مجله ژئوفیزیک ایران، جلد ۱۱، شماره ۳، ۱۳۹۶، صفحه ۱۴۴ - ۱۵۶

مدل‌سازی عددی داده‌های رادار نفوذی زمین (GPR) با استفاده از روش اجزاء محدود

سجاد زارعی[1]، امین رحیمی دلخانی[2]، و نوید امینی[3*]

[1] کارشناس ارشد، گروه فیزیک زمین، مؤسسهٔ ژئوفیزیک، دانشگاه تهران، تهران، ایران
[2] کارشناس ارشد، دانشکده مهندسی نفت، دانشگاه صنعتی امیر کبیر، تهران، ایران
[3] استادیار، گروه فیزیک زمین، مؤسسهٔ ژئوفیزیک دانشگاه تهران، تهران، ایران

(تاریخ دریافت: ۱۳۹۴/۰۹/۱۴، تاریخ پذیرش: ۱۳۹۶/۰۷/۱۲)

چکیده

در این پژوهش از روش اجزاء محدود (FEM) به‌منظور مدل‌سازی امواج الکترومغناطیس استفاده شده است. با توجه به قابلیت‌های این روش، ابتدا معادلات ماکسول در حیطه مکان گسسته‌سازی می‌شوند، سپس شرایط مرزی به‌منظور جذب امواج در کرانه‌های مدل اعمال می‌شود که از روش مرز جاذب مرتبه اول کلایتون و انگکوئیست استفاده شده است. در روش FEM عبارت مرز یک جمله جداگانه می‌باشد، به همین دلیل اعمال شرایط مرزی در این روش بسیار آسان‌تر از روش تفاضل محدود (FDM) است. پس از گسسته‌سازی مکانی با استفاده از روش FEM، گسسته‌سازی زمانی معادلات با استفاده از روش تفاضل محدود مرکزی صورت می‌گیرد. گسسته‌سازی زمانی معادلات، حجیم‌ترین و زمان‌برترین بخش محاسبات در مدل‌سازی هستند که نحوه گسسته‌سازی مکانی نقش بسزایی در این فرآیند ایفا می‌کند. با توجه به تُنُک بودن و متقارن بودن ماتریس‌های تشکیل شده در روش FEM، درصورتی‌که از الگوریتم‌های بهینه به‌منظور محاسبات و ذخیره‌سازی ماتریس‌ها در این روش استفاده شود، زمان و هزینه محاسباتی به‌طور قابل ملاحظه‌ای کاهش خواهد یافت که در این تحقیق چند تکنیک به‌منظور کاهش حجم و زمان محاسبات در نرم‌افزار متلب ارائه شده است. فرمول‌ها و روابط ارائه شده در این تحقیق به شکل ماتریسی هستند که به‌راحتی در نرم‌افزار متلب قابل کد نویسی می‌باشند. به‌منظور بررسی روش FEM در مدل‌سازی داده‌های GPR، الگوریتم‌های توسعه داده شده بر روی مدل‌های زمین‌شناسی فرضی آزمایش شده است که نتایج حاصل از مدل‌سازی دارای دقت قابل قبولی هستند.

واژه‌های کلیدی: رادار نفوذی زمین (GPR)، روش اجزاء محدود (FEM)، مدل‌سازی عددی، شرایط مرزی جاذب (ABC)

* نگارنده رابط: navidamini@ut.ac.ir

۱ مقدمه

روش GPR یک روش غیر مخرب ژئوفیزیکی است که با توجه به استفاده از امواج الکترومغناطیس در حوزه روش‌های الکترومغناطیسی طبقه‌بندی می‌شود و یک مقطع پیوسته از ناهمگنی‌های زیرسطحی را در اختیار می‌گذارد. روش GPR بر پایه بازتاب امواج الکترومغناطیس از مرزهایی استوار است که در آنها خواص الکتریکی مواد تغییر می‌کند. گذردهی الکتریکی ( )، رسانندگی الکتریکی (σ) و تراوایی مغناطیسی μ پارامترهای فیزیکی تعیین‌کننده در بازتاب امواج GPR از فصل مشترک‌ها می‌باشند. به علت شباهت روش GPR با روش لرزه‌نگاری بازتابی، بیشتر روش‌های پردازش و مدل‌سازی لرزه‌ای می‌توانند در روش GPR نیز به‌کار گرفته شوند. البته به دلیل تفاوت عمده در امواج به‌کار رفته در دو روش، در بعضی موارد نیاز به بازنگری احساس می‌شود (دی و وانگ، ۲۰۰۳). با توجه به اهمیت مدل‌سازی عددی در فهم بهتر سازوکار امواج GPR و برهم‌کنش آن با ساختارهای زیرسطحی، مدل‌سازی عددی به یکی از بحث‌های جذاب در این زمینه تبدیل شده است. مدل‌سازی امواج الکترومغناطیس در واقع به معنی حل معادلات ماکسول برای مدل زمین‌شناسی مورد نظر می‌باشد.

روش‌های متعددی به‌منظور مدل‌سازی در GPR ارائه شده است که عبارتند از: روش‌های انتگرالی (الفسن، ۱۹۹۹)، حجم محدود (یی و چن، ۱۹۹۷)، تکنیک‌های گسسته‌سازی المانی (رابرتز و دنیلز، ۱۹۹۷)، و روش تفاضل محدود (FDM) (برگمن و همکاران، ۱۹۹۸؛ ایروینگ و نایت، ۲۰۰۶). گرچه این روش‌ها در نحوه‌ی اجرا متفاوت هستند، اما در تمام آنها به شبیه‌سازی انتشار امواج GPR از سطح، با تأکید بر برهم‌کنش امواج الکترومغناطیس با مواد زیرسطحی پرداخته می‌شود (کاسیدی، ۲۰۰۷). روش FDM به دلیل سادگی در محاسبات، پیاده‌سازی و برنامه‌نویسی آسان، رایج‌ترین روش مدل‌سازی در روش GPR در دو دهه‌ی اخیر می‌باشد (ایروینگ و نایت، ۲۰۰۶). در این روش معادله دیفرانسیلی حاکم بر مسئله با استفاده از تقریب‌های تفاضل محدود گسسته‌سازی می‌شود. این روش علی‌رغم سادگی و نقش مهمی که در شناخت پدیده‌های مرتبط با انتشار موج در زمین داشته است، دارای محدودیت‌های فراوانی است. مهم‌ترین مشکلات این روش عدم دقت در محاسبه مشتقات، دشواری اعمال شرایط مرزی در مرزهای غیرخطی و عدم دقت کافی در مدل‌سازی هندسه‌های پیچیده می‌باشد.

روش FEM که از معادله انتگرالی حاکم بر مسئله استفاده می‌کند، یک تکنیک عددی قدرتمند و انعطاف‌پذیر برای اجرای مدل‌های پیچیده، محیط‌های ناهمگن و اعمال شرایط مرزی مختلف است. با توجه به دشواری‌ها و پیچیدگی‌ها در به‌کارگیری روش اجزاء محدود در مدل‌سازی امواج رادار و همچنین به دلیل نوپا بودن روش GPR تاکنون اکثر روش‌های مدل‌سازی صورت گرفته در این روش با استفاده از روش FDM بوده است. از جمله کسانی که به مدل‌سازی امواج رادار با استفاده از روش‌FEM پرداخته‌اند، می‌توان فنگ و همکاران (۲۰۱۲) و دی و وانگ (۲۰۰۳) را نام برد. معادله دیفرانسیلی حاکم بر انتشار امواج GPR (معادلات ماکسول) به روش‌های مختلفی قابل تبدیل به یک معادله انتگرالی است. معادلات انتگرالی را می‌توان با استفاده از روش‌های المانی مانند اجزاء محدود، اجزاء مرزی، اجزاء طیفی، حجم محدود و ... گسسته‌سازی و حل نمود. در تمامی روش‌های حل معادله انتگرالی، با استفاده از شبکه‌های با اندازه و شکل مختلف می‌توان به‌راحتی مرزهای نامنظم را مدل کرد و در نتیجه در شبیه‌سازی هندسه‌های پیچیده و همچنین ناهمگنی‌های سرعتی، این روش‌ها بسیار کارآمد هستند. اعمال شرایط مرزی مختلف در این روش‌ها بسیار ساده‌تر از روش تفاضل محدود است. بالا بودن حجم محاسبات و

نیاز به حافظه پردازشی عظیم در روشFEM، مهم‌ترین مشکل این روش‌هاست که با توجه به متقارن و تنک بودن ماتریس‌های تولید شده در این روش تا حدود زیادی می‌توان این مشکل را حل نمود.

۲ تئوری

۲-۱ معادلات حاکم بر امواج GPR

روش GPR بر تئوری امواج الکترومغناطیس استوار است و نقطه شروع هر بحثی در مورد طبیعت مواد، تحت تأثیر امواج الکترومغناطیس، معادلات ماکسول و معادلات ساختاری است. معادلات ماکسول فیزیک میدان‌های الکترومغناطیسی را به‌صورت ریاضی تشریح می‌کنند؛ درحالی‌که روابط ساختاری خواص مواد را کمّی می‌کنند و تلفیق این دو، اساس نمایش عددی سیگنال‌های GPR می‌باشد (جول، ۲۰۰۹). بنابراین معادله امواج الکترومغناطیس را با در نظر گرفتن چشمه می‌توان به شکل زیر نوشت (فنگ و لی، ۱۹۹۳):

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \frac{\nabla^2 \mathbf{E}}{\mu\varepsilon} + \frac{\sigma}{\varepsilon}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mathbf{S}\,, \qquad (۱)$$

که $\mathbf{E}$ (V/m) میدان الکتریکی برداری، ε (F/m) گذردهی الکتریکی، μ (H/m) نفوذپذیری مغناطیسی، σ (S/m) رسانندگی الکتریکی و $\mathbf{S}$ چشمه‌ی میدان الکتریکی هستند.

شکل انتگرالی (ضعیف) معادله (۱) را می‌توان با استفاده از حساب تغییرات به دست آورد. با ضرب طرفین معادله (۱) در $\delta\mathbf{E}$ و انتگرال‌گیری روی کل حیطه مسئله (Ω)، خواهیم داشت (فنگ و همکاران، ۲۰۱۲):

$$\iint_{\Omega} \ddot{\mathbf{E}}\,\delta\,\mathbf{E}\,d\Omega + \iint_{\Omega}\frac{\sigma}{\varepsilon}\,\dot{\mathbf{E}}\,\delta\,\mathbf{E}\,d\Omega + \iint_{\Omega}\frac{1}{\mu\varepsilon}(\nabla\mathbf{E}\,.\,\nabla\delta\,\mathbf{E})\,d\Omega - \iint_{\Gamma}\frac{1}{\mu\varepsilon}(\nabla\mathbf{E}\,.n)\,\delta\,\mathbf{E}\,d\Gamma = \iint_{\Omega}\mathbf{S}\,\delta\,\mathbf{E}\;d\Omega\,, \qquad (۲)$$

که $\ddot{\mathbf{E}}$ و $\dot{\mathbf{E}}$ به‌ترتیب بیانگر مشتق دوم و اول زمانی میدان الکتریکی می‌باشند. Ω بیانگر محدوده انتگرال‌گیری یا هندسه مسئله است و می‌تواند دو بعدی (سطح) و یا سه‌بعدی (حجم) باشد، Γ بیانگر مرز مسئله است، δ عملگر تغییرات (Variation operator) و n بیانگر بردار عمود بر سطح است. در این معادله محدوده‌ی انتگرال‌گیری Ω به چندین زیر ناحیه ($\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_n$) تقسیم می‌شود. در واقع به‌جای اینکه انتگرال روی کل حیطه محاسباتی مسئله محاسبه شود، روی بخش‌های کوچک‌تر انجام می‌شود و سپس پاسخ‌ها با هم جمع می‌شود. به بخش‌های کوچک‌تر یک المان (Element) یا جزء گویند. در واقع هندسه بزرگ و پیچیده مسئله، به المان‌های کوچک‌تر و ساده‌تر تقسیم می‌شود و محاسبات روی هرکدام از این المان‌ها انجام می‌شود. این المان‌های کوچک‌تر می‌توانند دارای هر هندسه منظم یا نامنظمی باشند؛ بنابراین روش‌های حل معادلات انتگرالی، هیچ محدودیتی در مواجهه با هندسه‌های پیچیده و مرزهای نامنظم ندارند.

۲-۲ معادلات حاکم در روش اجزاء محدود:

معادلات انتگرالی حاکم بر مسئله با استفاده از روش‌های المان پایه (Elemental-base methods) و یا روش گلرکین قابل حل است. روش FEM نیز یکی از روش‌های المان پایه است که اساس این روش مشابه روش گالرکین می‌باشد با این تفاوت که به‌جای استفاده از چندجمله‌ای‌های مودال (Modal) لاگرانژ از چندجمله‌ای‌های نودال (Nodal) لاگرانژ برای تقریب پاسخ‌ها استفاده می‌گردد. با وجود اختلاف در جزئیات فنی روش‌های عددی، همه این روش‌ها دارای یک نقطه مشترک هستند: گسسته‌سازی مکانی محیط انتشار و سپس تقریب پاسخ میدان در گره‌های مختلف در گام‌های زمانی مختلف در حیطه زمان و یا در بسامدهای مختلف در حیطه بسامد (در شکل ۱ مراحل مدل‌سازی امواج رادار با

استفاده از روش FEM به‌صورت طرح‌وار نمایش داده شده است). در اکثر روش‌های عددی پس از گسسته‌سازی مکانی معادلات، معادله جابه‌جایی حاکم بر حرکت امواج به یک دستگاه معادله دیفرانسیلی زمانی تبدیل می‌شود که به‌صورت زیر قابل بیان است (دی و وانگ، ۲۰۰۳).

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{E}}+\mathbf{A}\dot{\mathbf{E}}+\mathbf{KE}=\mathbf{S}\,, \qquad (۳)$$

که $\mathbf{M}$، $\mathbf{A}$ و $\mathbf{K}$ به‌ترتیب ماتریس‌های جرم، میرایی و سختی مدل مورد نظر هستند. ابعاد این ماتریس‌ها $n\times n$ است که n بیانگر درجه آزادی یا تعداد متغیرهای مجهول در مدل است. در روش اجزاء محدود از چندجمله‌ای‌های نودال لاگرانژ برای تقریب و به بیان بهتر درون‌یابی پاسخ استفاده می‌شود. در این روش مقدار پاسخ درون هر المان از درون‌یابی مقدار پاسخ در محل گره‌های المان حاصل می‌شود (فیکنر، ۲۰۱۱). در واقع شکل کلی تابعیت بین مقدار تابع در یکی از نقاط جزء و مجهولات اصلی در گره‌ها به شکل زیر بیان می‌شود (فیکنر، ۲۰۱۱):

$$\mathbf{E}(\mathrm{x})=\sum_{i=1}^{n_p} N_i(\mathrm{x})\,E_i\;, \qquad (۴)$$

که n_p تعداد گره‌های هر المان، E_i مقدار پاسخ در محل گره i-ام و N_i نیز تابع درون‌یابی یا تابع شکل المان، مربوط به آن گره است. ساده‌ترین المانی که در مسائل دو بعدی استفاده می‌شود، المان مستطیلی چهار گره‌ای است؛ که در اینجا، مجهولات مسئله مقدار پاسخ در هر گره خواهد بود و توابع درون‌یابی، چندجمله‌ای‌های لاگرانژ هستند که برای یک المان مستطیلی به‌صورت زیر بیان می‌شوند (فنگ و همکاران، ۲۰۱۲):

$$N_i=\frac{1}{4}(1+\xi_i\xi)(1+\eta_i\eta), \qquad \mathrm{i}=1,2,3,4. \qquad (۵)$$

که η_i, ξ_i مختصات گره i-ام هستند. شکل ۲-الف نقاط درون‌یابی را نشان می‌دهد. همچنین رابطه (۴) را به شکل ضرب ماتریسی زیر نیز می‌توان بیان نمود:

$$\mathbf{E}=\begin{bmatrix}N_1 & N_2 & N_3 & \dots & N_{np}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}q_1\\q_2\\q_3\\\vdots\\q_{np}\end{bmatrix}=\mathbf{Nq}\quad , \qquad (۶)$$

که $\mathbf{N}$ ماتریس توابع شکل المان و $\mathbf{q}$ بردار مجهولات مسئله است. همچنین تغییرات $\mathbf{E}$ را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\delta\mathbf{E}=\mathbf{N}\;\delta\mathbf{q}\;. \qquad (۷)$$

در معادله (۲)، پنج عبارت انتگرالی وجود دارد که به‌ترتیب از چپ به راست عبارتند از: عبارت جرم، عبارت میرایی، عبارت سختی، عبارت مرز و عبارت اثر منبع انرژی؛ که این ماتریس‌های المان با استفاده از معادلات (۶) و (۷) و انجام محاسبات، به‌صورت زیر بیان می‌شوند (دی و وانگ، ۲۰۰۳):

$$M_e=\iint_{\Omega_i}\mathbf{N}^T\mathbf{N}dxdz\;, \qquad (۸)$$

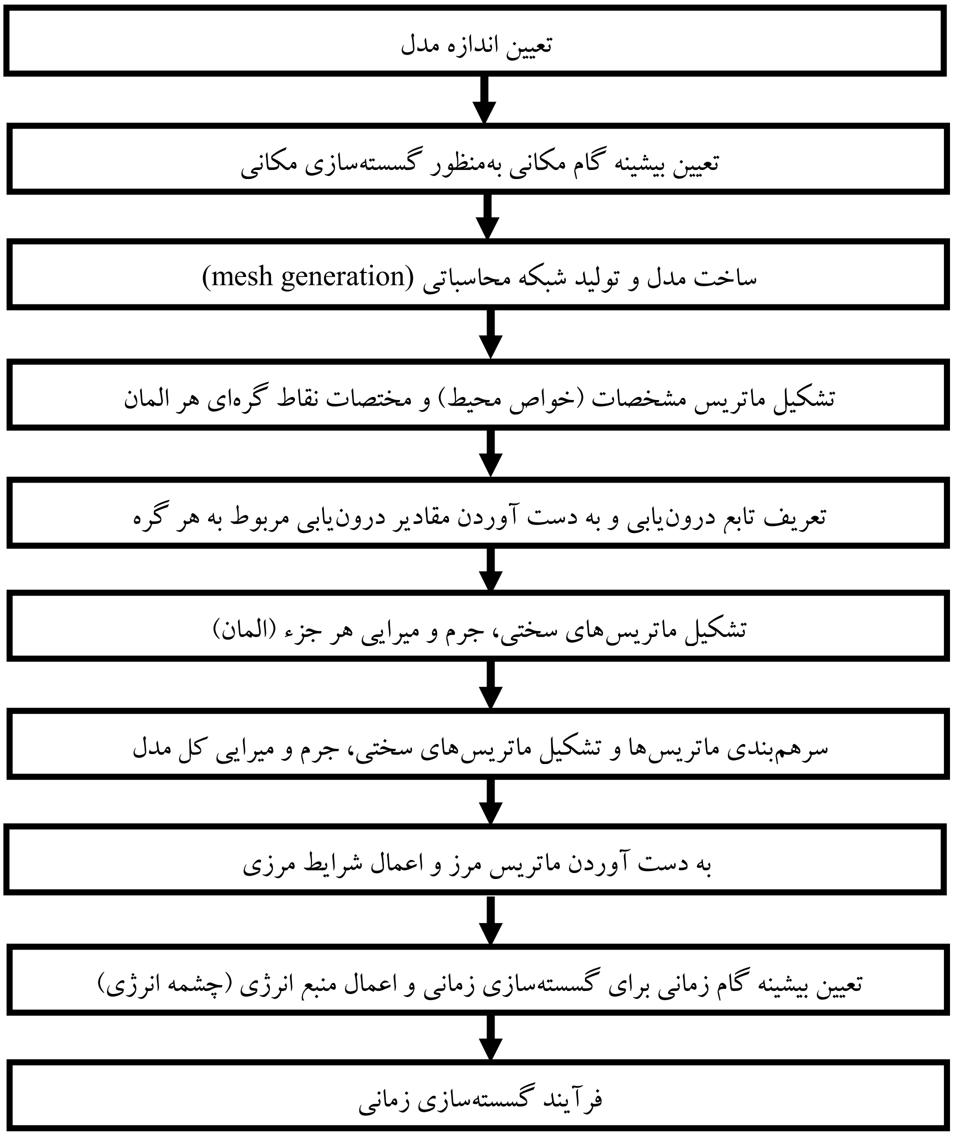
$$A_e=\iint_{\Omega_i}\frac{\sigma}{\varepsilon}\mathbf{N}^T\mathbf{N}dxdz\;, \qquad (۹)$$

$$K_e=\iint_{\Omega_i}\frac{1}{\mu\varepsilon}\left(\frac{\partial\mathbf{N}^T}{\partial x}\frac{\partial\mathbf{N}}{\partial x}+\frac{\partial\mathbf{N}^T}{\partial z}\frac{\partial\mathbf{N}}{\partial z}\right)dxdz\;, \qquad (۱۰)$$

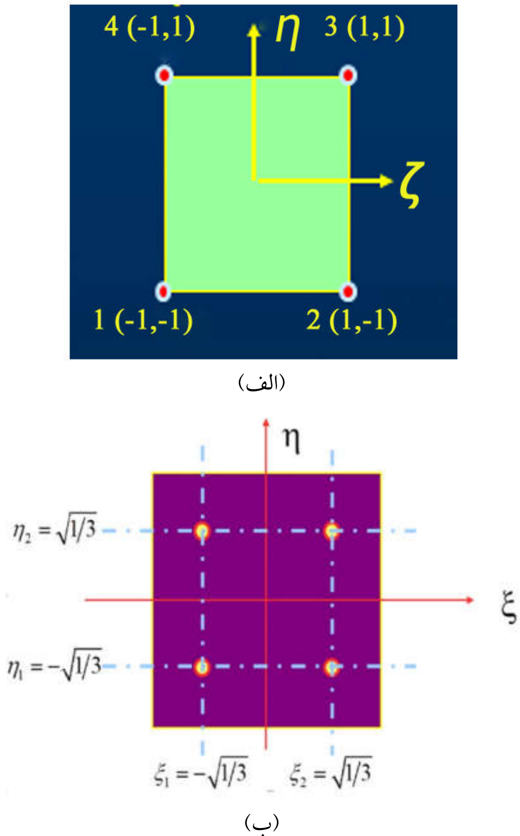
که Ω_i مربوط به ناحیه انتگرال‌گیری المان i-ام می‌باشد. این روابط به‌دست‌آمده بسیار با ارزش هستند زیرا اجرای آنها در برنامه‌های رایانه‌ای بسیار ساده هستند و محاسبات آن بسیار سریع‌تر از حالت معمولی و باز شده رابطه انجام می‌شود و برای کلی‌ترین حالت مسئله ارائه شده است. همچنین ماتریس‌های کل از جمع و یا از سرهم‌بندی ماتریس‌های المان حاصل می‌شوند به همین صورت هستند. برای سرهم‌بندی ماتریس کل دانستن نحوه ارتباط

گره‌ها در المان‌ها ضروری است. به همین دلیل می‌بایست گره‌های مدل شماره‌گذاری شود و سپس گره‌هایی که در هر المان درگیر هستند، مشخص شوند؛ بنابراین در روش‌های معادله انتگرالی، قبل از شروع مدل‌سازی باید یک پیش‌پردازش صورت گیرد که علاوه بر تعیین ویژگی‌های فیزیکی محیط می‌بایست محیط شبکه‌بندی شود و نحوه ارتباط گره‌ها در المان‌ها مشخص شود.

انتگرال‌های موجود در معادلات برای هر المان با استفاده از روش‌های عددی با دقت و سرعت بسیار خوبی قابل محاسبه است. روش گاوس معمول‌ترین روش در محاسبه انتگرال‌های معین و محدود است که در این پژوهش از این روش استفاده شده است.



شکل ۱. مراحل مدل‌سازی با استفاده از روش FEM در شبیه‌سازی امواج GPR .



شکل ۲. (الف) نقاط گره‌ای برای یک المان مستطیلی در روش اجزاء محدود. نقاط مشخص شده نقاط درون‌یابی هستند که چند جمله‌های لاگرانژ تابع درون‌یابی می‌باشند (ماتئو و سادیکو، ۲۰۰۱)، (ب): نقاط گاوسی مرتبه دو (نقاط انتگرال‌گیری) در فضای دو بعدی برای یک المان مستطیلی.

۲-۳ شرایط مرزی

به دلیل محدودیت حافظه برای شبیه‌سازی انتشار موج در زمین که یک محیط نامحدود است، در نظر گرفتن یک مرز مصنوعی در حاشیه‌های مدل عددی ضروری است. در غیر این صورت انرژی امواج که به کرانه‌های مدل می‌رسد، با برخورد به کرانه‌های مدل بازتاب شده و دوباره وارد مدل شده و منجر به ایجاد خطا می‌شود (شکل ۵). روش‌های مختلفی برای اعمال این شرط مرزی و کاهش دامنه امواج بازتابی از کرانه‌های مدل معرفی شده است که هرکدام دارای محدودیت و مزیت‌های خاصی هستند. در در این تحقیق از روش مرز جاذب کلایتون و انگکوئیست (۱۹۷۷) استفاده شده است. در این روش معادله امواج رفت‌وبرگشتی در حیطه فوریه از هم تفکیک می‌شود و با استفاده از بسط تیلور تقریب زده می‌شود و با تبدیل فوریه معکوس به حیطه زمان برگردانده می‌شود؛ سپس جابه‌جایی در کرانه‌های مدل عددی با استفاده از حل معادله امواج بیرون‌رونده محاسبه می‌شود. در واقع انتشار موج در کرانه‌های مدل با معادله انتشار یک‌طرفه توصیف می‌شود؛ که منجر به کاهش قابل‌توجه بازتاب‌های مصنوعی از کرانه‌های مدل می‌شود. این شرایط مرزی به‌آسانی در FEM قابل اجراست. به‌منظور اعمال شرایط مرزی باید جمله $(\nabla E.n)$ در معادله (۴) را محاسبه نمود. با استفاده از شرایط مرزی مرتبه اول کلایتون و انگکوئیست (۱۹۷۷) معادله انتشار امواج GPR برای اطراف مدل برابر است با:

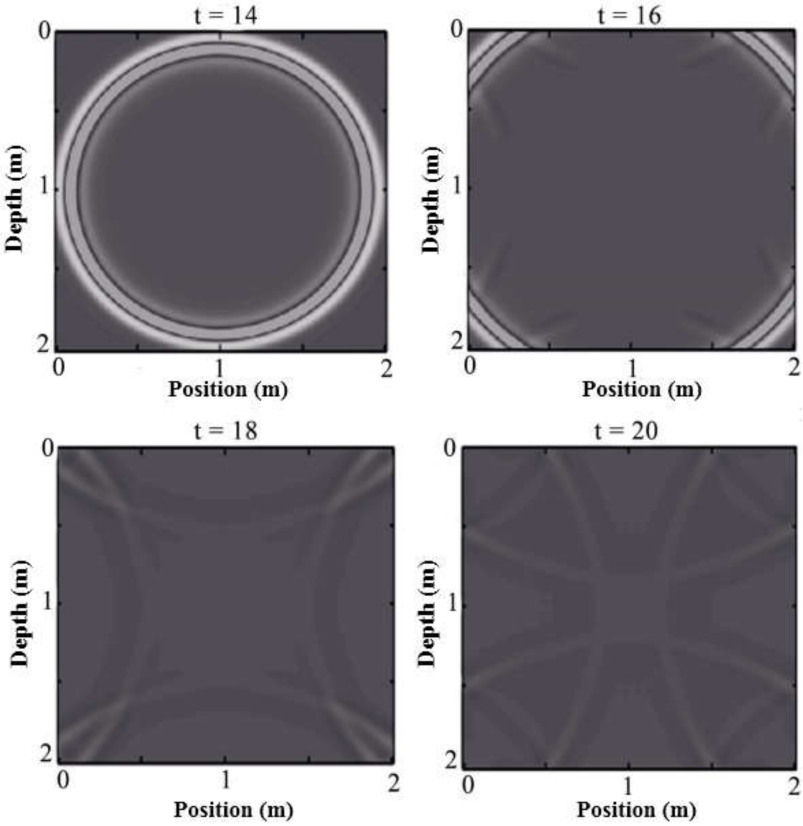
$$\nabla \mathbf{E}.n = -\frac{1}{v}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \ , \qquad (۱۱)$$

با قرار دادن این معادله در جمله مرز رابطه (۴) معادله‌ی زیر بدست خواهد آمد

$$\oint_{\Gamma} \frac{1}{\mu\varepsilon}(\nabla \mathbf{E}.n)\delta\mathbf{E}\, d\Gamma = -\oint_{\Gamma} \frac{1}{\mu\varepsilon}\frac{\dot{\mathbf{E}}\delta\mathbf{E}}{v} d\Gamma, \qquad (۱۲)$$

که v سرعت امواج الکترومغناطیس در درون محیط است. شکل ۳ نمایش لحظه‌ای انتشار امواج رادار در یک محیط همگن و با مرز جاذب مرتبه اول در چهار طرف مدل است. در این مدل چشمه امواج در مرکز مدل قرار دارد. همان‌طور که مشاهده می‌شود امواج رسیده به مرز به‌خوبی تضعیف شده‌اند و مقدار اندکی از انرژی وارد مدل شده است. پس از گسسته‌سازی معادله (۱۲) با استفاده از روابط (۶) و (۷) ماتریس مرز را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\mathbf{A}_b = \oint_{\Gamma} \frac{1}{\mu\varepsilon}\frac{(N^T N)\,\delta\mathbf{E}}{v}\, d\Gamma \, . \qquad (۱۳)$$



شکل ۳. نمایش لحظه‌ای انتشار امواج رادار در یک محیط همگن با مرز جاذب مرتبه اول در کرانه‌های مدل. همان‌طور که مشاهده می‌شود دامنه امواج بازتابی پس از برخورد با کرانه‌های مدل کاهش یافته و به‌خوبی تضعیف شده است. چشمه امواج در مرکز مدل قرار دارد.

همان‌طور که ملاحظه می‌شود عبارت مرز در روش FEM یک عبارت مستقل است؛ بنابراین به‌آسانی می‌توان شرایط مرزی مختلف را در این روش اجرا نمود. در نهایت با در نظر گرفتن شرایط مرزی، معادله دو بعدی اجزاء محدود رابطه‌ی (۳) به‌صورت زیر قابل بیان است:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{E}}+(\mathbf{A}+\mathbf{A}_b)\dot{\mathbf{E}}+\mathbf{K}\mathbf{E}=\mathbf{S}\ . \qquad (۱۴)$$

۳ گسسته سازی زمانی

همان‌طور که مشاهده شد، پس از گسسته‌سازی مکانی، معادلات انتشار امواج رادار به یک دستگاه معادلات دیفرانسیلی زمانی (معادله ۱۴) تبدیل می‌شوند. این معادله را بسته به نیاز می‌توان به‌صورت عددی در حیطه زمان یا بسامد حل کرد. روش‌های متعددی برای گسسته‌سازی زمانی معادلات پیشنهاد شده است که از آن جمله می‌توان روش تفاضل محدود مرکزی، روش نیومارک، روش رونگه-کوتا و روش لاکس- وندروف را نام برد. یکی از رایج‌ترین روش‌ها، روش تفاضل محدود مرکزی است که به فراوانی در مدل‌سازی امواج رادار به‌کار گرفته می‌شود (فنگ و همکاران، ۲۰۱۵).

با استفاده از روش تفاضل محدود مرکزی (مشتق اول و دوم) خواهیم داشت (جیان مینگ، ۲۰۱۴):

$$\dot{\mathbf{E}}=\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}=\frac{\mathbf{E}(k+1)-\mathbf{E}(k-1)}{2dt}\ , \qquad (۱۵)$$

$$\ddot{\mathbf{E}}=\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}=\frac{\mathbf{E}(k+1)-2\mathbf{E}(k)+\mathbf{E}(k-1)}{dt^2}\ , \qquad (۱۶)$$

که dt فاصله‌ی گام زمانی می‌باشد. با قرار دادن رابطه فوق در معادله (۱۴) می‌توان $\boldsymbol{E}$ را در زمان آینده $(k+1)$ با استفاده از مقادیر $\boldsymbol{E}$ در دو زمان قبل $(k, k\text{-}1)$ محاسبه نمود. سؤالی که در اینجا مطرح می‌شود آن است که u موجود در عبارت سوم معادله (**KE**) در چه زمانی نوشته شود (زمان جدید $(k+1)$ یا زمان حال (k)). درصورتی‌که این عبارت در زمان حال (k) نوشته شود، به آن روش صریح (Explicit scheme) گویند (ماتئو و سادیکو، ۲۰۰۱). در این صورت می‌توان نوشت:

$$\left(\frac{\mathbf{M}}{dt^2}+\frac{(\mathbf{A}+\mathbf{A}_e)}{2dt}\right)\mathbf{E}_{t+dt}=\mathbf{S}_t + \left(\frac{2\mathbf{M}}{dt^2}-\frac{\mathbf{K}}{dt}\right)\mathbf{E}_t+\left(\frac{(\mathbf{A}+\mathbf{A}_e)}{2dt}-\frac{\mathbf{M}}{dt^2}\right)\mathbf{E}_{t-dt}. \qquad (۱۷)$$

درصورتی‌که u موجود در عبارت سوم معادله (**KE**) در زمان جدید $(k+1)$ نوشته شود، به آن روش ضمنی (Implicit scheme) گویند. روش صریح دارای حجم و زمان محاسبات کمتری نسبت به روش ضمنی است ولی دارای مشکل انتشار خطای عددی و در نتیجه ناپایداری پاسخ‌هاست؛ بنابراین می‌بایست قبل از انجام آن، تحلیل پایداری انجام شود.

معادله (۱۷) را با در نظر گرفتن $B=\left(\frac{\mathbf{M}}{dt^2}+\frac{(\mathbf{A}+\mathbf{A}_e)}{2dt}\right)$ و $C=\mathbf{S}_t+\left(\frac{2\mathbf{M}}{dt^2}-\frac{\mathbf{K}}{dt}\right)\mathbf{E}_t+\left(\frac{(\mathbf{A}+\mathbf{A}_e)}{2dt}-\frac{\mathbf{M}}{dt^2}\right)\mathbf{E}_{t-dt}$ می‌توان به شکل یک معادله‌ی خطی $\mathrm{B}x=\mathrm{C}$ نوشت. همان‌طور که مشاهده می‌شود ماتریس B در روش FEM چند قطری می‌باشد که اگر به‌صورت مستقیم وارون‌سازی شود نیاز به زمان و حافظه‌ی پردازشی عظیمی دارد. همچنین با تشکیل ماتریس‌ها مشاهده می‌شود که بیشتر آرایه‌های این ماتریس‌ها صفر است یا به عبارت دیگر تنک می‌باشند. تشکیل ماتریس‌ها به شیوه ذخیره‌سازی تنک علاوه بر کاهش حجم محاسبات، زمان محاسبات را نیز به‌شدت کاهش خواهد داد. استفاده از پردازش موازی (انجام هم‌زمان محاسبات در چندین هسته پردازشی) گزینه دیگری برای افزایش سرعت و بازده محاسبات است. در سرهم‌بندی ماتریس‌ها در روش اجزاء محدود، محاسبه ماتریس مربوط به هر المان که مستقل از دیگری است، می‌تواند به‌صورت موازی انجام شود.

۴ پایداری و پاشندگی عددی

یک نکته مهم در گسسته‌سازی زمانی، انتخاب گام زمانی مناسب است. در عمل تمایل بر این است که مقدار گام زمانی، بزرگ انتخاب شود تا مدل‌سازی سریع‌تر صورت گیرد. همان‌طور که اشاره شد، در گسسته‌سازی صریح (explicit) اگر dt خیلی بزرگ در نظر گرفته شود در آن صورت ناپایداری عددی رخ خواهد داد. بنابراین برای برقراری شرط پایداری می‌توان از معادله زیر که تضمین‌کننده پایداری مسئله در انتشار امواج رادار است بهره برد (ایروینگ و نایت، ۲۰۰۶).

$$dt_{\max}\le\frac{6}{7}\sqrt{\frac{\varepsilon_{\min}\,\mu_{\min}}{\frac{1}{dx^2}+\frac{1}{dz^2}}}\quad, \qquad (۱۸)$$

که $_{min}$ و μ_{min} کمترین مقادیر گذردهی الکتریکی و نفوذپذیری مغناطیسی در محیط مدل‌سازی، و dx و dz به‌ترتیب طول گام‌های مکانی در جهت x و z می‌باشند.

همچنین زمانی که یک معادله دیفرانسیلی توسط روش‌های مختلف گسسته‌سازی می‌شود، مساله پاشش عددی در محاسبات عددی ظاهر می‌شود. این پدیده زمانی که پاسخ‌های مورد نظر هموار نیست، می‌تواند دقت روش عددی را به‌شدت تحت تأثیر قرار دهد. پاشش عددی باعث حرکت بسامدهای مختلف امواج شبیه سازی شده با سرعت متفاوت و در نتیجه تغییر شکل و ریخت پاسخ و همچنین تغییر طیف دامنه و فاز پاسخ می‌شود. این پدیده نتیجه غیر قابل اجتناب گسسته‌سازی مکانی است. برای جلوگیری از پاشندگی عددی در مدل باید طول

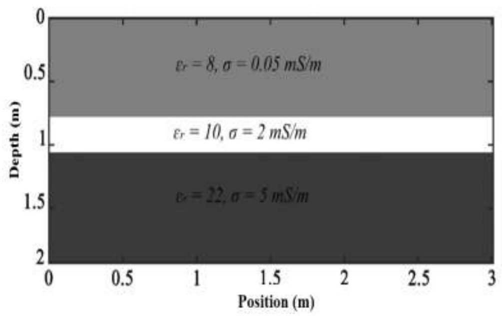
گام‌های مکانی با دقت خوبی تقریب زده شوند، یعنی $dx = dz \leq \lambda_{\min}/10$، که $\lambda_{\min}$ کمترین طول موج است (فنگ و همکاران، ۲۰۱۵). به‌عبارت‌دیگر برای جلوگیری از پاشندگی، در کمترین طول موج منتشره در مدل باید حداقل ۱۰ گره در نظر گرفته شود.

۵ مثال‌های عددی

به‌منظور بررسی عملکرد روش FEM در مدل‌سازی انتشار امواج رادار، برنامه‌ی رایانه‌ای با استفاده از نرم‌افزار متلب نوشته شده است که برای بررسی و ارزیابی این الگوریتم‌ها و چگونگی پاسخ امواج GPR نسبت به ساختارهای متداول در مسائل ژئوفیزیکی نظیر لایه‌بندی ناحیه مورد مطالعه، میله‌های فلزی و بلوک‌های سیمانی در اینجا دو مثال آورده شده است. تراوایی (نفوذپذیری) مغناطیسی برای بیشتر سنگ‌ها (به‌جز سنگ‌های حاوی کانی‌های مغناطیسی) نزدیک به تراوایی مغناطیسی خلأ (که دقیقاً برابر $4\pi\times10^{-7}$ Vs/Am است) می‌باشد؛ بنابراین در بیشتر محاسبات از μ_0 به‌جای μ استفاده می‌شود، که در مثال‌های ذکر شده مقدار نفوذپذیری مغناطیسی همواره برابر μ_0 است.

۵-۱ مدل اول

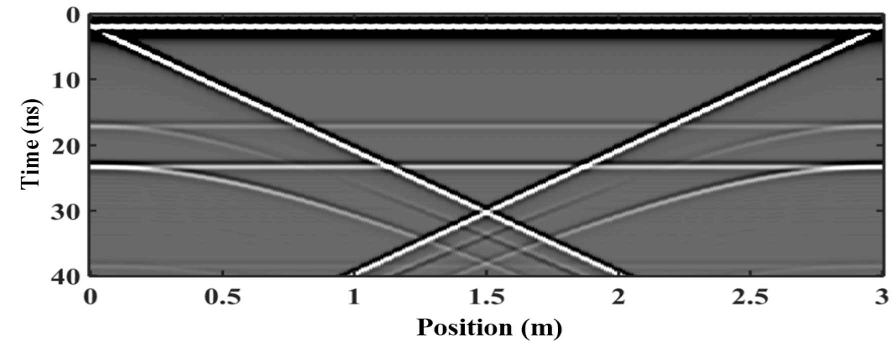
یک مدل سه لایه ساده مستطیلی ۳ در ۲ متر به‌منظور شبیه‌سازی انتشار امواج رادار در نظر گرفته شده است (شکل ۴). لایه اول دارای ضریب گذردهی نسبی $\varepsilon_r = 8.0$، رسانندگی $\sigma=0.05\times10^{-3}$ S/m، لایه دوم دارای ضریب گذردهی نسبی $\varepsilon_r = 10.0$، رسانندگی $\sigma=2.0\times10^{-3}$ S/m و لایه سوم دارای ضریب گذردهی نسبی $\varepsilon_r = 22.0$، رسانندگی $\sigma=5.0\times10^{-3}$ S/m می‌باشد. در این مثال تعداد نقاط گره‌ای ۱۹۳ × ۲۸۹ می‌باشد که یک موجک ریکر با فرکانس مرکزی ۶۰۰ مگاهرتز، به‌عنوان چشمه انرژی در نظر گرفته شده است. گام زمانی و طول گام مکانی در نظر گرفته شده در این مثال به‌ترتیب برابر با $dt=0.006$ ns , $dx = 0.01$ m می‌باشند. شکل ۵ نتایج حاصل از شبیه‌سازی را نمایش می‌دهد. این شکل مقطع زمانی (مقطع دور افت صفر) برای مدل نشان داده شده در شکل ۴ را نمایش می‌دهد. همان‌طور که مشاهده می‌شود در شکل ۵-الف بازتاب‌های شیب‌دار از مرزها دارای دامنه‌ی بالایی هستند که علت این دامنه‌های بالا عدم اعمال شرایط مرزی در کناره‌های مدل می‌باشد، در حالی که با اعمال شرایط مرزی CA-ABC بر روی مقطع مورد نظر شکل ۵-ب، اگرچه شرایط مرزی اعمال شده نتوانسته به‌طور کامل امواج رسیده به کرانه‌های مدل را جذب نماید (رخدادهای شیب‌دار) ولی در حد قابل قبولی توانسته امواج را در مرزها تضعیف نماید. همان‌طور که در شکل ۵-ب ملاحظه می‌شود مرز لایه‌ها در این مثال به‌خوبی قابل تفکیک می‌باشند. همچنین به دلیل تفاوت در تباین بیشتر در ضریب دی الکتریک نسبی و رسانندگی بین لایه دوم و سوم نسبت به لایه‌ی اول و دوم، به‌مراتب انرژی بازتابی قدرتمندتری نسبت به لایه‌ی اول و دوم مشاهده می‌شود.



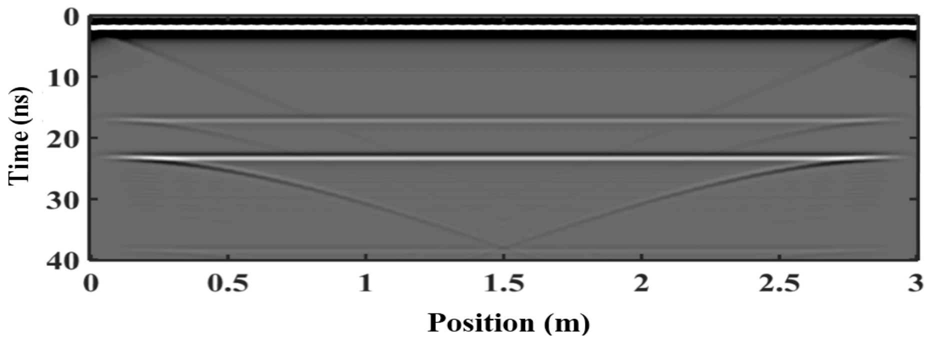
شکل ۴. ویژگی‌های فیزیکی و هندسی استفاده شده در مدل اول به‌منظور شبیه‌سازی امواج GPR.

۵-۲ مدل دوم

مدل بعدی که به‌منظور مدل‌سازی در نظر گرفته شده است، یک مدل دولایه است که یک میله فلزی با ضریب

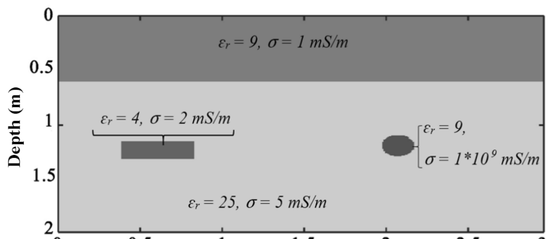


(الف)



(ب)

شکل ۵. مقطع زمانی (مقطع دور افت صفر) حاصل از شبیه‌سازی امواج GPR مدل اول با استفاده از روش FEM. (الف) مقطع زمانی بدون اعمال شرایط مرزی CA-ABC، بازتاب‌های شیب‌دار از مرزها دارای دامنه بالایی هستند، (ب) مقطع زمانی با اعمال شرایط مرزی CA-ABC، همان‌طور که از مقطع (ب) مشخص است اگرچه شرایط مرزی اعمال شده نتوانسته به‌طور کامل امواج رسیده به کرانه‌های مدل را جذب نماید (رخدادهای شیب‌دار) ولی در حد قابل قبولی توانسته امواج را در مرزها تضعیف نماید. بازتاب حاصل از لایه اول در زمان ۱۷ نانوثانیه و بازتاب حاصل از مرز دوم در زمان ۲۳ نانوثانیه به‌خوبی در مقطع (الف) قابل مشاهده است.

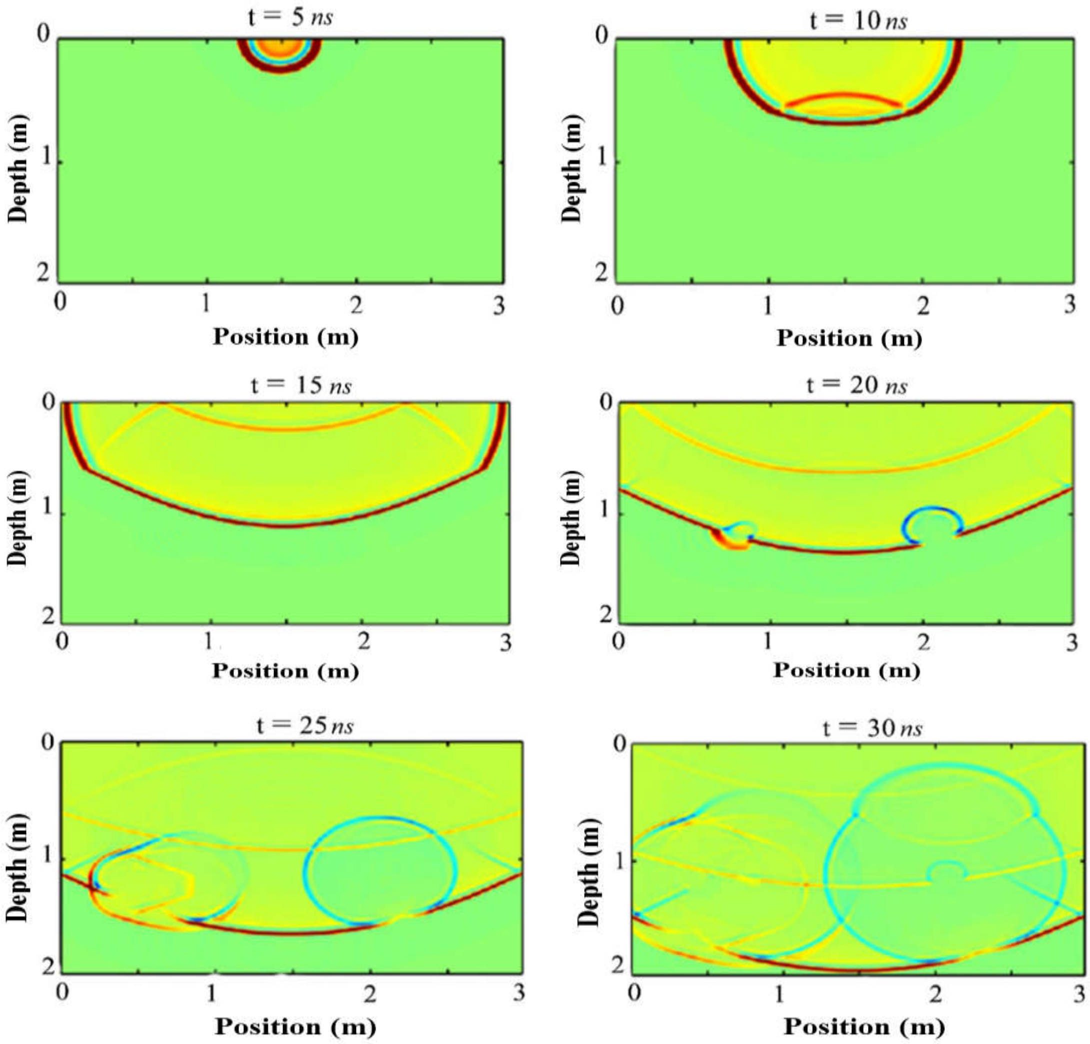


شکل ۶. ویژگی‌های فیزیکی و هندسی مدل دوم به‌منظور شبیه‌سازی امواج GPR. آنومالی مستطیل شکل به‌منزله یک بلوک سیمانی مدفون و همچنین آنومالی دایره‌ای به‌منزله سطح مقطع یک استوانه فلزی مدفون در لایه دوم است.

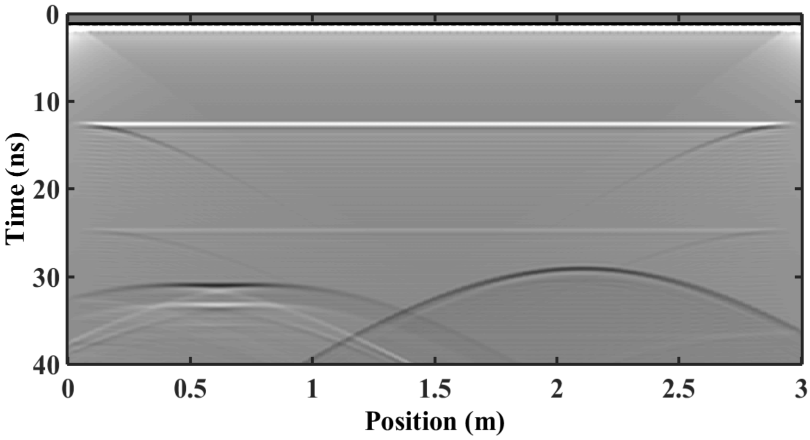
گذردهی نسبی $\varepsilon_r = 9.0$، رسانندگی $\sigma=1.0\times10^{6}$ S/m و یک بلوک سیمانی با ضریب گذردهی نسبی $\varepsilon_r = 4.0$ رسانندگی $\sigma=2.0\times10^{-3}$ S/m در لایه‌ی دوم قرار دارند. لایه اول دارای ضریب گذردهی نسبی $\varepsilon_r = 9.0$، رسانندگی $\sigma=1.0\times10^{-3}$ S/m، لایه دوم دارای ضریب گذردهی نسبی $\varepsilon_r = 25.0$، رسانندگی $\sigma=5.0\times10^{-3}$ S/m است (شکل ۶). چشمه انرژی تابع $f(t)=t^2 e^{-at}\sin wt$ می‌باشد، که $a = 0.93\omega$ است، ω فرکانس مرکزی به‌کار گرفته شده برای تولید چشمه انرژی می‌باشد، که مقدار آن برابر با ۸۰۰ مگا هرتز است. در شکل ۷ نمایش لحظه‌ی انتشار امواج رادار در مدل مورد نظر و چگونگی برخورد و بازتاب این امواج را با آنومالی‌ها و فصل مشترک دو لایه به‌خوبی مشاهده می‌کنیم. زمان t = 5 ns نمایانگر انتشار امواج درون لایه اول می‌باشد. در زمان t = 10 ns

لحظه برخورد امواج با لایه دوم می‌باشد. $t = 20$ ns لحظه برخورد و بازتاب امواج الکترومغناطیس با میله فلزی و بلوک سیمانی را نشان می‌دهد. در زمان‌های بعدی هم لحظه برهم‌کنش امواج با ساختارهای زیرسطحی و لایه‌ها را به‌خوبی می‌توان مشاهده نمود.

مقطع زمانی (مقطع دور افت صفر) حاصل از این شبیه‌سازی در شکل ۸ نمایش داده شده است. همان‌طور که ملاحظه می‌شود پراش حاصل از بلوک و میله فلزی متفاوت بوده، به‌عبارت دیگر پراش حاصل از میله فلزی به‌صورت یک هذلولی کامل می‌باشد، که در داده‌های واقعی هم شاهد این هذلولی‌ها برای اجسام کروی و استوانه‌ای هستیم. همچنین در این شکل ما شاهد بازتاب-هایی در کناره‌های مدل هستیم که مربوط به جسم و بازتابنده خاصی نبوده و همان‌طور که ذکر کردیم دلیل این رخدادها شرایط مرزی به‌کار گرفته شده در این تحقیق است.



شکل ۷. نمایش لحظه‌ی انتشار امواج GPR در زمان‌های مختلف در مدل زمین‌شناسی نمایش داده شده در شکل ۶، چشمه انرژی در روی سطح و در مکان $x=m$ قرار داده شده است.



شکل ۸. مقطع زمانی (مقطع دور افت صفر) حاصل از شبیه‌سازی امواج رادار مدل نمایش داده شده در شکل ۷ با استفاده از روش FEM. مرز لایه اول و دوم در زمان ۱۲ نانو ثانیه قابل مشاهده است. استوانه مدفون خود را به‌صورت یک هذلولی نشان می‌دهد که در سمت راست مقطع قابل مشاهده است. همچنین آنومالی ناشی از بلوک سیمانی نیز در سمت چپ قابل مشاهده است که مرز بالا و پایین بلوک سیمانی در شکل قابل رؤیت می‌باشند.

۶ نتیجه‌گیری

در این تحقیق از روش اجزاء محدود به‌منظور شبیه‌سازی و انتشار امواج رادار استفاده گردید. به‌منظور ذخیره‌سازی ماتریس‌های تولید شده در روش FEM به دلیل چند قطری بودن و تنک بودن این ماتریس‌ها، از روش‌های ارائه شده به‌منظور ذخیره‌سازی ماتریس‌های تنک بهره برده شده است که راه‌حل مناسبی به‌منظور کاهش حجم مورد نیاز برای ذخیره‌سازی این ماتریس‌ها می‌باشد. همچنین استفاده از پردازش موازی گزینه دیگری برای افزایش سرعت و بازده محاسبات در روش اجزاء محدود بود. به دلیل سادگی در اجرا و سرعت بالای روش کلایتون–انگکوئیست، از این روش به‌منظور تضعیف امواج در کرانه‌های مدل بهره برده شد و همان‌طور که در مثال‌ها مشاهده شد، دامنه امواج بازتابی پس از برخورد با کرانه-های مدل به‌خوبی تضعیف شده‌اند و تنها مقدار کمی از امواج به داخل مدل بازتاب شده‌اند. با توجه به نتایج به‌دست‌آمده از مدل‌سازی عددی داده‌های GPR با استفاده از روش FEM ملاحظه می‌شود که این روش دارای دقت مناسب در مدل‌های پیچیده و مختلف است، از این جهت، از آن می‌توان به‌عنوان ابزاری سودمند به‌منظور حل مسائل ژئوفیزیکی و تفسیر داده‌های امواج رادار سود برد.

منابع

Bergmann, T., Robertson, J. O. A., and Holliger, K., 1998, Finite-difference modelling of electromagnetic wave propagation in dispersive and attenuating media: Geophysics, **63**(3), 856–867.

Cassidy, N. J., 2007b, A review of practical numerical modelling methods for the advanced interpretation of ground-penetrating radar in near-surface environments: Near Surface Geophysics, **5**(1), 5–22.

Clayton, R., and Engquist, B., 1977, Absorbing boundary conditions for acoustic and elastic wave equations: Bulletin of the Seismological Society of America, **67**(6), 1529-1540.

Di, Q., and Wang, M., 2003, Migration of ground-penetrating radar data with a finite-element method that considers attenuation and dispersion: Geophysics, **69**(2), 472 477.

Ellefsen, K. J., 1999, Effects of layered sediments on the guided wave in crosswell radar data: Geophysics, **64**(6), 1698–1707.

Fang, W. Z., Li, Y. G., and Li, X., 1993, Principle of Transient Geomagnetic Sounding Method: University of Northwest Industry Press.

Jian-Ming, J., 2014, The Finite Element Method in Electromagnetics: Wiley-IEEE Press.

Joll, H. M., 2009, Ground Penetrating Radar Theory and Application: Elsevier.

Sadiku, M. N. O., 2001, Numerical Techniques in Electromagnetics: CRC Press, LLC.

Roberts, R. L., and Daniels, J. J., 1997, Modelling near-field GPR in three dimensions using the FDTD method: Geophysics, **62**(4), 1114–1126.

Yee, K. S., and Chen, J. S., 1997, The finite-difference time-domain (FDTD) and the finite-volume time-domain (FVTD) methods in solving Maxwell's equations: IEEE Transactions on Antennas and Propagation, **45**(3), 354-363.

Feng, D., Chen, C., and Wang, H., 2012, Finite element method GPR forward simulation based on mixed boundary condition: Chinese Journal of Geophysics, **55**(11), 3774 3785 (in Chinese).

Feng, D., Guo, R., and Wang, H., 2015, An element-free Galerkin method for ground penetrating radar numerical simulation: Journal of Central South University, **22**(1), 261 269.

Fichtner, A., 2011, Full Seismic Waveform Modelling and Inversion: Springer.

Irving, J., and Knight, R., 2006, Numerical modeling of ground-penetrating radar in 2-D using MATLAB: Computers and Geosciences, **32**(9): 1247 1258.

Numerical modeling of round-penetrating radar (GPR) using finite-element method

Sajjad Zarei[1], Amin Rahimi Dalkhani[2], and Navid Amini[3*]

[1]*M. Sc. Student, Institute of Geophysics, University of Tehran, Tehran, Iran*
[2]*M. Sc. Student, Department of Petroleum Engineering, Amirkabir University of Technology, Tehran, Iran*
[3]*Assistant Professor, Institute of Geophysics, University of Tehran, Tehran, Iran*

(Received: 05 December 2015, Accepted: 14 October 2017)

Summary

Ground-penetrating radar (GPR) is a popular geophysical method for high-resolution imaging of the shallow subsurface structures. Numerical modeling of radar waves plays a significant role in interpretation, processing, and imaging of GPR data. A number of different approaches have been presented for the numerical modeling of GPR data. The most common approach for GPR modeling is the finite-difference method (FDM) because the FDM approach is conceptually simple and easy to program. The difficulties in applying boundary conditions at non-linear boundaries and the lack of sufficient accuracy in complex geometries are the most important drawbacks of FDM.

This paper presents a finite-element method, for simulation of ground-penetrating radar (GPR) in two dimensions in the time-domain. FEM is a powerful and versatile numerical technique for handling problems involving complex geometries and inhomogeneous media. The technique is based on a weak formulation of Maxwell's equations. In the FEM method, the wavefield is discretized on the elements using Lagrange interpolation, and integration over an element is accomplished based upon the Gaussian-quad integration rule. The major difference between the various numerical methods is in the spatial discretization. In the elemental-based methods, the complex geometry of the problem is divided into several smaller and simpler elements, then the integrals are calculated for each element. These methods have no with any regular or irregular geometry. The responses of the model in the finite-element methods are approximated in nodal points, so nodal polynomials of Lagrange are used for interpolation of the model response. Besides, the systematic generality of the method makes it possible to construct general-purpose computer programs for solving a wide range of problems. In this paper, at first, Maxwell's equations are discretized, then the boundary condition is applied to minimize artificial reflections from the edges of the computation domain. Although the governing equations and mechanisms are completely different between radar and seismic waves, most of GPR data processing approaches are derived from seismic data processing. Due to similarities in these two techniques, accordingly, we implement the first-order Clayton and Engquist absorbing boundary conditions (first order CE-ABC) introduced in the numerical finite-difference modeling of seismic wave propagation. This boundary condition is simple to apply. The presented formulations are in matrix notation that simplifies the implementation of the relations in computer programs, especially in MATLAB application. After spatial discretization with FEM, time discretization is done by Finite-Central Difference (FCD). The time discretization is the most massive and time-consuming step in modeling, which spatial discretization has an important role in this process. The stiffness, mass and damping matrices are sparse and symmetrical in FEM; so if we use the optimized numerical algorithms and storages strategies, computational costs and processing-time can be reduced significantly. To investigate the efficiency of FEM, the computer program has been written in MATLAB and has been tested on two models. The results show that the radar wave simulation via FEM is an accurate and effective approach in complex models.

Keywords: ground-penetrating radar (GPR), finite-element method (FEM), numerical modeling, absorbing boundary conditions (ABC)

*Corresponding author: navidamini@ut.ac.ir