌کورمک مرتبه دوم در زیر آمده است:

$$U^{(1)}=U^{n}-\Delta t\, \delta^{F}[U^{n}], \qquad (۲)$$

$$U^{n+1}=\frac{1}{2}(U^{n}+U^{(1)}-\Delta t\, \delta^{B}[F(U^{(1)})]), \qquad (۳)$$

که در این رابط δ^{F} و δ^{B} به‌ترتیب عملگرهای پس‌رو و پیشرو مکانی و Δt گام زمانی است. همان‌طور که ملاحظه

می‌شود روش مک‌کورمک مرتبه دوم، دومرحله‌ای و صریح (explicit) است. این روش دارای دقت مرتبه دوم زمانی است و در صورت استفاده از عملگرهای پس رو و پیشرو مکانیِ ضمنی فشرده دارای دقت مرتبه چهارم مکانی برای معادلات خطی است (هیکسون و ترکل، ۲۰۰۰).

۲-۲ روش مک‌کورمک فشرده مرتبه چهارم با پیشروی زمانی رُنگ-کوتا

روش مک‌کورمک فشرده مرتبه چهارم با پیشروی زمانی رُنگ-کوتا دارای سه روش چند مرحله‌ای است. در این میان روش مک‌کورمک فشرده مرتبه چهارم با پیشروی زمانی رُنگ-کوتای چهارمرحله‌ای در این پژوهش موردتوجه قرارگرفته است. شکل عمومی گسسته این روش چهارمرحله‌ای در روابط زیر آمده است (هیکسون و ترکل، ۲۰۰۰):

$$\begin{aligned}
&h^{(1)} = -\Delta t\, \delta^{F}[F(U^{n})], \\
&h^{(2)} = -\Delta t\, \delta^{B}[F(U^{n} + \alpha_2 h^{(1)})], \\
&h^{(3)} = -\Delta t\, \delta^{F}[F(U^{n} + \alpha_3 h^{(2)})], \\
&h^{(4)} = -\Delta t\, \delta^{B}[F(U^{n} + \alpha_4 h^{(3)})] \quad , \\
&U^{n+1} = U^{n} + \beta_1 h^{(1)} + \beta_2 h^{(2)} \\
&+ \beta_3 h^{(3)} + \beta_4 h^{(4)},
\end{aligned} \tag{۴}$$

که مقدار ضرایب در روابط (۴) به ترتیب $\alpha_2 = \frac{1}{2}$، $\alpha_3 = \frac{1}{2}$، $\alpha_4 = 1$، $\beta_1 = \frac{1}{6}$، $\beta_2 = \frac{1}{3}$، $\beta_3 = \frac{1}{3}$، $\beta_4 = \frac{1}{6}$ هستند.

عملگرهای پس‌رو و پیش‌رو در روش مک‌کورمک فشرده مرتبه چهارم برای تابع دلخواه f در رابطه:

$$\begin{aligned}
&a\, D_{i-1}^{B} + (1-a)\, D_{i}^{B} = (\frac{1}{\Delta x})(f_{i} - f_{i-1}), \\
&a\, D_{i+1}^{F} + (1-a)\, D_{i}^{F} = (\frac{1}{\Delta x})(f_{i+1} - f_{i}),
\end{aligned} \tag{۵}$$

نشان داده شده‌اند که در آن ضریب $a = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}}$، Δx فاصله شبکه‌ای، D مشتق مکانی تابع و بالانویس‌های F و B به‌ترتیب نمایانگر عملگرهای پیشرو و پس‌رو برای برآورد مشتق اول هستند. جمع این دو عملگر عبارتی با دقت مرتبه چهارم است. این نحوه اعمال عملگرها اساس تفاوت میان روش فشرده مک‌کورمک مرتبه چهارم با روش مک‌کورمک مرتبه دوم است.

۳-۲ معادلات حاکم

با فرض بی دررو و ناوشکسان بودن جوّ، شکل برداری و پایستار معادلات حاکم برای یک جوّ ناآب‌ایستا و تراکم-پذیر دوبُعدی در دستگاه دکارتی به شکل زیر خواهند بود (مِندز-نونز و کارول، ۱۹۹۴):

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{E}}{\partial x} + \frac{\partial \vec{F}}{\partial z} = \vec{H}, \tag{۶}$$

که بردارهای مربوط به رابطه (۶) به شکل زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned}
&\vec{V} = (\rho, \rho u, \rho w, \rho\theta)^{T}, \\
&\vec{E} = (u\rho, u\rho u + p, u\rho w, u\rho\theta)^{T}, \\
&\vec{F} = (w\rho, w\rho u, w\rho w + p, w\rho\theta)^{T}, \\
&\vec{H} = (0, 0, -\rho g, 0)^{T},
\end{aligned} \tag{۷}$$

که در آن نیروهای کوریولیس نادیده گرفته شده‌اند (دوران، ۲۰۱۰):

$$\frac{d(\ )}{dt} = \frac{\partial(\ )}{\partial t} + \vec{V}.\vec{\nabla}(\ ), \tag{۸}$$

و متغیرهای مجهول در این دستگاه معادلات شامل u، ρ، p، w و θ به‌ترتیب سرعت افقی، چگالی، فشار، سرعت قائم و دمای بالقوه (پتانسیلی) هستند.

برای حل عددی و تحلیل معادلات دیفرانسیلی خطی و غیرخطی وابسته به زمان نیاز به شرایط اولیه است به‌طوری که برای تمام متغیرهای میدان مقدار اولیه در نظر گرفته می شود و با استفاده از حل عددی و یا تحلیلی در صورت وجود جواب، مقادیر متغیرها در زمان‌های بعد محاسبه می شود. با توجه به اینکه دستگاه معادلات انتخاب شده در این پژوهش، معادلات اویلر ناپایا می‌باشد، می‌بایست برای مقادیر مجهول در این دستگاه معادلات مقادیر اولیه انتخاب شود.

در شبیه سازی جوّ ناآب‌ایستا در دو حالت تراکم پذیر و تراکم ناپذیر عموماً جوّ در زمان نخست در حالت سکون و در توازن کامل آب‌ایستایی در نظر گرفته می‌شود. بنابراین اگر شرایط اولیه و یا رفتار جوّ در آغاز حل عددی به صورت جوّ ساکن و در توازن آب‌ایستایی مطلق باشد، آنگاه کمیت‌های میدان به صورت زیر می باشند:

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \qquad w = 0.0 \qquad u = 0.0 \ , \tag{۹}$$

که رابطه سوم از روابط بالا، همان تقریب آب‌ایستایی می باشد. چگالی به کار رفته، چگالی یک لایه از شاره می‌باشد و نباید این مفهوم با چگالی یک نقطه در روش تفاضل متناهی اشتباه شود.

فرآیند آغازگری در این پژوهش بدین ترتیب است که از فشار سطح زمین که با p_s نشان داده می‌شود به‌عنوان ورودی اولیه در مدل استفاده می‌شود.

فشار سطح زمین در اینجا برابر با $p_s = 1000\,\text{hPa}$ در نظر گرفته می‌شود. سپس از میدان دمای بالقوه اولیه به‌عنوان ورودی دوم مدل استفاده می‌شود.

هدف از آغازگری این است که، ابتدا با دانستن میدان دمای بالقوه و فشار سطح زمین، فشار در تمام حوزه محاسباتی به‌دست آید و سپس با دانستن میدان فشار در کل حوزه با استفاده از رابطه مربوط به توازن آب‌ایستایی، چگالی در کل حوزه به‌دست آید. برای تحقق این هدف، تابع ترمودینامیکی اکسنر با رابطه زیر بیان می شود (مندز-نونز و کارول، ۱۹۹۴):

$$\pi = \left(\frac{p}{p_s}\right)^{\frac{R_d}{C_p}} , \tag{۱۰}$$

که اگر از تابع اکسنر نسبت به ارتفاع قائم مشتق گرفته شود و همچنین از معادله آب‌ایستایی نیز استفاده شود، رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\frac{d\pi}{dz} = -\frac{g}{C_p \theta(z)} , \tag{۱۲}$$

که در این مرحله می‌بایست از رابطه بالا به‌طور عددی بین دو تراز z_1 و z_2 با دو دمای بالقوه متناظر $\theta(z_1)$ و $\theta(z_2)$ انتگرال‌گیری شود. مطابق با روشی که کارول و همکاران (۱۹۸۷) بیان کرده‌اند، نتیجه این انتگرال‌گیری با روابط زیر بیان می شود:

$$\pi_2 - \pi_1 = \begin{cases} -\dfrac{g}{C_p \theta}(z_2 - z_1), & \theta(z_1) = \theta(z_2), \\[2ex] -\dfrac{g(z_2 - z_1)}{C_p(\theta(z_2) - \theta(z_1))} \ln\left(\dfrac{\theta(z_2)}{\theta(z_1)}\right), & \theta(z_1) \neq \theta(z_2), \end{cases} \tag{۱۳}$$

که در آن π_1 و π_2 به ترتیب توابع اکسنر ترازهای z_1 و z_2 می‌باشند. با معلوم بودن فشار سطح p_s در رابطه (۱۰) تابع اکسنر سطح زمین پیدا می‌شود. سپس با استفاده از

رابطه (۱۲) و با توجه به نیمرخ دمای بالقوه در هر لایه، توابع اکسنر ترازهای بعدی از روی تابع اکسنر سطح زمین تعیین می‌شود. اکنون با توجه به اینکه تابع اکسنر در تمام ترازها معلوم است، با توجه به رابطه (۱۰) فشار تمام ترازها از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$P = P_s \pi^{\frac{C_p}{R_d}} , \tag{۱۴}$$

اکنون میدان فشار P و دمای بالقوه θ در تمام نقاط حوزه معلوم می‌باشند.

در زمان انتگرال‌گیریِ شکل اویلری معادلات حاکم بر شاره، بر اثر برهم‌کنش غیرخطی، ناپایداری غیرخطی ناشی از خطای دگرنامیدن به‌وجود می‌آید. این ناپایداری غیرخطی را می‌توان با روش‌های مختلفی ازجمله افزودن جمله‌ای میراکننده به معادله مهار کرد. از طرفی روش مک‌کورمک خود دارای میرایی ذاتی است که بخشی از اندرکنش‌های غیرخطی را کنترل می‌کند.

با وجود این به علت پیچیدگی میدان شاره در شارش‌های ناآب‌ایستا و تراکم‌پذیر، از جمله میرایی به‌صورت زیر استفاده شده است:

$$\overrightarrow{D} = (0, v\nabla.\rho\nabla u, v\nabla.\rho\nabla w, v\nabla.\rho\nabla\theta)^T , \tag{۱۵}$$

که در رابطه (۱۵) v ضریب میرایی است. این ضریب با آزمایش عددی به‌دست آمده و به مقدار تفکیک انتخاب‌شده در حل عددی بستگی دارد. البته ضریب میرایی کمینه برای هریک از آزمایش‌های موردی مطرح‌شده در این پژوهش به‌دست آمده است. در حل عددی رابطه (۱۵) به سمت راست رابطه (۶) اضافه می‌شود.

۳ حل عددی

ازجمله آزمون‌های موردی پرکاربرد برای حل عددی معادلات تراکم پذیر و ناآب‌ایستای جوّ می‌توان به شبیه‌سازی تحول حباب گرم، حباب سرد و جریان گرانی اشاره کرد. در کار حاضر به ارائه نتایج مربوط به سه آزمون موردی حباب سرد در جوّ خنثی با شرایط مرزی سخت، حباب گرم در جوّ خنثی با شرایط مرزی نابازتابی، حباب گرم در جوّ خنثی با شرایط مرزی سخت برای حل عددی معادلات تراکم پذیر و ناگران‌روی جوّ با استفاده از روش مک‌کورمک فشرده مرتبه چهارم با پیشروی زمانی رُنگ-کوتای چهار مرحله‌ای پرداخته می‌شود.

۴ حل عددی آزمون موردی حباب سرد در جوّ خنثی با شرایط مرزی سخت

ازجمله کارهای عددی پراستناد در زمینه شبیه‌سازی حباب سرد می‌توان به کار استراکا و همکاران (۱۹۹۳) اشاره کرد. این شبیه‌سازی با استفاده از حل عددی معادلات تراکم پذیر و ناآب‌ایستای جوّ انجام می‌شود. در پژوهش حاضر نیز همانند استراکا حوزه انتخابی برای حل عددی تحول حباب سرد شبکه‌ای مستطیل شکل با ابعاد افقی ۲۵۶۰۰ متر و قائم ۶۴۰۰ متر است. همه مرزهای این حوزه محاسباتی، سخت در نظر گرفته می‌شود. اعمال این شرط با استفاده از تجارب عددی لی‌لی (۱۹۶۲)، که معرف قید ناگران‌رو و عایق برای مرز سخت است، و هم‌چنین گاتلیب و تِرکل (۱۹۷۶) با برون‌یابی خطی از نقاط داخلی حوزه انجام می‌شود. برای شبیه‌سازی حباب سرد از پریشیدگی میدان دمای اولیه استفاده می‌شود. در آزمون موردی حباب سرد شرایط پریشیدگی اولیه میدان دما به‌صورت زیر تعریف می‌شود (اِستراکا و همکاران، ۱۹۹۳):

$$\Delta T = \begin{cases} 0.0^\circ C & \beta > 1.0 \\ -15.0^\circ C \cos(\frac{\pi\beta}{2}) & \beta \le 1.0 \end{cases} \tag{۱۶}$$

در رابطه (۱۶) پارامتر β با رابطه زیر تعریف می‌شود:

$$\beta = \sqrt{\left(\frac{x - x_c}{x_r}\right)^2 + \left(\frac{z - z_c}{z_r}\right)^2}, \tag{۱۷}$$

که در آن x_r و z_r معرف شعاع حباب در دو راستای x و z، و x_c و z_c نیز معرف مختصات مرکز حباب می‌باشند. در این پژوهش چهار کمیت ذکر شده در رابطه (۱۵) دارای اندازه‌های زیر می‌باشند:

$$x_c = 0.0km, \qquad z_c = 3.0km,$$
$$x_r = 4.0km, \qquad z_r = 2.0km, \tag{۱۸}$$

که پریشیدگی در میدان دمای بالقوه را نیز می‌توان از روی پریشیدگی میدان دما با استفاده از رابطه $T = \pi\theta$ به‌دست آورد. کمترین دما در این حباب سرد ۱۵- درجه بوده و در مرکز حباب با مختصات $x = 0.0\,\text{km}$ و $z = 3.0\,\text{km}$ قرار دارد. در محاسبات پریشیدگی دمای بالقوه برای یک حباب بایستی به گونه‌ای اعمال شود که میدان اولیه فشار دست‌خوش تغییر و پریشیدگی شود. برای رسیدن به این هدف پریشیدگی در چگالی به میدان اولیه طوری اعمال می‌شود که سمت راست رابطه زیر که تابعی از فشار است، ثابت باقی بماند:

$$\rho\theta = \frac{P}{R_d}\left(\frac{P_0}{P}\right)^{\frac{R_d}{C_p}}, \tag{۱۹}$$

که در این رابطه R_d ثابت گازها برای هوای خشک است. میدان دمای بالقوه در رابطه (۱۹) از دو بخش میانگین و پریشیده تشکیل شده است که با رابطه زیر تعریف می‌شود:

$$\theta = \theta(z) + \theta'. \tag{۲۰}$$

در رابطه بالا $\theta(z)$ مربوط به حالتی است که جوّ در توازن آب‌ایستایی قرار دارد. با توجه به اینکه در جوّ خنثی مقدار اولیه θ با ارتفاع ثابت است، در کار حاضر $\theta(z)$ برابر با ۳۰۰ کلوین در نظر گرفته‌شده است. با معلوم بودن میدان اولیه دما، میدان پریشیدگی دمای بالقوه با استفاده از رابطه (۲۰) به‌دست می‌آید.

۴-۱ نتایج حل عددی مربوط به حباب سرد در جوّ خنثی

برای حل عددی حباب سرد از تفکیک‌های شبکه‌ای ۲۵، ۵۰، ۱۰۰، ۲۰۰، ۴۰۰ و ۸۰۰ متر که به‌ترتیب معادل تعداد نقاط شبکه‌ای (۱۰۲۵×۲۵۷)، (۵۱۳×۱۲۹)، (۲۵۷×۶۵)، (۱۲۹×۳۳)، (۶۵×۱۷) و (۳۳×۹) در دو راستای افقی و قائم می‌باشند، استفاده شده است. با توجه به شرط پایداری عددی گام‌های زمانی متناظر با این تفکیک‌ها به ترتیب ۰/۰۱۵۶۲۵، ۰/۰۳۱۲۵، ۰/۰۶۲۵، ۰/۱۲۵، ۰/۲۵، ۰/۵ ثانیه هستند. برای ایجاد امکان مقایسه نتایج با سایرین، انتگرال‌گیری زمانی معادلات برای ۹۰۰ s انجام شده است.

در شکل‌های ۱-الف تا ۱-د تحول زمانی میدان پریشیدگی دمای بالقوه از زمان اولیه تا زمان ۹۰۰s حاصل از حل عددی و به کمک روش مک‌کورمک فشرده مرتبه چهارم با پیشروی زمانی رُنگ–کوتا و هم‌چنین در شکل ۲ نتایج استراکا و همکاران (۱۹۹۳) نشان داده شده است.

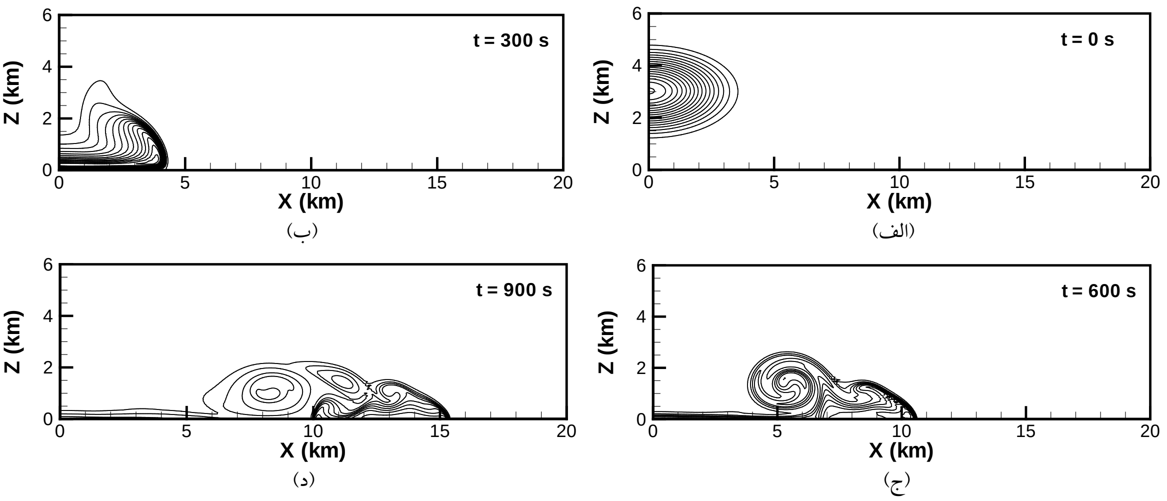
همان‌طور که در شکل‌های ۱-الف تا ۱-د مشاهده می‌شود از لحاظ کیفی مطابقت مناسبی بین نتایج عددی حاصل از روش مک‌کورمک فشرده مرتبه چهارم با پیشروی زمانی رُنگ–کوتا و نتایج عددی اِستراکا و همکاران (۱۹۹۳) در شکل ۲ وجود دارد. در ادامه برای اینکه مقایسه کمّی بین نتایج عددی حاصل از این روش و نتایج به‌دست آمده استراکا و همکاران (۱۹۹۳) صورت بگیرد، در جدول ۱ مقادیر بیشینه و کمینه میدان

پریشیدگی دمای بالقوه در زمان ۹۰۰s حاصل از روش‌های مک‌کورمک مرتبه دوم و مک‌کورمک فشرده مرتبه چهارم با پیشروی زمانی مرتبه دوم و پیشروی زمانی رُنگ-کوتای چهارمرحله‌ای ارائه شده‌اند.

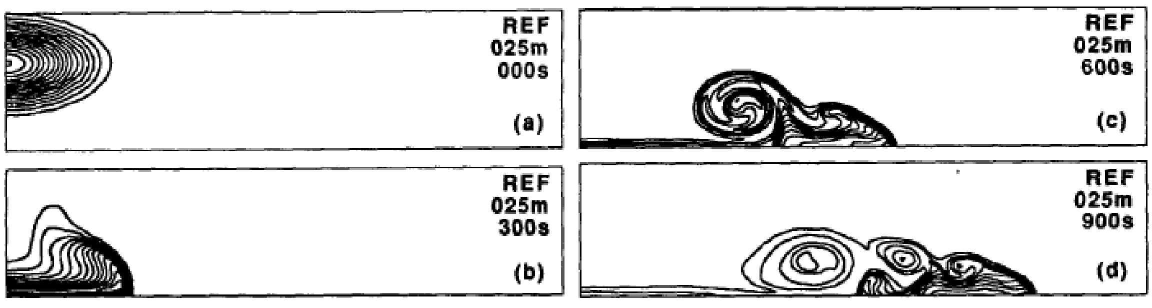
در این جدول مطابقت خوبی بین نتایج حاصل از روش‌های ذکر شده عددی به خصوص پیشروی زمانی رُنگ–کوتای چهارمرحله‌ای و نتایج اِستراکا و همکاران (۱۹۹۳) وجود دارد.

جواب رُنگ–کوتای چهارمرحله‌ای با $\Delta x = \Delta z = 25m$ متناظر با تفکیک (۱۰۲۵×۲۵۷) به ترتیب (الف، ب، ج، د) است. واحدها روی هر دو محور مختصات برحسب کیلومتر هستند. پربندهای هم دما در بازه $[-16.5^{\circ}\mathrm{C}, -0.5^{\circ}\mathrm{C}]$ قرار دارند و اختلاف بین دو پربند هم‌دمای متوالی $1^{\circ}\mathrm{C}$ و $\nu = 75\,\mathrm{m^2 s^{-1}}$ است. درونی‌ترین پربند دارای پریشیدگی دمای بالقوه $-16.5^{\circ}\mathrm{C}$ است.

در شکل‌های ۳-ب، ۳-د، ۳-و، ۳-ح میدان پریشیدگی دمای بالقوه در زمان ۹۰۰s حاصل از حل عددی و به کمک روش مک‌کورمک فشرده مرتبه چهارم با پیشروی زمانی رُنگ–کوتا نشان داده شده است. هم‌چنین در شکل‌های ۳-الف، ۳-ج، ۳-ه، ۳-ز نتایج اِستراکا و همکاران (۱۹۹۳) برای این فواصل شبکه‌ای نشان داده شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود در روش مک‌کورمک فشرده مرتبه چهارم با پیشروی زمانی رُنگ–کوتا با افزایش فاصله شبکه‌ای توانایی تفکیک شکل یاخته‌های دایره‌ای حباب سرد نسبت به نتایج استراکا بهبود یافته است.



شکل ۱. تحول زمانی پریشیدگی دمای بالقوه برای حباب سرد در جوّ خنثی با استفاده از روش مک‌کورمک فشرده مرتبه چهارم با پیشروی زمانی **رُنگ–کوتا**.



شکل ۲. نتایج ارائه شده توسط استراکا و همکاران (۱۹۹۳) برای حباب سرد در جوّ خنثی.

همان‌طور که در شکل ۴ مشاهده می‌شود در فواصل شبکه‌ای بزرگ روش عددی مک‌کورمک فشرده مرتبه چهارم با پیشروی زمانی رُنگ–کوتا دارای دقت و توان تفکیک بالاتری نسبت به دو روش مک‌کورمک مرتبه دوم و مک‌کورمک فشرده مرتبه چهارم با پیشروی زمانی مرتبه دوم است. در ادامه به بررسی دقتِ نتایج حل عددی می پردازیم.

۴-۲ بررسی دقت

در این بخش به بررسی دقت روش مک‌کورمک فشرده مرتبه چهارم با پیشروی زمانی رُنگ–کوتا چهار مرحله‌ای در مقایسه با روش مک‌کورمک مرتبه دوم و مک-کورمک فشرده مرتبه چهارم با پیشروی زمانیِ مرتبه دوم می‌پردازیم. برای‌این‌که بتوان درک بهتری از میزان تفاوت دقت بین روش‌های مورد بررسی به‌دست آورد و هم‌چنین از نحوه همگرایی روش‌های مختلف اطلاع پیدا کرد، از نُرم L_2 در دو بُعد برای محاسبه میزان خطای هریک از روش‌ها استفاده می‌شود. این نُرم به‌صورت زیر تعریف می‌شود (اِستراکا و همکاران، ۱۹۹۳):

$$L_2(\theta') = \sqrt{\frac{1}{NXNZ}\sum_{i=1}^{NX}\sum_{k=1}^{NZ}[\theta'(x_i, y_k) - \theta'_{ref}(x_{ii} - y_{kk})]} \quad (۲۱)$$

که در این رابطه NX و NZ تعداد نقاط شبکه در راستای x و z هستند. i و k نقاط شبکه‌ای برای هر حل عددی به‌خصوص هستند. ii و kk نقاط شبکه‌ای حل مرجع مربوط به حلِ با نقاط شبکه‌ای i و k است. در این بررسی فاصله شبکه‌ای مرجع (پایین‌نویس ref) برابر با ۲۵ متر درنظر گرفته شد.

با توجه به اینکه در این بررسی علاوه بر گسسته‌سازی مکانی از گسسته‌سازی زمانی نیز استفاده شد، از دو نُرم مکانی و زمانی برای بررسی دقت در زمان و مکان استفاده‌شده است.

برای به‌دست آوردن نُرم مکانی از گام زمانی $\Delta t =$ ۰/۰۰۷۸۱۲۵s و فاصله شبکه‌ای ۲۵، ۵۰، ۱۰۰، ۲۰۰، ۴۰۰ متر استفاده‌شده و برای به‌دست آوردن نُرم زمانی از گام‌های زمانی ۰/۰۱۵۶۲۵، ۰/۰۳۱۲۵، ۰/۰۶۲۵، ۰/۰۱۲۵، ۰/۲۵، ۰/۵ ثانیه و تفکیک شبکه‌ای ۲۰۰ متر استفاده شده است. گام زمانی مربوط به فاصله شبکه‌ای ۲۵ متری برای حل مرجع انتخاب‌شد.

شکل ۵–الف نُرم زمانی حاصل از سه روش مک-کورمک را نشان می دهد. همان‌طور که مشاهده می‌شود، روش عددی مک‌کورمک فشرده مرتبه چهارم با پیشروی

جدول ۱. مقایسه مقادیر بیشینه و کمینه میدان پریشیدگی دمای بالقوه حاصل از روش‌های مک‌کورمک مرتبه دوم، فشرده مرتبه چهارم با پیشروی زمانی مرتبه دوم و پیشروی زمانی رُنگ–کوتای چهارمرحله‌ای و هم‌چنین استراکا و همکاران (۱۹۹۳) با $\Delta x = \Delta z = 25m$ و در زمان $t = 900s$ برای آزمون موردی حباب سرد.

روش	θ_{max}	θ_{min}
مک‌کورمک مرتبه دوم	۰/۰	–۹/۶۸
مک‌کورمک فشرده مرتبه چهارم با پیشروی زمانی مرتبه دوم	۰/۰	–۹/۵۹
مک‌کورمک فشرده مرتبه چهارم با پیشروی زمانی رُنگ–کوتای چهار مرحله‌ای	۰/۰	–۹/۵۸
اِستراکا و همکاران (۱۹۹۳)	۰/۰	–۹/۷۷

زمانی رُنگ–کوتای چهارمرحله‌ای از خطای کمتری برخوردار است.

در شکل ۵–ب نُرم مکانی حاصل از سه روش مک-کورمک مشاهده می‌شود. نتیجه حاکی از همگرایی در روش‌های عددی مختلف است. البته می‌توان دید که روش‌های عددی مک‌کورمک فشرده مرتبه چهارم نسبت به روش مرتبه دوم از خطای کمتری برخوردارند.

در بخش بعدی مشابه با کار انجام‌شده توسط احمد و لیندرمن (۲۰۰۷) موقعیت لبه جلویی جبهه میدان پریشیدگی دمای بالقوه در زمان $t = 900\,\mathrm{s}$ با استفاده از روش مک‌کورمک فشرده مرتبه چهارم با پیشروی زمانی رُنگ–کوتای چهارمرحله‌ای مشخص شده است. همان طور که در شکل ۶ مشاهده می‌شود موقعیت جبهه در فاصله ۱۵۴۲۱ متری قرار دارد. در جدول ۲ موقعیت لبه جلویی جبهه (Front location) حاصل از میدان پریشیدگی دمای بالقوه در زمان $t = 900\,\mathrm{s}$ با استفاده از روش‌های مک‌کورمک مرتبه دوم، مک‌کورمک فشرده مرتبه چهارم با پیشروی زمانی مرتبه دوم و مک‌کورمک فشرده مرتبه چهارم با پیشروی زمانی رُنگ–کوتای چهارمرحله‌ای آمده است.

هم‌چنین بررسی‌ها در این پژوهش نشان داد کمترین مقدار ضریب ν برای روش عددی مک‌کورمک مرتبه دوم $30\,\mathrm{m^2s^{-1}}$ بوده و برای روش‌های های الف، ج، ه، ز) در زمان $t = 900\,\mathrm{s}$ پربندهای هم‌دما در بازه $[-16.5^\circ\mathrm{C}, -0.5^\circ\mathrm{C}]$ قرار دارند و اختلاف بین دو پربند هم‌دمای متوالی $1^\circ\mathrm{C}$ و $\nu = 75\,\mathrm{m^2s^{-1}}$ است.

در روش‌های مک‌کورمک فشرده مرتبه چهارم با پیشروی زمانی‌مرتبه دوم و پیشروی زمانی رُنگ–کوتای چهارمرحله‌ای ν برابر با $8\,\mathrm{m^2s^{-1}}$ است.

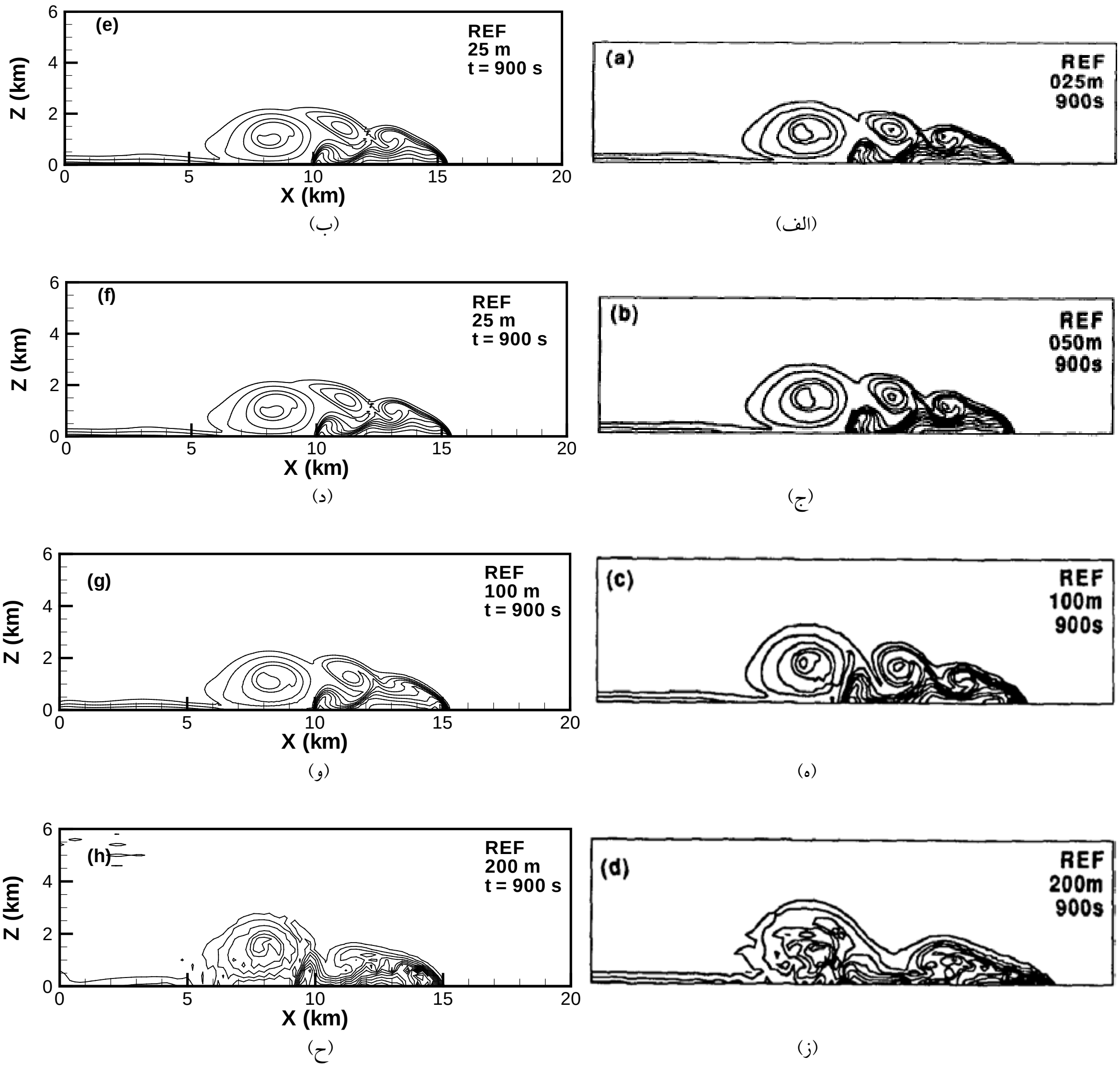
به‌علاوه آزمایش‌های عددی نشان داد، کاهش عبارت اتلافی سبب بالا رفتن تفکیک یاخته‌های دایره‌ای شده و در زمان انتهایی تعداد یاخته‌های دایره‌ای بیشتری قابل مشاهده است. این نتایج با کار ارائه شده توسط احمد و لیندرمن (۲۰۰۷) مطابقت دارد.

۵ حل عددی آزمون موردی حباب گرم در جوّ خنثی با شرایط مرز نابازتاب

از جمله کارهای عددی پراستناد برای درک توانمندی روش‌های عددی مورد استفاده در حل معادلات تراکم-پذیر ناآب‌ایستای جوّ شبیه‌سازی حباب گرم می‌باشد. مطالعه پدیده حباب گرم به دو روش آزمایشگاهی و عددی سالیان دراز است که نظر دانشمندان و محققین را به خود جلب کرده است. از آن جمله می‌توان به کارهای انجام شده توسط لِل (۱۹۹۲)، کارپنتر و همکاران (۱۹۹۰)، مندز و کارول (۱۹۹۴) ، احمد و لیندرمن (۲۰۰۷)، مولر و همکاران (۲۰۱۳) و بسیاری از محققین اشاره کرد. در این بخش به ارائه نتایج مربوط به آزمون موردی حباب گرم در جوّ خنثی می‌پردازیم.

منظور از شرایط جوّ خنثی این است که آهنگ کاهش دما برای محیط برابر با آهنگ کاهش دمای بی دررو بوده به طوری که بسامد شناوری برابر با صفر باشد.

حباب گرم یک ترمال از نوع همرفت شناوری از چشمه آنی بوده و به صورت توده شناوری قائم ناگهان آزاد می-شود. این توده شناوری حرکتی به صورت قائم و دارای شکل ستونی دارد. در این پژوهش نیز همانند کار مندز–نونز و کارول (۱۹۹۴) حوزه انتخابی برای حل عددی تحول حباب گرم شبکه‌ای مستطیل شکل با ابعاد ۴۰۰۰۰ متر طول و۱۵۰۰۰ متر ارتفاع می‌باشد. مرز پایین حوزه محاسباتی همانند جوّ واقعی که زمین می‌باشد، سخت در نظر گرفته می‌شود.

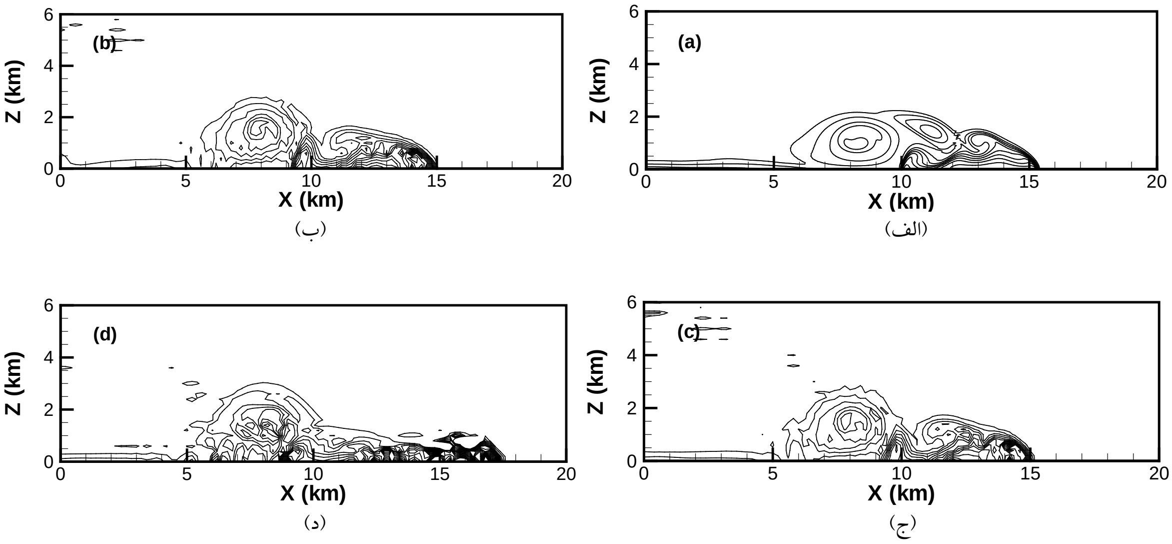


شکل ۳. مقایسه پریشیدگی دمای بالقوه حاصل از روش مک‌کورمک فشرده مرتبه چهارم با پیشروی زمانی رُنگ–کوتای چهارمرحله‌ای (سمت چپ شکل‌های ب، د، و، ح) و استراکا و همکاران (۱۹۹۳) (سمت راست شکل‌های الف، ج، ه، ز) در زمان $t = 900\,\mathrm{s}$. پربندهای هم‌دما در بازه $[-16.5^\circ\mathrm{C}, -0.5^\circ\mathrm{C}]$ قرار دارند و اختلاف بین دو پربند هم‌دمای متوالی $1^\circ\mathrm{C}$ و $\nu = 75\,\mathrm{m^2s^{-1}}$.

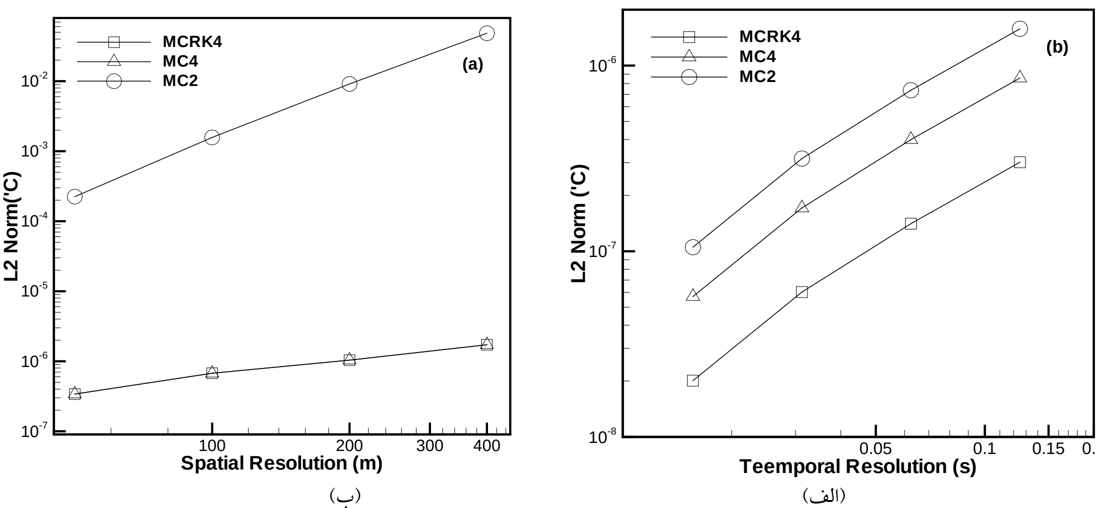
جدول ۲. مقایسه مقادیر موقعیت لبه جلویی جبهه حاصل از روش‌های مک‌کورمک مرتبه دوم و فشرده مرتبه چهارم با پیشروی زمانی‌مرتبه دوم و پیشروی زمانی رُنگ–کوتای چهارمرحله‌ای برای حباب سرد در زمان $t = 900\mathrm{s}$ برای تفکیک $\Delta x = \Delta z = 25\,\mathrm{m}$ و $\nu = 75\,\mathrm{m^2s^{-1}}$.

روش	موقعیت لبه جلویی جبهه (متر)
مک‌کورمک مرتبه دوم	۱۵۴۸۷
مک‌کورمک فشرده مرتبه چهارم با پیشروی زمانی مرتبه دوم	۱۵۴۵۱
مک‌کورمک فشرده مرتبه چهارم با پیشروی زمانی رُنگ–کوتای چهارمرحله‌ای	۱۵۴۲۱

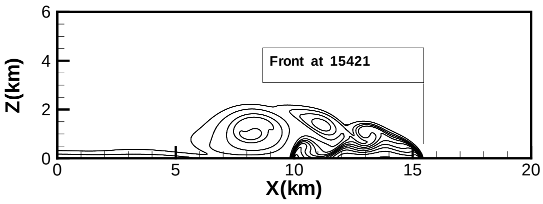
مرزهای کناری و بالایی، باز یا نابازتاب در نظر گرفته می‌شود. مرز باز به این معنی است که امواج به‌وجود آمده در حوزه، مانند موج صوتی بتوانند حوزه را بدون اینکه اثری بر شرایط داخل آن بگذارند، ترک کنند. این شرط با استفاده از تجارب عددی مندز–نونز و کرول (۱۹۹۴) برای مرز نابازتاب حاصل شد.



شکل ٤. مقایسه میدان پریشیدگی دمای بالقوه با حل مرجع (الف)، میدان دمای بالقوه پریشیده حاصل از روش‌های مک‌کورمک فشرده مرتبه چهارم با پیشروی زمانی رُنگ–کوتای چهارمرحله‌ای (ب)، مک‌کورمک فشرده مرتبه چهارم با پیشروی زمانی مرتبه دوم (ج)، و مک‌کورمک مرتبه دوم (د) با $\Delta x = \Delta z = 200m$ متناظر با تعداد نقاط شبکه (۱۲۹×۳۳) در زمان $t = 900\,\mathrm{s}$ و پربندهای هم‌دما در بازه $[-16.5^\circ\mathrm{C}, -0.5^\circ\mathrm{C}]$ قرار دارند. اختلاف بین دو پربند هم‌دمای متوالی ۱ درجه سلسیوس و $\nu = 75\,\mathrm{m^2 s^{-1}}$ است.



شکل ۵. نُرم L_2 برای میدان پریشیدگی دمای بالقوه با استفاده از روش‌های عددی مورداستفاده در کار حاضر (الف) نرم زمانی و (ب) نرم مکانی.



شکل ٦. موقعیت لبه جلویی جبهه برای میدان پریشیدگی دمای بالقوه حاصل از روش مک‌کورمک فشرده مرتبه چهارم با پیشروی زمانی رُنگ-کوتای چهارمرحله‌ای برای حباب سرد در زمان $t = 900\text{s}$ و برای تفکیک $\Delta x = \Delta z = 25\text{m}$ متناظر با تعداد نقاط شبکه (۲۵۷×۱۰۲۵).

برای شبیه‌سازی حباب گرم از پریشیدگی میدان دمای اولیه استفاده می‌شود. در این آزمون، شرایط اولیه میدان پریشیدگی دما به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\Delta T = 6.6\cos^2(\frac{\pi\beta}{2}) \qquad \beta \le 1.0, \tag{۲۲}$$

که در رابطه (۲۲) پارامتر β از رابطه (۱۷) به‌دست می‌آید با این تفاوت که در این آزمون موردی چهار کمیت ذکر شده در رابطه (۱۷) دارای مقادیر زیر می‌باشند:

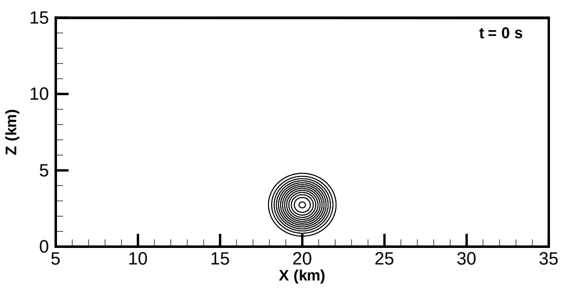
$$x_c = 20.0km, \qquad z_c = 2.75km,$$

$$x_r = 2.5km, \qquad z_r = 2.5km, \tag{۲۳}$$

که در این پژوهش تفکیک‌های افقی متفاوتی در دو راستای افقی و قائم انجام شد که در اینجا فقط فاصله شبکه‌ای $\Delta x = \Delta z = 25\text{m}$ متناظر با تفکیک (۳۰۱×۸۰۱) نشان داده شد. گام زمانی انتخابی برای این تفکیک مقدار $\Delta t = 0.01\text{s}$ است. همچنین این آزمون بدون در نظر گرفتن ضریب میرایی حل شد.

۵-۱ نتایج حل عددی آزمون حباب گرم در جوّ خنثی با شرایط مرز نابازتاب

برای حل عددی حباب گرم در جوّ خنثی با شرایط مرز نابازتاب از تفکیک افقی ۵۰ متر که معادل تعداد نقاط شبکه‌ای (۳۰۱ × ۸۰۱) در دو راستای افقی و قائم می‌باشد، استفاده شده است. با توجه به شرط پایداری عددی گام-زمانی متناظر با این تفکیک ۰/۰۱ ثانیه است. با توجه به رابطه (۲۲) بیشینه پریشیدگی دمای بالقوه در مرکز حباب قرار دارد، بنابراین مرکز حباب با بیشترین سرعت به سمت بالا حرکت می‌کند. بنابراین به‌علت آن‌که سرعت در مرکز حباب نسبت به بقیه نقاط آن بیشتر است، شیو دمای بالقوه با گذشت زمان افزایش می‌یابد. در شکل ۷ میدان اولیه پریشیدگی دمای بالقوه نشان داده شده است. در این شکل پربندهای هم دما در بازه $[6.5^\circ\text{C}, 0.5^\circ\text{C}]$ قرار دارند و اختلاف بین دو پربند هم‌دمای متوالی 0.5°C می‌باشد. درونی‌ترین پربند دارای پریشیدگی دمای بالقوه 6.5°C می‌باشد.

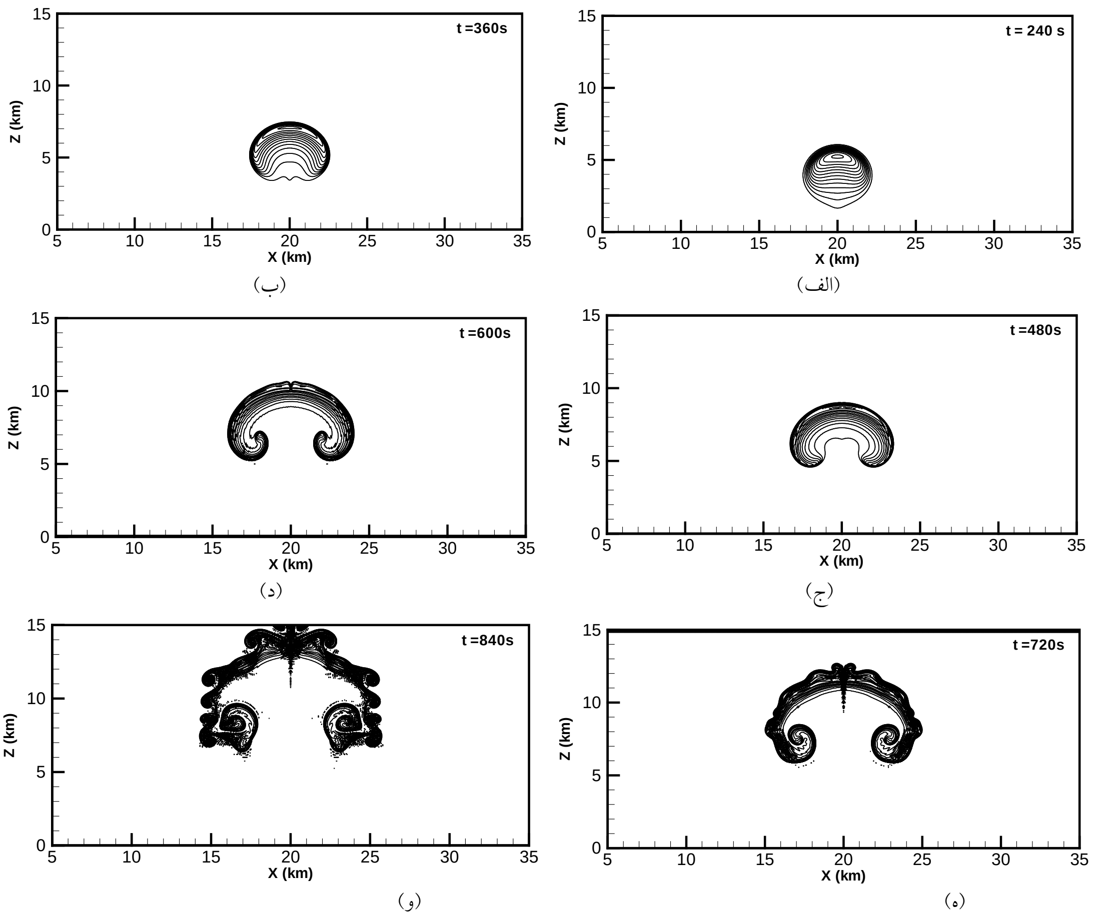


شکل ۷. میدان اولیه پریشیدگی دمای بالقوه برای حباب گرم با فاصله شبکه‌ای $\Delta x = \Delta z = 50\text{m}$ متناظر با تفکیک (۳۰۱×۸۰۱) می باشد. واحدها روی هر دو محور مختصات برحسب کیلومتر هستند. پربندهای هم دما در بازه $[6.5^\circ\text{C}, 0.5^\circ\text{C}]$ قرار دارند و اختلاف بین دو پربند هم‌دمای متوالی 0.5°C می‌باشد. درونی‌ترین پربند دارای پریشیدگی دمای بالقوه 6.5°C می‌باشد.

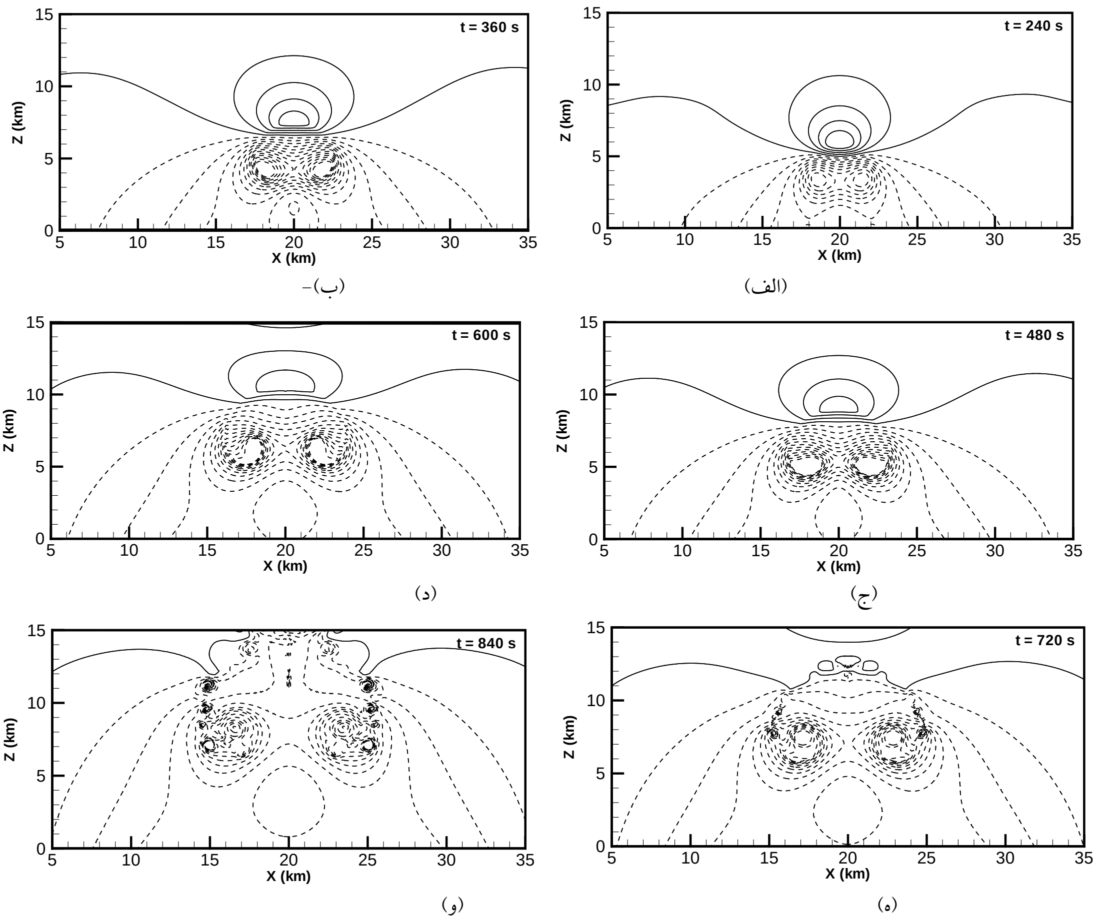
در شکل ۸ تحول زمانی میدان پریشیدگی دمای بالقوه از زمان ۲۴۰s تا زمان ۸۴۰s حاصل از حل عددی و به کمک روش مک‌کورمک فشرده مرتبه چهارم با پیشروی زمانی رُنگ–کوتای چهارمرحله‌ای نشان داده شده است. همانطور که مشاهده می‌شود با گذشت زمان شیو دمای بالقوه افزایش یافته است. در این شرایط روشی که دارای توان تفکیک بیشتر و دقت بالاتری باشد می‌تواند برتری خود را نسبت به دیگر روش‌ها نشان دهد.

در شکل ۹ تحول زمانی میدان فشار آورده شده است. همچنین شکل ۱۰ تحول زمانی میدان سرعت افقی نشان داده شده است. در این شکل‌ها واحدها بر روی هر دو محور بر حسب کیلومتر بوده و خط‌چین‌ها نشان‌دهنده پریشیدگی منفی می‌باشد.

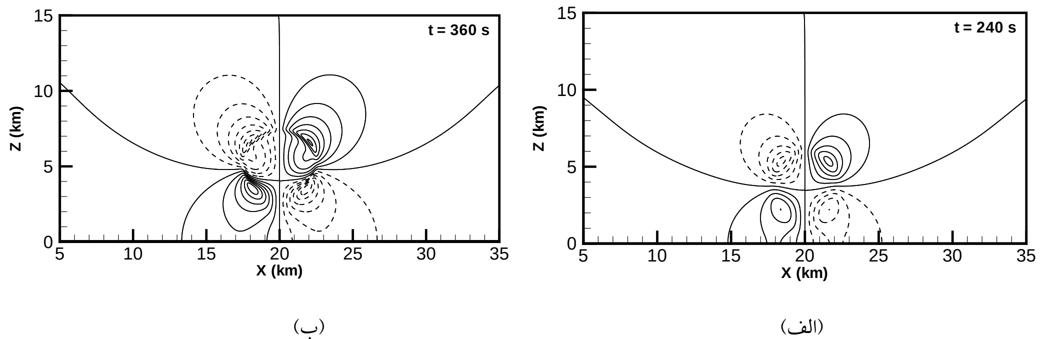
در ادامه برای این‌که مقایسه کمّی بین نتایج عددی حاصل از روش‌های مختلف مک‌کورمک برای تحول زمانی پریشیدگی میدان سرعت قائم انجام بگیرد، مشابه با کاری که کارپنتر و همکاران (۱۹۹۰) و احمد و لیندرمن (۲۰۰۷) انجام دادند، بیشینه مقدار سرعت قائم حاصل از روش‌های مک‌کورمک مرتبه دوم و مک‌کورمک فشرده مرتبه چهارم با پیشروی زمانی مرتبه دوم و مک‌کورمک فشرده مرتبه چهارم با پیشروی زمانی رُنگ–کوتای چهارمرحله‌ای در شکل ۱۱ آمده است.

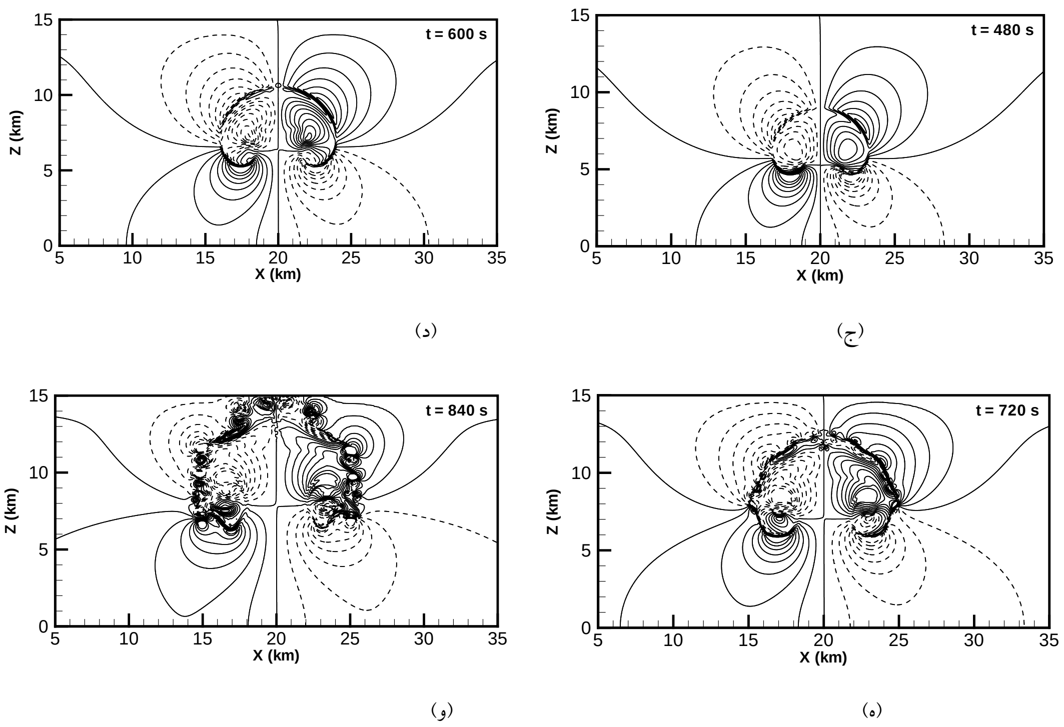


شکل ۸. تحول زمانی پریشیدگی دمای بالقوه برای حباب گرم در جوّ خنثی و شرایط مرز باز با استفاده از روش مک‌کورمک فشرده مرتبه چهارم با پیشروی زمانی رُنگ–کوتای چهارمرحله‌ای. فاصله شبکه‌ای $\Delta x = \Delta z = 50\,\mathrm{m}$ متناظر با تفکیک (۳۰۱×۸۰۱) می‌باشد. واحدها روی هر دو محور مختصات برحسب کیلومتر هستند. پربندهای هم دما در بازه $[6.5^\circ\mathrm{C}, 0.5^\circ\mathrm{C}]$ قرار دارند و اختلاف بین دو پربند هم‌دمای متوالی $0.5^\circ\mathrm{C}$ و $\nu = 75\,\mathrm{m^2 s^{-1}}$ می‌باشد. درونی‌ترین پربند دارای پریشیدگی دمای بالقوه $6.5^\circ\mathrm{C}$ می‌باشد.

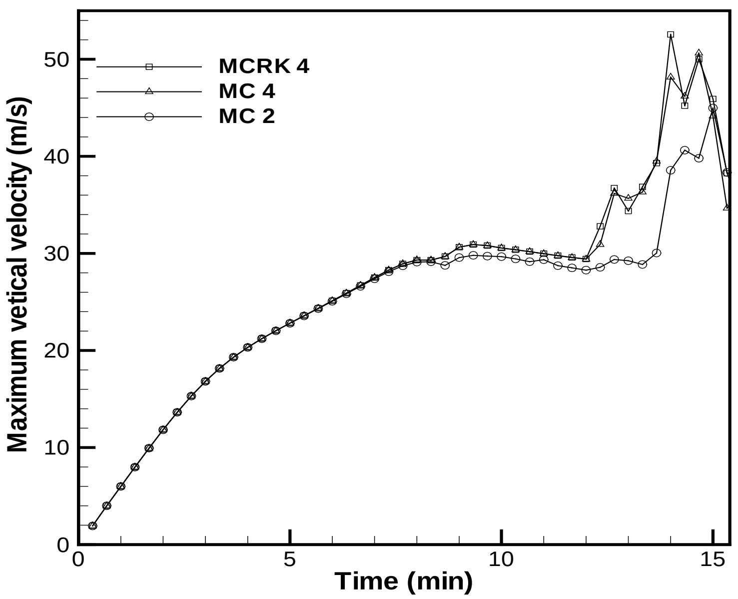


شکل ۹. تحول زمانی میدان پریشیدگی فشار از زمان t= ۲٤۰s (شکل الف) تا زمان t= ۸٤۰s (شکل و) با بازه زمانی t= ۱۲۰s حاصل از حل عددی و به کمک روش مک‌کورمک فشرده مرتبه چهارم با پیشروی زمانی رُنگ–کوتای چهارمرحله‌ای نشان داده شده است. فاصله شبکه‌ای $\Delta x = \Delta z = 50\,\mathrm{m}$ متناظر با تفکیک (۸۰۱×۳۰۱) می‌باشد. هر دو محور مختصات برحسب کیلومتر و خط‌چین‌ها نشان‌دهنده پریشیدگی منفی هستند. پربندهای هم‌مقدار فشار در بازه $[-260\,\mathrm{Pa},80\,\mathrm{Pa}]$ قرار دارند و اختلاف بین دو پربند هم‌فشار متوالی $20\,\mathrm{Pa}$ و $\nu = 0.0\,\mathrm{m^2 s^{-1}}$ است.

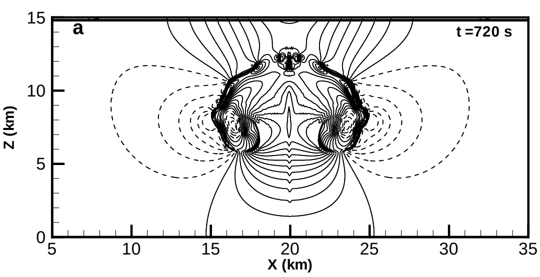




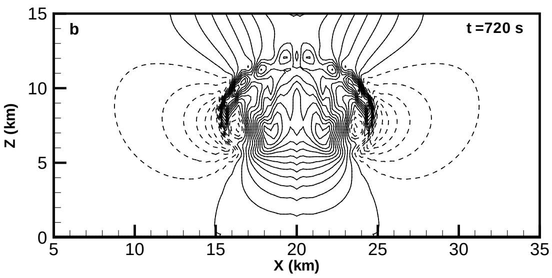
شکل ۱۰. تحول زمانی میدان پریشیدگی سرعت افقی از زمان t= ۲٤۰s (شکل الف) تا زمان t= ۸٤۰s (شکل و) با بازه زمانی t= ۱۲۰s حاصل از حل عددی و به کمک روش مک‌کورمک فشرده مرتبه چهارم با پیشروی زمانی رُنگ–کوتای چهارمرحله‌ای نشان داده شده است. فاصله شبکه‌ای $\Delta x = \Delta z = 50\,\mathrm{m}$ متناظر با تفکیک (۳۰۱×۸۰۱) می‌باشد. هر دو محور مختصات برحسب کیلومتر و خط‌چین‌ها نشان دهنده پریشیدگی منفی هستند. پربندهای هم‌سرعت در بازه $[-16\,\mathrm{ms^{-1}},16\,\mathrm{ms^{-1}}]$ قرار دارند و اختلاف بین دو پربند متوالی $2\,\mathrm{ms^{-1}}$ و $\nu = 0.0\,\mathrm{m^2s^{-1}}$ است.



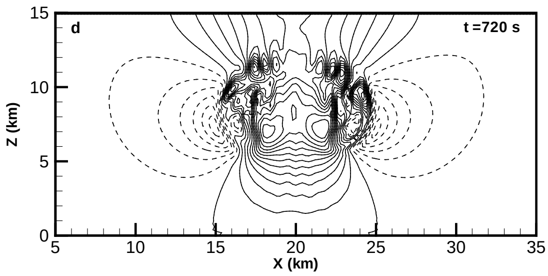
شکل ۱۱. بیشینه مقدارسرعت قائم حاصل از روش‌های مک‌کورمک مرتبه دوم و مک‌کورمک فشرده مرتبه چهارم با پیشروی زمانی مرتبه دوم و پیشروی زمانی رُنگ–کوتای چهارمرحله‌ای.



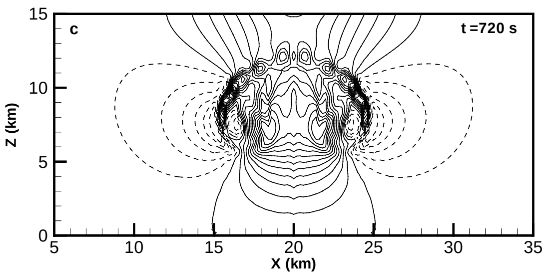
(الف)



(ب)



(ج)



(د)

شکل ۱۱. مقایسه میدان پریشیدگی سرعت قائم (الف) حل مرجع با فاصله شبکه‌ای $\Delta x = \Delta z = 50\,\mathrm{m}$، (ب) روش مک‌کورمک فشرده مرتبه چهارم با پیشروی زمانی رُنگ–کوتای چهارمرحله‌ای، (ج) روش مک‌کورمک فشرده مرتبه چهارم با پیشروی زمانی مرتبه دوم و (د) روش مک‌کورمک مرتبه دوم با فاصله شبکه‌ای مورد استفاده در شکل‌های (b)، (c) و (d) $\Delta x = \Delta z = 200\,\mathrm{m}$ متناظر با تعداد نقاط شبکه (۲۰۱×۷۶) می‌باشد. هر دو محور مختصات برحسب کیلومتر و خط‌چین‌ها نشان‌دهنده پریشیدگی منفی هستند. پربندهای هم‌سرعت در بازه $[-12\,\mathrm{ms^{-1}}, 24\,\mathrm{ms^{-1}}]$ قرار دارند و اختلاف بین دو پربند متوالی $2\,\mathrm{ms^{-1}}$ و $\nu = 0.0\,\mathrm{m^2s^{-1}}$ است.

همان‌طور که در شکل ۱۱ مشاهده می‌شود محدوده تغییرات بیشینه و کمینه مقدارسرعت قائم در حل عددی مک‌کورمک فشرده مرتبه چهارم با پیشروی زمانی رُنگ-کوتای چهارمرحله‌ای برای حل حباب گرم با شرایط مرز باز نسبت به روش مک‌کورمک مرتبه دوم با گذشت زمان بهتر نشان داده شده است. نتایج حاصل از نمودار شکل ۱۱ را می‌توان در شکل ۱۲ با مطابقت موردی این سه روش در زمان $720\,\mathrm{s}$ برای سرعت قائم مشاهده کرد. همان-طور که در شکل ۱۲ مشاهده می‌شود در فواصل شبکه‌ای بزرگ نیز روش عددی مک‌کورمک فشرده مرتبه چهارم دقت و توان تفکیک بالاتری دارند.

۶ نتیجه‌گیری

حل عددی شکل پایستار معادلات تراکم‌پذیر دوبُعدی و ناآب‌ایستایی جوّ با استفاده از روش فشرده مک‌کورمک مرتبه‌چهارم با پیشروی زمانی رُنگ–کوتا انجام شد. با شبیه‌سازی حباب سرد در جوّ خنثی با مرز سخت و شبیه-سازی حباب گرم در جوّ خنثی با مرز نابازتاب، مشاهده شد در میدان پریشیدگی دمای بالقوه با گذشت زمان شیو-ها افزایش می‌یابد و عملکرد روش‌ها در چنین حالتی متمایز می‌شود. هم‌چنین مقایسه نتایج عددی عرضه شده برای شبیه‌سازی حباب گرم در جوّ خنثی با استفاده از روش مک کورمک فشرده مرتبه چهارم با پیشروی زمانی رُنگ–کوتای چهارمرحله‌ای با کار استراکا و همکاران (۱۹۹۳)، مندز و کرول (۱۹۹۴) و هم‌چنین احمد و

لیندرمن (۲۰۰۷) گویای توانمند بودن این روش در حل عددی معادلات دوبعدی و تراکم‌پذیر است. با توجه به اینکه روش پیش‌گفته دارای دقت بیشتری در گسسته‌سازی زمان و مکان و هم‌چنین پخش عددی کمتر است، می‌تواند در مناطق جبهه‌ای همراه با شیوهای شدید، این شرایط را حفظ و با گذشت زمان دچار ناپایداری محاسباتی کمتری شود. با توجه به عملکرد مناسب این روش، می‌توان در بررسی‌های عددی برای جوّ با شرایط واقعی‌تر مثل شرایط جوّ غیرخنثی، بادررو و همانند آن نیز انجام داد.

منابع

بیدختی، ع. ع.، بیوک، ن.، و ثقفی، م. ع.، ۱۳۸۳، بررسی ساختار چند جریان جستناک توفان‌های همرفتی تهران با استفاده از داده‌های سودار: مجله فیزیک زمین و فضا، **۳۰**(۲)، ۹۳–۱۱۳.

قادر، س.، بیدختی، ع. ع.، و فلاحت، س.، ۱۳۸۹، حل عددی مسئله تنظیم راسبی غیرخطی ناپایای دوبعدی با استفاده از روش فشرده مک کورمک مرتبه چهارم: مجله فیزیک زمین و فضا، **۳۶**(۳)، ۱۵۱–۱۷۳.

قادر، س.، بیدختی، ع. ع.، و فلاحت، س.، ۱۳۹۰، حل عددی شکل پایستار معادلات تراکم‌پذیر دوبعدی و غیرهیدروستاتیک جوّ با استفاده از روش مک‌کورمک مرتبه دوم: مجله فیزیک زمین و فضا، **۳۷**(۲)، ۱۹۱–۱۷۱.

Ahmad N., and Lindeman J., 2007, Euler solution using flux-based wave decomposition: Int. J. Numer. Meth. Fluids, **54**, 47–72.

Carpenter, R. L., Droegemeier, K. K., Woodward, P. R., and Hane, C. E., 1990, Application of piecewise parabolic method (PPM) to meteorological modeling: Mon. Wea. Re., **118**, 586–612.

Carroll, J. J., Mendez-Nunez, L. R., and Tanrikulu, S., 1987, Accurate pressure gradiant calculation in hydrostatic atmospheric model: Bound-Layer Meteo., **41**, 149–169.

Durran, D. R., 2010, Numerical Methods for Fluid Dynamics with Applications to Geophysics: Second Edition, Springer, New York.

Esfahanian, V., Ghader, S., and Mohebolhojeh, A. R., 2005, On the use of super compact scheme for spatial differencing in numerical models of the atmosphere: Q. J. Roy. Meteorl. Soc., **131**, 2109–2130.

Fox, L., and Goodwin, E. T., 1949, Some new method for the numerical integration of ordinary differential equation: Proc. Cambridge Phi. Soc. Math. Phys., **45**, 373-388.

Ghader, S., Mohebalhojeh, A. R., and Esfahanian, V., 2009, On the spectral convergence of the super compact finite-difference schemes for the f-plane shallow-water equations: Mon. Wea. Rev., **137**, 2393–2406.

Ghader, S., Nordström, J., 2015, High-order compact finite difference schemes for the vorticity–divergence representation of the spherical shallow water equations, Int. J. Numer. Meth. Fluids, **78**, 709-738.

Golshahy, H., Ghader, S., and Ahmadi-Givi, F., 2011, Accuracy assessment of the super compact and combined compact schemes for spatial differencing of a two-layer oceanic model: Presentation of linear inertia-gravity and Rossby waves: Ocean Modeling, **37**, 49–63.

Giraldo, F. X., and Restelli, M., 2007, A study of spectral element and discontinuous Galerkin methods for the Navier–Stokes equations in non hydrostatic mesoscale atmospheric modeling: Equation sets and test cases: J. Comput. Phys., **227**, 3849–3877.

Gottlieb, D., and Turkel, E., 1978, Boundary conditions for multisteps finite-difference methods for time dependent equations: J. Comput. Phy., **26**, 181–196.

for solving the shallow water equations in conservative-law form: Mon. Wea. Rev., **107**, 1107–1127.

Numerov, B. V., 1924, A method of extrapolation of perturbations: Mon. Notic. Roy. Astron. Soc., **84**, 592–601.

Straka, J. M., Wilhelmson, R. B., Wicker, L. J., Anderson, J. R., and Droegemeier, K. K., 1993, Numerical solutions of a non-linear density current: A benchmark solution and comparisons: Int. J. Numer. Meth. Fluids, **17**, 1–22.

Tannehil, J. C., Anderson, D. A., and Pletcher R. H., 1997, Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer: Taylor & Francis, Second edition.

Yelasha, L., Müller, A., Lukáˇcová-Medvid'ováa, M., Giraldo. F. X., and Wirth, V., 2014, Adaptive discontinuous evolution Galerkin method for dry atmospheric flow: J. Comput. Phys., **268**, 106–133.

Zhang J., Sun H., and Zhao J. J., 2002, High-order compact scheme with multigrid local mesh refinement procedure for convection diffusion problems: Comput. Methods Appl. Mesh. Energy, **191**, 4661–4674.

Hixon, R., and Turkel, E., 2000, Compact implicit MacCormack–type scheme with high accuracy: J. Comput. Phys., **158**, 51–70.

Kreiss, H. O., and Oliger, J., 1972, Comparison of accurate methods for the integration of hyperbolic equations: Tellus, **24**, 199–215.

Lilly, D. K., 1962, On the numerical simulation of buoyant convection: Tellus, **14**, 148–173.

Lele S. K., 1992, Compact finite difference shemes with spectral-like resolution: J. Comput. Phys., **103**, 16–42.

Mendez-Nunez, L. R., and Carroll, J. J., 1994, Application of the MacCormack scheme to atmospheric nonhydrostatic models: Mon. Wea. Rev., **122**, 984–1000.

Mohebalhojeh, A. R., and Dritschel, D. G., 2007, Assessing the numerical accuracy of complex spherical shallow water flows. Mon. Wea. Rev., **135**, 3876-3894.

Müller, A., Behrens, J., Giraldo, F. X., Wirth, V., 2013, Comparison between adaptive and uniform discontinuous Galerkin simulations in dry 2D bubble experiments: J. Comput. Phys., **235**, 371–393.

Navon, I. M., and Riphagen H. A., 1979, An implicit compact fourth-order algorithm