مجله ژئوفیزیک ایران، جلد ۱۳، شماره ۲، ۱۳۹۸، صفحه ۳۶ - ۵۰

حل عددی معادله فرارفت دوبعدی در هندسه کروی روی یک شبکه یین- یَنگ با استفاده از روش مک‌کورمک فشرده مرتبه چهارم

رسول میرزائی شیری[1]، سرمد قادر[2]* و علیرضا محب‌الحجه[3]

[1] دانشجوی دکترای هواشناسی، گروه فیزیک فضا، موسسه ژئوفیزیک، دانشگاه تهران، تهران، ایران
[2] دانشیار، گروه فیزیک فضا، موسسه ژئوفیزیک، دانشگاه تهران، تهران، ایران
[3] استاد، گروه فیزیک فضا، موسسه ژئوفیزیک، دانشگاه تهران، تهران، ایران

(تاریخ دریافت: ۱۳۹۷/۱۱/۰۱، تاریخ پذیرش: ۱۳۹۸/۰۶/۰۶)

چکیده

با توجه به هندسه تقریباً کروی جو و اقیانوس، حل عددی معادلات حاکم بر این لایه‌ها نیازمند استفاده از یک شبکه کروی مناسب است. شبکه یین-یَنگ یکی از انواع شبکه‌های هم‌پوشان است. این شبکه ترکیبی از دو شبکه به نام‌های یین و یَنگ، با یک هم‌پوشانی مختصر است که هر دو، شبکه‌هایی متعامد بر پایه شبکه متداول طول و عرض جغرافیایی هستند. هیچ نقطه تکینه‌ای روی این شبکه وجود ندارد و فاصله‌بندی شبکه‌ای آن شبه‌یکنواخت است. در نقاط مرزی هر دو مؤلفه شبکه‌ای آن به استفاده از روش‌های درون‌یابی نیاز است.

در این پژوهش، معادله فرارفت دوبعدی در یک آزمون موردی استاندارد شناخته‌شده با استفاده از روش مک‌کورمک فشرده مرتبه چهارم با پیمایش زمانی رونگِ-کوتای مرتبه چهارم روی یک شبکه یین-یَنگ به‌طور عددی حل شده است. برای ایجاد امکان مقایسه نحوه عملکرد الگوریتم توسعه‌داده‌شده روی شبکه یین-یَنگ، این الگوریتم روی شبکه کروی استاندارد بر پایه طول و عرض جغرافیایی نیز پیاده‌سازی شده است. نتایج نشان می‌دهند که استفاده از روش‌های مک‌کورمک فشرده مرتبه چهارم برای حل معادله فرارفت دوبعدی در هندسه کروی روی شبکه یین-یَنگ، در کاهش هزینه محاسباتی بسیار مؤثر بوده است، اما با محاسبه خطا با استفاده از نُرم‌های قدرمطلق، مربع و بی‌نهایت، افزایش خطا در حدود یک مرتبه بزرگی نسبت به حل عددی این معادله با همین روش روی شبکه بر پایه طول و عرض جغرافیایی مشاهده می‌شود که این خطا می‌تواند به‌دلیل استفاده از درون‌یابی در محاسبات باشد. به‌هرحال، دقت این روش روی این شبکه قابل قبول است و نتایج کیفی این حل عددی نیز این موضوع را تأیید می‌کنند.

واژه‌های کلیدی: شبکه یین-یَنگ، مختصات کروی، روش مک‌کورمک فشرده مرتبه چهارم، رونگ-کوتا، معادله فرارفت دوبعدی

* نگارنده رابط: sghader@ut.ac.ir

۱ مقدمه

جو، اقیانوس و لایه‌های دیگر کره زمین، شکل هندسی تقریباً کروی دارند. با توجه به اینکه شارش‌های جوی و اقیانوسی ماهیت بسیار پیچیده‌ای دارند، حل عددی معادلات حاکم بر این شارش‌ها نیازمند استفاده از یک شبکه کروی مناسب است. به‌طور کلی، می‌توان گفت که هیچ شبکه کروی وجود ندارد که به‌طور هم‌زمان چهار ویژگی متعامد بودن (orthogonality)، نبود تکینگی (singularity) در مختصات، نبود مشکل همگرایی مختصات و تعریف شدن در یک سطح کروی کامل را داشته باشد (کاگِیاما، ۲۰۰۵)؛ بنابراین، به‌ناچار در تعریف یک دستگاه مختصات کروی از یک یا دو مورد از این چهار شرط ناسازگار چشم‌پوشی می‌شود. برای مثال، دستگاه مختصات کروی متداول بر پایه طول و عرض جغرافیایی از هر دو شرط دوم و سوم صرف‌نظر کرده است، اما به همین دلیل، این شبکه مشکلاتی را در گسسته‌سازی مکانی معادلات مختلف ایجاد می‌کند. یکی از راه‌های غلبه بر مشکل تکینگی در روش‌های تفاضل متناهی در شبکه یادشده این است که شبکه به‌اندازه نصف فاصله شبکه‌ای در راستای نصف‌النهاری جابه‌جا شود و مقادیر هر کمیت در هر تراز زمانی روی نقاط این شبکه به‌دست‌آید. در این‌صورت دو قطب شمال و جنوب، دیگر جزء نقاط شبکه نخواهند بود. باید توجه کرد که قطب‌های شمال و جنوب به‌صورت فیزیکی نقاط تکینه نیستند، بلکه ویژگی دستگاه مختصات کروی براساس طول و عرض جغرافیایی، آنها را به‌صورت نقاط تکینه درآورده است. برقرار نبودن شرط سوم، یعنی وجود همگرایی مختصات که با عنوان مشکل قطب شناخته می‌شود، مشکل بزرگ‌تری است. این مشکل سبب ایجاد محدودیت در انتخاب گام زمانی مناسب برای برآوردن شرط CFL (Courant- Friedrichs- Lewy) می‌شود که برای رفع آن می‌توان از پالایه‌های مخصوص این مشکل استفاده کرد. این راهکار و راهکارهای مشابه، از دقت روش عددی مورد استفاده می‌کاهد؛ زیرا موجب از دست رفتن خواص مفیدی مانند مثبت-معین (positive-definite) بودن و یکنواختی (monotonicity) می‌شود (برای نمونه، اسکاماروک و همکاران، ۲۰۰۵). منظور از مثبت-معین بودن، تولید نشدن مقادیر منفی در میدان‌های مثبت مانند جرم و منظور از یکنواختی، تولید نشدن نوسان‌های اضافی در مناطق با گرادیان‌های شدید می‌باشد. این محدودیت در انتخاب گام زمانی مناسب باعث می‌شود روش‌های تفاضل متناهی، به‌ویژه روش‌های فشرده، در شبیه‌سازی‌های مربوط به معادلات مختلف جوی و اقیانوسی به روش‌هایی ناکارآمد تبدیل شوند. برای غلبه بر این مشکل و بهره‌گیری عملیاتی از روش‌های تفاضل متناهی فشرده با دقت زیاد روی کره، بهتر است شبکه‌ای اختیار شود که هر دو شرط ذکرشده یعنی نداشتن تکینگی در مختصات و نداشتن همگرایی مختصات را داشته‌باشد. شرط اول یعنی متعامد بودن یک شبکه آن‌چنان اهمیت دارد که معمولاً در تعریف هر شبکه کروی به‌راحتی از آن چشم‌پوشی نمی‌شود. با توجه به موارد ذکرشده، به‌نظر می‌رسد که بهترین گزینه، صرف‌نظر کردن از شرط چهارم باشد؛ یعنی شبکه روی یک سطح کروی کامل تعریف نشود و بنابراین سطح کره به چند زیرناحیه تقسیم شود. روش‌های مختلفی برای این تقسیم‌بندی وجود دارد که به دو دسته کلی تقسیم می‌شوند. دسته اول به روش-های شبکه وصله‌شده (patched grid) معروف هستند که در این روش‌ها مرزهای هریک از زیرناحیه‌ها بدون هیچ هم‌پوشانی کاملاً زیرنواحی را از هم جدا می‌کنند. دسته دوم، روش‌هایی هستند که در آنها مرزها می‌توانند هم‌پوشانی مختصری نیز با هم داشته باشند که به این شبکه‌ها، شبکه‌های هم‌پوشان (overset) گفته می‌شود که با نام‌های دیگری از قبیل overlaid، composite overlapping یا Chimera نیز شناخته می‌شوند. اعتبار و

اهمیت شبکه‌های هم‌پوشان در محاسبات آیرودینامیکی به مطالعه استِگر (۱۹۸۲) برمی‌گردد (کاگیاما و ساتو، ۲۰۰۴). این روش به‌طور گسترده‌ای در محاسبات آیرودینامیکی هواپیماها، سفینه‌های فضایی و بالگردها به‌کارگرفته شده‌است (مِآکین، ۱۹۹۲؛ مِآکین، ۱۹۹۳؛ کائو و همکاران، ۱۹۹۸؛ راجرز و همکاران، ۱۹۹۸؛ بانینگ و همکاران، ۱۹۸۸ و داک و همکاران، ۱۹۹۶).

شبکه یین-یَنگ (Yin-Yang)یکی از انواع شبکه‌های هم‌پوشان است که کاگیاما و ساتو (۲۰۰۴) معرفی کرده‌اند. این مختصات، ترکیبی از دو شبکه به نام‌های یین و یَنگ، با یک هم‌پوشانی مختصر است. مزایای شبکه یین-یَنگ را به‌طور خلاصه می‌توان به‌صورت زیر بیان کرد (استانیفورث و توبورن، ۲۰۱۲):

۱- هر دو مؤلفه تشکیل‌دهنده این شبکه، خود شبکه‌هایی متعامد بر پایه شبکه متداول طول و عرض جغرافیایی هستند؛

۲- هیچ نقطه تکینه‌ای روی این شبکه وجود ندارد؛

۳- ضرایب متریک برای هر دو مؤلفه شبکه‌ای، به‌طور تحلیلی، شناخته‌شده هستند؛

۴- فاصله‌بندی شبکه‌ای آن شبه‌یکنواخت (quasi-uniform) است؛

۵- نقاط کمتری (حدود ۲۰ تا ۲۵ درصد) برای تفکیک شبه‌یکنواخت این شبکه نسبت به شبکه متداول طول و عرض جغرافیایی لازم است؛

۶-گسسته‌سازی‌ها و کُدهای موجود در شبکه طول و عرض جغرافیایی را می‌توان برای این شبکه نیز با تغییرات کوچک استفاده کرد.

ایراد اساسی این شبکه، وجود همان هم‌پوشانی مختصر در مرزهای دو مؤلفه شبکه‌ای موسوم به یین و یَنگ و همچنین ضرورت استفاده از روش‌های درون‌ابی در مرزهای هر دو مؤلفه شبکه‌ای است که می‌تواند سبب ایجاد اختلال در پایستگی کمیت‌های پایستار شود که باید چاره‌ای برای آن اندیشیده شود.

در پژوهش حاضر، برای درون‌یابی از روش دوخطی (bilinear) استفاده شده است. البته باید اشاره کرد که در این پژوهش، روش‌های درون‌یابی با مرتبه بالاتر نیز آزمایش شد، اما با توجه به اینکه این افزایش مرتبه دقت در روش درون‌یابی، تأثیر درخورتوجهی در کاهش مقادیر خطای حاصل از حل عددی با روش‌های مورد استفاده نداشت و زمان محاسباتی روش‌ها را نیز افزایش داد، از ارائه نتایج آنها در این مقاله خودداری شده است.

هدف این پژوهش، حل عددی معادله فرارفت دوبعدی با استفاده از روش مک‌کورمک فشرده مرتبه چهارم، روی شبکه کروی یین-یَنگ است. از این‌رو، در ادامه درباره این روش عددی توضیح مختصری داده می‌شود.

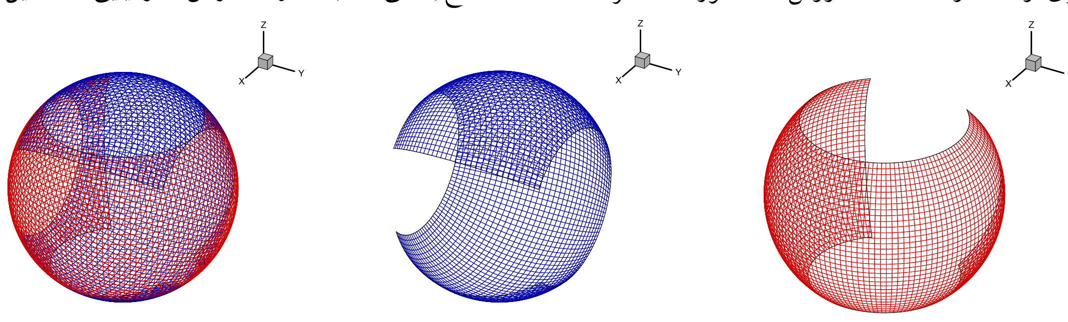
در سال‌های اخیر گرایش به‌سمت افزایش دقت در شبیه‌سازی عددی شارش‌های جوی و اقیانوسی با توجه به پیچیدگی ذاتی این شارش‌ها افزایش یافته است. روش‌های فشرده با توجه به تفکیک بالا و کارایی مناسبی که در شبیه‌سازی عددی حرکت شاره‌ها در سایر شاخه‌های دینامیک شاره‌ها از خود نشان داده‌اند، در تحقیقات اخیر موردتوجه قرار گرفته‌اند (برای مثال، اصفهانیان و همکاران، ۲۰۰۵؛ محب‌الحجه و دریچل، ۲۰۰۷؛ قادر و همکاران، ۲۰۰۹؛ قادر و نوردشتروم، ۲۰۱۵ و جوان‌نژاد و همکاران، ۲۰۱۶). نکته درخورتوجه در غالب این پژوهش‌ها این است که روش‌های فشرده در شبیه‌سازی شارش‌های جوی و اقیانوسی که نیاز به استفاده از شبکه کروی دارند، روی شبکه کروی متداول بر پایه طول و عرض جغرافیایی به‌کارگرفته‌شده‌اند که این موضوع باعث ایجاد محدودیت در انتخاب گام زمانی مناسب به دلیل برآوردن شرط CFL برای حفظ پایداری روش می‌شود و درعمل، استفاده از این روش‌ها را در کارهای عملیاتی

ناکارآمد می‌سازد؛ بنابراین، اگر این روش‌ها روی یک شبکه کروی یین–یَنگ برای حل عددی معادلات مختلف جوی و اقیانوسی پیاده‌سازی شوند و نتایج قبول شدنی با هزینه محاسباتی کمتر به‌دست‌بیاید، می‌توان در کارهای عملیاتی مانند تولید هسته دینامیکی یک مدل جهانی پیش‌بینی وضع هوا نیز از این الگوریتم‌ها استفاده کرد. در گام اول برای رسیدن به چنین هدفی می‌توان معادلات ساده‌تری مانند معادله فرارفت دوبعدی را در هندسه کروی با استفاده از یکی از روش‌های فشرده روی یک شبکه یین–یَنگ به‌طور عددی حل کرد که مطالعه حاضر نمونه‌ای از این تلاش‌هاست و در گام بعدی می‌توان این الگوریتم را در حل عددی معادلات آب کم‌عمق آزمایش کرد.

اغلب روش‌های فشرده از نوع روش‌های مرکزی هستند؛ یعنی باید معادلات حاکم در سه نقطه شبکه به‌کمک بسط سری تیلور گسسته شوند. به‌علاوه، این روش‌ها ضمنی هستند؛ به این معنا که دستگاه معادلات حاصل از گسسته‌سازی‌ها به‌کمک وارون کردن یک ماتریس سه‌قطری (یا با تعداد قطرهای بیشتر) حل می‌شود. به همین علت در این روش‌ها حجم محاسبات نسبت به روش‌های تفاضل متناهی صریح بیشتر است. طبق تحقیقات مختلف انجام‌یافته در این سال‌ها (برای مثال، میرزائی شیری و همکاران، ۱۳۹۶)، روش مک‌کورمک فشرده مرتبه چهارم یک روش فشرده مناسب برای حل عددی معادلات مختلف جوی و اقیانوسی است. فرمول‌بندی این روش به‌صورت دونقطه‌ای است که این مطلب هم‌زمان با زیاد بودن دقت روش، می‌تواند در کاهش حجم محاسبات نیز مؤثر باشد؛ چون مانند روش‌های فشرده مرکزی نیازی به وارون کردن یک دستگاه معادلات سه‌قطری (یا با تعداد قطرهای بیشتر) ندارد و بنابراین، در پژوهش حاضر، از این روش برای حل عددی معادله فرارفت دوبعدی استفاده شده است. البته باید اشاره کرد که در این کار برای پیمایش زمانی روش رونگِ–کوتای مرتبه چهارم به‌کارگرفته شده است.

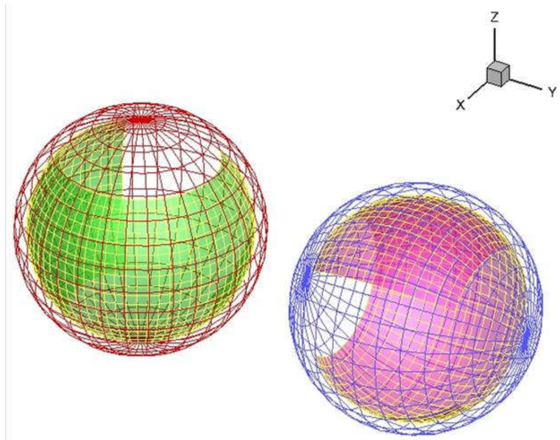
۲ شبکه یین–یَنگ

شبکه یین–یَنگ، یکی از انواع شبکه‌های هم‌پوشان است و از دو مؤلفه شبکه‌ای تشکیل شده است. این دو مؤلفه شبکه‌ای به‌طور دقیق، هم‌اندازه و هم‌شکل هستند و آنها را شبکه یین یا شبکه n (n-grid) و شبکه یَنگ یا شبکه e (e-grid) می‌نامند. ترکیب این دو شبکه، با اندکی هم‌پوشانی در مرزهای آنها، سطح کره را به‌طور کامل پوشش می‌دهد. ابتدایی‌ترین صورت این شبکه در شکل ۱ آمده است. به این نوع از شبکه یین–یَنگ، نوع مستطیلی‌شکل یا نوع پایه گفته می‌شود. هریک از دو مؤلفه شبکه‌ای، درواقع بخشی از شبکه طول و عرض جغرافیایی را تشکیل



(الف) (ب) (ج)

شکل ۱. شبکه یین– یَنگ مستطیلی (پایه) به‌عنوان یک شبکه کروی هم‌پوشان (الف) مؤلفه شبکه‌ای یین (ب) مؤلفه شبکه‌ای یَنگ (ج) شبکه یین– یَنگ پایه پس از ترکیب برای تکمیل سطح کره همراه با هم‌پوشانی جزئی.



شکل ۲. مؤلفه‌های شبکه یین–یَنگ به‌عنوان بخشی از شبکه کروی طول و عرض جغرافیایی. محورهای هر دو دستگاه مختصات کروی برای شبکه یین (رنگ قرمز) و شبکه یَنگ (رنگ آبی) بر هم عمودند.

می‌دهند. برای مثال، شبکه یین در مختصات کروی بر پایه طول و عرض جغرافیایی به‌صورت زیر تعریف می‌شود (کاگیاما و ساتو، ۲۰۰۴):

$$\left(\frac{\pi}{4}-\delta\le\varphi\le\frac{3\pi}{4}+\delta\right)\bigcap\left(-\frac{3\pi}{4}-\delta\le\lambda\le\frac{3\pi}{4}+\delta\right), \quad (۱)$$

که ϕ و λ، به‌ترتیب نشان‌دهنده عرض و طول جغرافیایی و δ، یک حائل کوچک بین دو مؤلفه شبکه‌ای یین و یَنگ است که با فاصله شبکه‌ای متناسب است و باعث هم‌پوشانی مختصر بین دو مؤلفه می‌شود که از ملزومات روش‌های هم‌پوشان است. همچنین نماد $\bigcap$، بیانگر عملگر اشتراک بین دو شرط مشخص شده است؛ یعنی نشان می‌دهد که هم‌زمان باید هر دو شرط چپ و راست این علامت برقرار باشند.

اگر حد δ به سمت صفر میل کند، مساحت این بخش از کره با شعاع واحد برابر $\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int_{-3\pi/4}^{3\pi/4}\mathrm{d}\lambda=\frac{3\pi}{\sqrt{2}}\approx 2.12\pi$ می‌شود که مقدار آن کمی بیش از نصف مساحت کل این کره یعنی ۲π است. مؤلفه شبکه‌ای یَنگ نیز به‌طور مشابه با رابطه (۱) تعریف می‌شود، اما در دستگاه مختصات دیگری (شبکه آبی‌رنگ در شکل ۲) که با دستگاه مختصات اول (شبکه قرمزرنگ در شکل ۲) متعامد است. شکل ۲ هر دو شبکه یین و یَنگ را همراه با مؤلفه‌های شبکه‌ای مربوط به آنها نشان می‌دهد. در ادامه، درباره چگونگی تبدیل مختصات دو شبکه یین و یَنگ به همدیگر توضیح داده می‌شود.

برای به‌دست‌آوردن طول و عرض جغرافیایی نقطه‌ای معلوم روی یکی از شبکه‌های یین یا یَنگ در دیگری، در دستگاه مختصات کروی از روابط زیر استفاده می‌شود (کاگیاما و ساتو، ۲۰۰۴):

$$\begin{aligned}&\sin\varphi^e\cos\lambda^e=-\sin\varphi^n\cos\lambda^n,\\&\sin\varphi^e\sin\lambda^e=\cos\varphi^n,\\&\cos\varphi^e=\sin\varphi^n\sin\lambda^n.\end{aligned} \quad (۲)$$

در این روابط بالانویس n، بیانگر شبکه یین و بالانویس e، نشان‌دهنده شبکه یَنگ است و طول و عرض جغرافیایی نیز همانند قبل به‌ترتیب با نمادهای λ و ϕ نمایش داده شده‌اند. یادآوری می‌شود که در این رابطه، عرض جغرافیایی هر دو شبکه یین و یَنگ باید از صفر تا ۱۸۰ درجه معادل با صفر تا π رادیان درنظرگرفته شود. همان‌گونه که از روابط مشخص است، این تبدیل

مختصات متقارن است و بازتابی از رابطه مکملی موجود بین دو شبکه یین و یَنگ است.

در هنگام جابه‌جایی یک کمیت عددی بین دو شبکه یین و یَنگ، هیچ تغییری در مقدار آن ایجاد نخواهد شد، امّا برای انتقال یک کمیت برداری از یکی از این شبکه‌ها به دیگری، با توجه به تأثیر زاویه محورهای دو شبکه با همدیگر، مقادیر مؤلفه‌های طولی و عرضی آن کمیت عوض خواهد شد که رابطه ماتریسی این تبدیل به صورت زیر است (کاگیاما و ساتو، ۲۰۰۴):

$$\begin{pmatrix} v_\varphi^e \\ v_\lambda^e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi \\ \sin\psi & \cos\psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_\varphi^n \\ v_\lambda^n \end{pmatrix}. \qquad (۳)$$

که v_ϕ مؤلفه کمیت برداری در راستای عرض جغرافیایی، v_λمؤلفه آن کمیت در راستای طول جغرافیایی و بالانویس‌های n و e مانند قبل بیانگر شبکه مربوطه هستند. همچنین در این رابطه، ψ، زاویه بردارهای یکه دو شبکه یین و یَنگ است که از رابطه زیر به‌دست‌می‌آید (کاگیاما و ساتو، ۲۰۰۴):

$$\begin{aligned} \cos\psi &= -\sin\lambda^e \sin\lambda^n, \\ \sin\psi &= -\frac{\cos\lambda^e}{\sin\varphi^n} = \frac{\cos\lambda^n}{\sin\varphi^e}. \end{aligned} \qquad (۴)$$

۳ روش‌های عددی مورد استفاده

۳-۱ روش فشرده مرتبه چهارم مک‌کورمک

روش فشرده مرتبه چهارم مک‌کورمک را هیکسون و ترکل (۲۰۰۰) با دو طرح‌واره ۴/۲ و ۴/۴ معرفی کردند. برای پیمایش زمانی این روش می‌توان از روش گسسته‌سازی زمانی اصلی یا برخی از روش‌های رونگ-کوتا نیز استفاده کرد. توضیحات مربوط به نحوه گسسته‌سازی مکانی در هر دو طرح‌واره این روش عددی و پیمایش زمانی آن با استفاده از روش‌های اصلی و رونگ-کوتا در میرزائی شیری و همکاران (۱۳۹۶) بیان شده است. روابط مربوط به مشتق مرتبه اول پیش‌سو و پس‌سو در طرح‌واره ۴/۲ روش مک‌کورمک فشرده مرتبه چهارم در یک شبکه یک‌بعدی به‌ترتیب به‌صورت زیر هستند (هیکسون و ترکل، ۲۰۰۰):

$$\begin{aligned} (1-a)D_j^F + aD_{j+1}^F &= \frac{1}{\Delta x}\left(F_{j+1} - F_j\right), \\ (1-a)D_j^B + aD_{j-1}^B &= \frac{1}{\Delta x}\left(F_j - F_{j-1}\right), \end{aligned} \qquad (۵)$$

که نماد F، بیانگر مقدار تابع در نقطه موردنظر روی شبکه است که آن نقطه با زیرنویس j مشخص شده است. Δx، فاصله شبکه‌ای؛ D^F، مشتق مرتبه اول پیش‌سو و D^B، مشتق مرتبه اول پس‌سو است. در این روابط، a یک عدد ثابت و برابر با $\frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۲\sqrt{۳}}$ است.

روابط مربوط به مشتق مرتبه اول پیش‌سو و پس‌سو در طرح‌واره ۴/۴ روش مک‌کورمک فشرده مرتبه چهارم نیز در یک شبکه یک‌بعدی به‌ترتیب به‌صورت زیر هستند: در این روابط، نمادها مشابه با روابط (۵) هستند.

$$\begin{aligned} \frac{2}{3}D_j^F + \frac{1}{3}D_{j+1}^F &= \frac{1}{\Delta x}\left(\frac{5}{6}F_{j+1} - \frac{2}{3}F_j - \frac{1}{6}F_{j-1}\right), \\ \frac{2}{3}D_j^B + \frac{1}{3}D_{j-1}^B &= \frac{1}{\Delta x}\left(\frac{1}{6}F_{j+1} + \frac{2}{3}F_j - \frac{5}{6}F_{j-1}\right), \end{aligned} \qquad (۶)$$

۳-۲ روش پیمایش زمانی رونگ-کوتای مرتبه چهارم

در این پژوهش، برای گسسته‌سازی زمانی معادله فرارفت دوبعدی از یک روش رونگ-کوتای مرتبه چهارم استفاده شده است. روش‌های رونگ -کوتا ازجمله روش‌های پرکاربرد برای گسسته‌سازی بخش زمانی معادلات حاکم در دینامیک شاره‌ها، به‌صورت کلی و معادلات حاکم بر جو و اقیانوس، به‌طور خاص هستند. توضیحات مربوط به این روش‌ها و همچنین نحوه به‌کارگیری آنها در کاربردهای جوی و اقیانوسی در دوران (۲۰۱۰) ارائه شده است.

حال برای استفاده از روش رونگ-کوتای مرتبه چهارم جهت گسسته‌سازی بخش زمانی معادله دوبعدی

$\frac{\partial \varphi}{\partial t}+\frac{\partial F(\varphi)}{\partial x}+\frac{\partial E(\varphi)}{\partial y}=0$ که بخش مکانی آن به‌کمک روش مک‌کورمک فشرده مرتبه چهارم گسسته شده است، به‌صورت زیر عمل می‌شود (برای نمونه، میرزائی شیری و همکاران، ۱۳۹۶):

(۷)

$$H^{(1)}=-\Delta t\left\{D_x^F\left[F\left(\phi^n\right)\right]+D_y^B\left[E\left(\phi^n\right)\right]\right\},$$
$$H^{(2)}=-\Delta t\left\{D_x^B\left[F\left(\phi^n+\frac{1}{2}H^{(1)}\right)\right]+D_y^F\left[E\left(\phi^n+\frac{1}{2}H^{(1)}\right)\right]\right\},$$
$$H^{(3)}=-\Delta t\left\{D_x^F\left[F\left(\phi^n+\frac{1}{2}H^{(2)}\right)\right]+D_y^B\left[E\left(\phi^n+\frac{1}{2}H^{(2)}\right)\right]\right\},$$
$$H^{(4)}=-\Delta t\left\{D_x^B\left[F\left(\phi^n+H^{(3)}\right)\right]+D_y^F\left[E\left(\phi^n+H^{(3)}\right)\right]\right\},$$
$$\phi^{n+1}=\phi^n+\frac{1}{6}H^{(1)}+\frac{1}{3}H^{(2)}+\frac{1}{3}H^{(3)}+\frac{1}{6}H^{(4)}.$$

که بالانویس n، نشان‌دهنده تراز زمانی و زیرنویس‌های x و y در نمادهای مشتق مرتبه اول پیش‌سو و پس‌سوی D^F و D^B بیانگر آن است که مشتق نسبت به متغیر مستقل مکانی x یا y گرفته می‌شود.

۴ معادله فرارفت دوبعدی در هندسه کروی

انتقال یک ماده یا کمیت را با یک جریان، فرارفت می‌گویند. در این انتقال، ویژگی‌های آن ماده یا کمیت نیز همراه آن منتقل می‌شود. ماده فرارفت‌یافته، اغلب یک شاره است. در طی فرارفت، خواص پایستگی نیز حفظ می‌شود؛ یعنی کمیت‌های پایستاری مانند انرژی، جرم و ... در شاره در حین فرارفت پایسته می‌مانند.

اغلب منظور از فرارفت در هواشناسی و فیزیک دریا، انتقال‌های افقی برخی از ویژگی‌های جو یا اقیانوس مانند جرم، رطوبت، شوری، گرما یا ... درون آن شاره (جو یا اقیانوس) است و انتقال‌ها و فرارفت‌های قائم این ویژگی‌ها، با نام همرفت شناخته می‌شوند.

معادله فرارفت در حالت کلی یک معادله غیرخطی است که در اینجا شکل خطی آن مدنظر است. این معادله را می‌توان به‌صورت زیر نوشت (دورَن، ۲۰۱۰):

$$\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t}=0, \quad (۸)$$

که ψ، کمیتی پایستار مانند جرم، انرژی یا ... است و نماد $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$، نشان‌دهنده عملگر مشتق تام نسبت به زمان است.

رابطه فرارفت را می‌توان به‌صورت برداری نیز نوشت:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t}+\mathbf{V}\cdot\nabla\psi=0. \quad (۹)$$

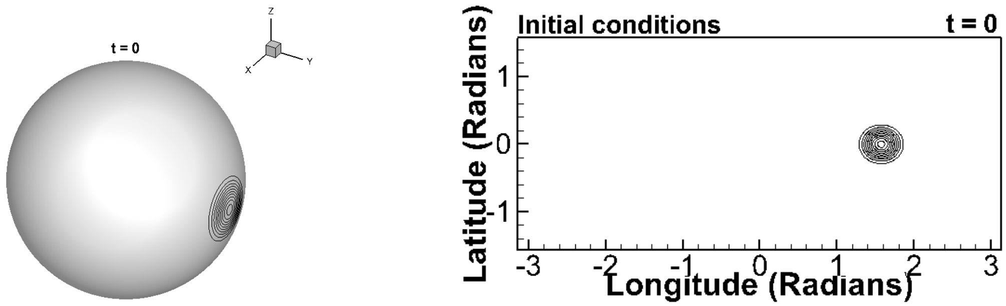
در این رابطه $\mathbf{V}=(u,v,w)$، میدان سرعت شاره و ∇، عملگر شیو است. $\frac{\partial}{\partial t}$، نشان‌دهنده عملگر مشتق پاره‌ای نسبت به زمان است. در دستگاه مختصات کروی بر پایه طول و عرض جغرافیایی می‌توان معادله فرارفت دوبعدی را به‌صورت زیر نوشت (ویلیامسون و همکاران، ۱۹۹۲):

$$\frac{\partial \psi}{\partial t}+\frac{u}{a\cos\varphi}\frac{\partial \psi}{\partial \lambda}+\frac{v}{a}\frac{\partial \psi}{\partial \varphi}=0. \quad (۱۰)$$

که a، شعاع کره؛ $\frac{\partial}{\partial \phi}$، مشتق پاره‌ای نسبت به عرض جغرافیایی و $\frac{\partial}{\partial \lambda}$، مشتق پاره‌ای نسبت به طول جغرافیایی است و بقیه نمادها نیز مانند قبل هستند. این معادله خطی حل تحلیلی دارد و برای آزمایش الگوریتم‌های جدید نیز استفاده می‌شود. در مطالعه حاضر، این معادله با استفاده از روش عددی فشرده مرتبه چهارم مک‌کورمک با پیمایش زمانی رونگ-کوتای مرتبه چهارم برای یک آزمون موردی شناخته‌شده روی شبکه یین-یَنگ مستطیلی (پایه) حل و خطای روش با استفاده از نُرم‌های قدرمطلق، مربع و بی‌نهایت محاسبه و نتایج آن ارائه می‌شود.

۵ آزمون موردی

آزمون موردی به‌کاررفته در این پژوهش را ویلیامسون و همکاران (۱۹۹۲) با عنوان Aفرارفت زنگوله کسینوسی بر فراز قطب≅(Advection of cosine bell over the pole) معرفی کردند. در این آزمون، یک زنگوله کسینوسی یک دور کامل در ۱۲ روز دور کره زمین و از روی دو قطب



(ب) (الف)

شکل ۳. نمایش شرایط اولیه در آزمون موردی فرارفت زنگوله کسینوسی بر فراز قطب در دو نمایش (الف) MP و (ب) 3D.

شمال و جنوب آن فرارفت می‌یابد تا به نقطه اولیه خود بازگردد. مؤلفه‌های بادی که عامل فرارفت این زنگوله هستند به‌صورت زیر تعریف شده‌اند:

$$u = u_0 \sin\varphi \cos\lambda, \quad v = -u_0 \sin\lambda. \tag{11}$$

مقدار u_0 عبارتست از:

$$u_0 = \frac{2\pi a}{12\,\text{days}} = \frac{2\pi a}{12 \times 86400\,\text{sec}}. \tag{12}$$

در این آزمون، جو، لایه کروی نازکی به شعاع a درنظرگرفته‌شده است که پریشیدگی ارتفاع آن در حالت اولیه به‌صورت زیر است:

(۱۳)

$$h(\lambda,\varphi) = \begin{cases} \frac{h_0}{2}\left(1+\cos\frac{\pi r}{R}\right) & \text{if } r < R, \\ 0 & \text{if } r \geq R. \end{cases} \quad ;h_0 = 1000\,\text{m}$$

که r ، فاصله هر نقطه شبکه با مختصات (λ,ϕ) از مرکز زنگوله است. مرکز زنگوله در آغاز، در نقطه‌ای با مختصات $(\lambda_c,\phi_c) = \left(\frac{3\pi}{2},0\right)$ قرار دارد. مقدار r از رابطه زیر به‌دست‌می‌آید:

(۱۴)

$$r = a \arccos\left[\sin\varphi_c \sin\varphi + \cos\varphi_c \cos\varphi \cos(\lambda - \lambda_c)\right].$$

در این آزمون موردی، شعاع کره زمین برابر ۶۳۷۱/۲۲ کیلومتر و R برابر یک‌سوم شعاع کره زمین فرض شده است. شکل ۳ شرایط اولیه زنگوله کسینوسی را روی کره زمین نشان می‌دهد. در شکل ۳-الف، نمایش کره به شکل دوبعدی با تصویر مرکاتور (Mercator Projection، از این به بعد، MP) و در شکل ۳-ب نمایش کره، سه‌بعدی (از این به بعد، 3D) است.

این آزمون حل تحلیلی دارد و طی آن، مرکز زنگوله کسینوسی در ابتدا با حرکت شمال‌سو روی نصف‌النهار ثابت پس از سه روز به قطب شمال می‌رسد و با ادامه مسیر به سمت جنوب روی همان نصف‌النهار در نیمکره غربی پس از ۶ روز از شروع حرکت، به استوا و پس از ۹ روز از شروع حرکت، به قطب جنوب می‌رسد. دراین نقطه، حرکت این زنگوله به طرف شمال ادامه می‌یابد و پس از ۱۲ روز از آغاز حرکت، به نقطه اولیه خود بازمی‌گردد. در صورت ادامه حل، این حرکت به‌طور متناوب تکرار خواهد شد به‌طوری که دوره تناوب آن ۱۲ روز طول می‌کشد.

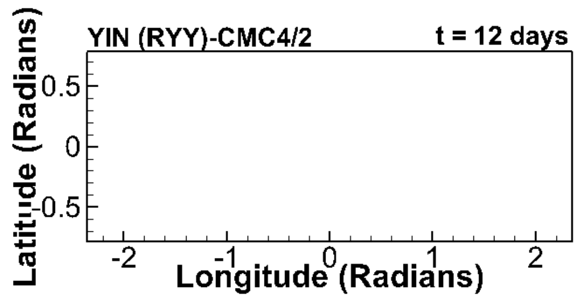
باید اشاره کرد که برخی از پژوهشگران، این آزمون موردی روی شبکه یین-ینگ را با استفاده از روش‌های عددی دیگر حل کرده‌اند (برای نمونه، لیا و همکاران، ۲۰۱۲ و گودارد، ۲۰۱۴).

۶ نتایج

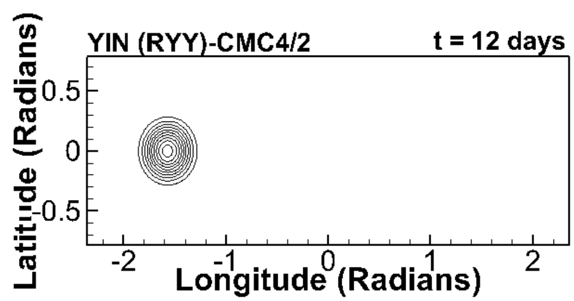
در این پژوهش، معادله (۱۰) در آزمون موردی معرفی‌شده در بخش قبل، روی شبکه یین-یَنگ مستطیلی و شبکه کروی براساس طول و عرض جغرافیایی با استفاده از هر دو طرح‌واره ۴/۲ و ۴/۴ روش مک‌کورمک فشرده مرتبه چهارم با پیمایش زمانی رونگ-کوتای مرتبه چهارم به‌طور عددی حل شده است که نتایج آن در این بخش ارائه می‌شود. برای امکان مقایسه بیشتر، این آزمون موردی با استفاده از روش مک‌کورمک مرتبه دوم روی هر دو شبکه کروی یادشده نیز حل شده است. در ادامه، شبکه کروی متداول براساس طول و عرض جغرافیایی به اختصار با نماد Trad و شبکه یین-یَنگ مستطیلی با نماد RYY نمایش داده می‌شود. همچنین برای اختصار، طرح‌واره‌های ۴/۲ و ۴/۴ روش مک‌کورمک فشرده مرتبه چهارم با پیمایش زمانی رونگ-کوتای مرتبه چهارم به‌ترتیب با نمادهای CMC4/2 و CMC4/4 و روش مک‌کورمک مرتبه دوم با پیمایش زمانی رونگ-کوتای مرتبه چهارم با نماد MC2 نشان داده می‌شوند. با توجه به یکسان بودن روش پیمایش زمانی در همه الگوریتم‌های مورد مطالعه، در نام‌گذاری‌ها نماد خاصی برای آن درنظرگرفته‌نشده است. در این حل عددی، از تفکیک‌های ۶۴×۱۲۸ و ۱۲۸×۲۵۶ و ۲۵۶×۵۱۲ برای شبکه‌های کروی به‌کارگرفته‌شده استفاده شده است. حل عددی معادله (۱۰) در این آزمون تا ۱۲ روز انجام شده است. شکل ۴ تحول زمانی زنگوله کسینوسی را هر سه روز یک بار، در حل عددی معادله (۱۰) روی شبکه RYY با تفکیک ۲۵۶×۵۱۲ با استفاده از روش CMC4/2 و با نمایش MP نشان می‌دهد. به دلیل تشابه، این تحول زمانی برای روش CMC4/4 آورده نشده است. با توجه به اینکه در حل تحلیلی این معادله در این آزمون موردی، زنگوله کسینوسی باید پس از ۱۲ روز بدون هیچ تغییری در اندازه و شکل آن، به جایگاه اولیه خود در ابتدای حرکت بازگردد، از مقایسه نتیجه این حل عددی برای انتهای روز دوازدهم با شرایط اولیه آن در آزمون، مشخص می‌شود که روش عددی روی شبکه کروی مورد استفاده عملکرد قابل قبولی داشته است. در شکل‌های ۴-د و ۴-ح نتیجه حل عددی به‌ترتیب برای شبکه‌های یین و یَنگ نمایش داده شده است.

شایان ذکر است که در شبکه یین، طول جغرافیایی می‌تواند گستره‌ای از مقادیر مختلف را از ۱۸۰- تا ۱۸۰+ درجه اختیار کند. عرض جغرافیایی قطب‌های شمال و جنوب در شبکه یین به‌ترتیب برابر ۱۸۰ و صفر درجه است. با استفاده از معادلات (۲)، مختصات قطب شمال در شبکه یَنگ، عرض جغرافیایی ۹۰+ و طول جغرافیایی ۹۰- درجه است. همچنین، عرض و طول جغرافیایی قطب جنوب نیز در این شبکه، ۹۰ درجه به‌دست‌می‌آید. باید توجه شود که مقادیر عرض جغرافیایی محاسبه‌شده همگی در گستره صفر تا ۱۸۰ درجه به‌دست‌آمده‌اند و برای نمایش آنها در شکل‌ها، به اندازه ۹۰ درجه باید از آنها کم کرد تا در گستره ۹۰- تا ۹۰+ درجه قرار داشته باشند.

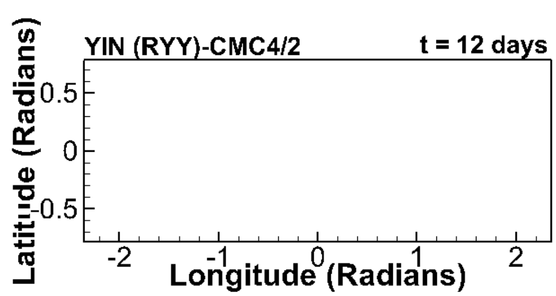
در زمان $t = 3\,\text{days}$، مرکز زنگوله کسینوسی در قطب شمال قرار گرفته است که در شبکه یین (شکل ۴-الف)، در محدوده مؤلفه شبکه‌ای یین نیست و دیده نمی‌شود. در همین زمان، در شبکه یَنگ، مرکز زنگوله در عرض جغرافیایی صفر (۹۰ درجه در گستره صفر تا ۱۸۰ درجه) و طول جغرافیایی ۹۰- درجه قرار گرفته است (شکل۴-ه)که با مختصات قطب شمال همخوانی دارد. در زمان $t = 9\,\text{days}$ نیز مرکز زنگوله در قطب جنوب خواهد بود که در شکل ۴-ج باز هم مکان آن خارج از محدوده مؤلفه شبکه‌ای یین است و دیده نمی‌شود. در شکل ۴-ز ملاحظه می‌شود که مرکز زنگوله در عرض جغرافیایی صفر و طول جغرافیایی ۹۰+ واقع است که با مختصات قطب جنوب مطابقت دارد. همین تفسیر را می‌توان به شیوه مشابه برای شکل ۴-ب و ۴-و در زمان $t = 6\,\text{days}$ و


YIN (RYY)-CMC4/2
t = 12 days
Latitude (Radians)
Longitude (Radians)

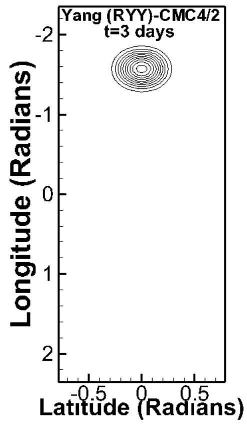
(الف)


YIN (RYY)-CMC4/2
t = 12 days
Latitude (Radians)
Longitude (Radians)

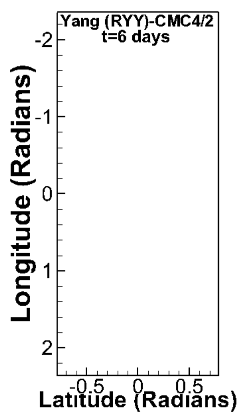
(ب)


YIN (RYY)-CMC4/2
t = 12 days
Latitude (Radians)
Longitude (Radians)

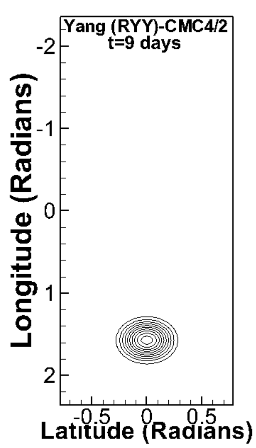
(ج)


Yang (RYY)-CMC4/2
t=3 days
Longitude (Radians)
Latitude (Radians)

(ه)

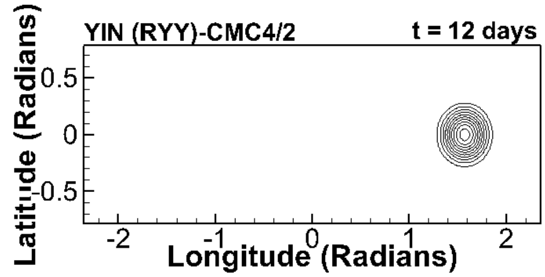

Yang (RYY)-CMC4/2
t=6 days
Longitude (Radians)
Latitude (Radians)

(و)

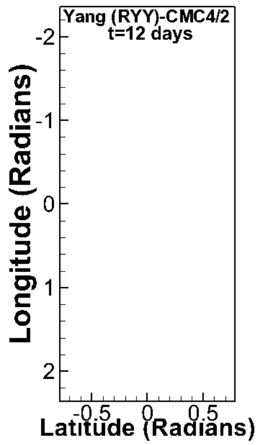

Yang (RYY)-CMC4/2
t=9 days
Longitude (Radians)
Latitude (Radians)

(ز)

ادامه شکل ۴.



(د)



(ح)

شکل ٤. تحول زمانی زنگوله کسینوسی در آزمون موردی با استفاده از روش CMC4/2 روی شبکه RYY با نمایش MP (الف)، (ب)، (ج) و (د) روی مؤلفه شبکه‌ای یین، (ه)، (و)، (ز) و (ح) روی مؤلفه شبکه‌ای یَنگ.

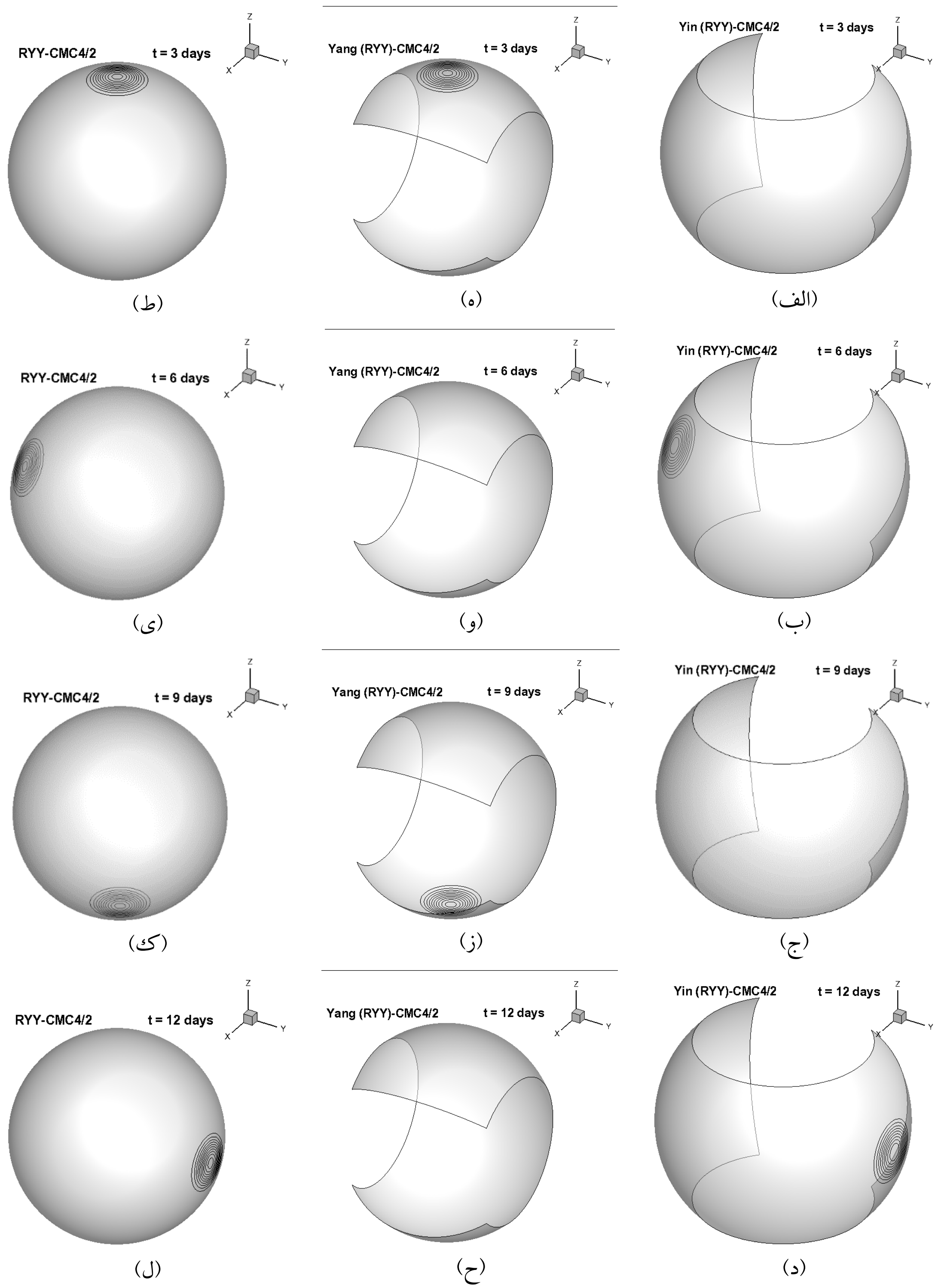
شکل‌های ۴-د و ۴-ح در زمان t = 12 days ارائه کرد. ازآنجاکه معمولاً در شکل‌های جغرافیایی سمت شمال در بالای صفحه است، برای شکل‌های شبکه یَنگ، عرض جغرافیایی روی محور افقی و طول جغرافیایی روی محور قائم و به‌صورت معکوس نمایش داده شده است. شکل ۵ نیز مشابه شکل ۴، همین نتایج را در نمای 3D نشان می‌دهد. علاوه‌براین، در شکل‌های ۵-ط، ۵-ی، ۵-ک و ۵-ل، تحول زمانی زنگوله کسینوسی طی ۱۲ روز روی کل کره نشان داده شده است. این تحول زمانی از ترکیب دو مؤلفه شبکه ای یین و یَنگ به‌دست‌آمده‌است.

۷ بررسی دقت و زمان محاسباتی روش

برای مقایسه کمی نتایج، مقادیر خطای کلی روش‌های عددی مورد بررسی روی شبکه‌های Trad و RYY پس از ۱۲ روز از شروع حل عددی، با استفاده از نُرم‌های قدرمطلق، مربع و بی‌نهایت محاسبه شده است. رابطه مربوط به نحوه محاسبه این نُرم‌ها روی کره با توجه به منظم بودن شبکه‌های کروی مورد استفاده به‌صورت زیر است (ویلیامسون و همکاران، ۱۹۹۲):

$$
\begin{aligned}
l_1(u) &= \frac{\sum_{i=1}^{m}\left(\left|(\widetilde{u}_i - u_i)\cos\phi_i\right|\right)}{\sum_{i=1}^{m}\left(\left|u_i \cos\phi_i\right|\right)}, \\
l_2(u) &= \frac{\left\{\sum_{i=1}^{m}\left(\left|(\widetilde{u}_i - u_i)\cos\phi_i\right|^2\right)\right\}^{\frac{1}{2}}}{\left\{\sum_{i=1}^{m}\left(\left|u_i \cos\phi_i\right|^2\right)\right\}^{\frac{1}{2}}}, \\
l_\infty(u) &= \frac{Max_{all}\left(\left|\widetilde{u}_i - u_i\right|\right)}{Max_{all}\left(\left|u_i\right|\right)},
\end{aligned}
\qquad (۱۵)
$$

که m، تعداد نقاط شبکه؛ u_i، مقدار دقیق تابع (حاصل از روش حل تحلیلی) در هر نقطه i روی شبکه و $\widetilde{u}_i$، مقدار به‌دست‌آمده از روش حل عددی مورد استفاده در هر نقطه i و ϕ_i، نشان‌دهنده عرض جغرافیایی در هر نقطه i است. l_1، مقدار خطای کل به‌دست‌آمده با استفاده از نرم قدرمطلق؛ l_2، مقدار خطای کل به‌دست‌آمده با استفاده از نرم مربع و l_∞، مقدار خطای کل به‌دست‌آمده با استفاده از نرم بی‌نهایت است. در جدول ۱، این نتایج برای هر سه روش، روی دو شبکه کروی مورد بررسی با سه تفکیک روش، مدنظر آورده شده است.



شکل ۵. تحول زمانی زنگوله کسینوسی در آزمون موردی با استفاده از روش CMC4/2 روی شبکه RYY با نمایش 3D (الف)، (ب)، (ج) و (د) روی مؤلفه شبکه‌ای یین، (ه)، (و)، (ز) و (ح) روی مؤلفه شبکه‌ای یَنگ، (ط)، (ی)، (ک) و (ل) روی کل کره پس از ترکیب دو مؤلفه شبکه‌ای.

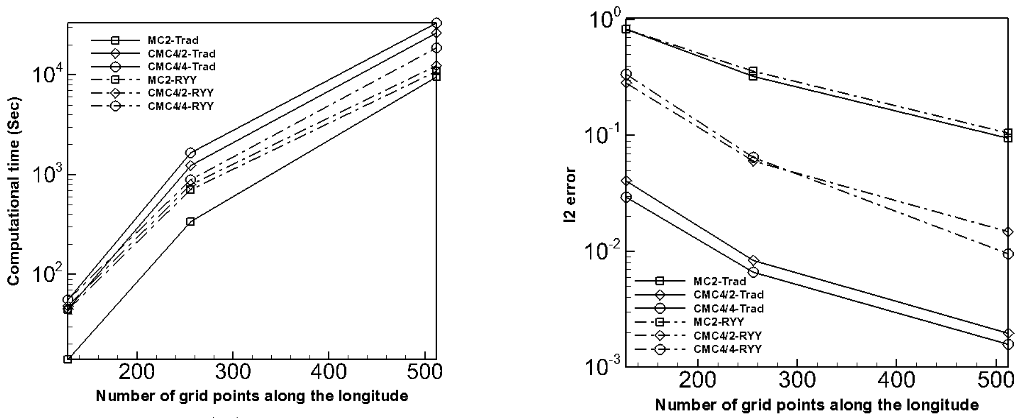
جدول ۱. مقادیرگام زمانی، هزینه محاسباتی و خطای کل حاصل از حل عددی دو روش ذکرشده روی دو نوع شبکه کروی.

Scheme & Grid & Resolution	Error l_1	Error l_2	Error l_∞	Time Step (sec)	Computational Time (sec)
CMC4/2 -Trad-512×256	3.49×10^{-3}	1.97×10^{-3}	2.64×10^{-3}	12	26525
CMC4/4 -Trad-512×256	2.55×10^{-3}	1.59×10^{-3}	2.25×10^{-3}	9	33265
MC2 -Trad-512×256	1.59×10^{-1}	9.49×10^{-2}	8.67×10^{-2}	12	9515
CMC4/2 -RYY-512×256	2.02×10^{-2}	1.48×10^{-2}	1.77×10^{-2}	100	12429
CMC4/4 -RYY-512×256	1.84×10^{-2}	9.50×10^{-3}	1.23×10^{-2}	60	18627
MC2 -RYY-512×256	1.73×10^{-1}	1.05×10^{-1}	8.96×10^{-2}	100	10823
CMC4/2 -Trad-256×128	2.16×10^{-2}	8.33×10^{-3}	8.37×10^{-3}	50	1226
CMC4/4 -Trad-256×128	1.39×10^{-2}	6.64×10^{-3}	6.83×10^{-3}	36	1643
MC2 -Trad-256×128	7.19×10^{-1}	3.23×10^{-1}	2.81×10^{-1}	50	335
CMC4/2 -RYY-256×128	8.74×10^{-2}	6.06×10^{-2}	6.18×10^{-2}	400	798
CMC4/4 -RYY-256×128	1.17×10^{-1}	6.45×10^{-2}	8.42×10^{-2}	300	883
MC2 -RYY-256×128	6.17×10^{-1}	3.61×10^{-1}	3.14×10^{-2}	400	703
CMC4/2 -Trad-128×64	1.23×10^{-1}	4.05×10^{-2}	3.43×10^{-2}	200	45
CMC4/4 -Trad-128×64	7.18×10^{-2}	2.95×10^{-2}	2.50×10^{-2}	150	56
MC2 -Trad-128×64	2.990	8.30×10^{-1}	5.77×10^{-1}	200	14
CMC4/2 -RYY-128×64	4.17×10^{-1}	2.83×10^{-1}	3.09×10^{-1}	1800	48
CMC4/4 -RYY-128×64	6.85×10^{-1}	3.38×10^{-1}	3.72×10^{-1}	1200	56
MC2 -RYY-128×64	1.752	8.31×10^{-1}	6.54×10^{-1}	1800	44

یادآوری می‌شود که در حل عددی معادله فرارفت دوبعدی در آزمون موردی ذکرشده، هیچ فیلتر خاصی برای غلبه بر مشکل قطب یا همان همگرایی مختصات در قطب‌ها در شبکه کروی بر پایه طول و عرض جغرافیایی اعمال نشده و از راه‌های دیگری مانند روش‌های نیمه‌ضمنی نیز استفاده نشده است. با توجه به ضرورت ارضای شرط CFL در روش‌های عددی مورد استفاده، مقادیر گام زمانی به‌ویژه در شبکه با تفکیک ۲۵۶×۵۱۲ به میزان شایان توجهی کوچک هستند. گفتنی است که برای غلبه بر مشکل قطب در حل عددی الگوریتم‌ها روی شبکه Trad، از جابه‌جایی شبکه به اندازه نصف فاصله شبکه‌ای در راستای نصف‌النهاری استفاده شده است؛ بنابراین، در شبکه با تفکیک ۲۵۶×۵۱۲، کوچک‌ترین فاصله شبکه‌ای در راستای مداری روی نزدیک‌ترین مدار به قطب تقریباً برابر ۴۸۰ متر خواهد بود و با توجه به اینکه مقدار u_0 در رابطه (۱۲) نیز حدود ۴۰ متر بر ثانیه است، با استفاده از شرط CFL برای دو روش CMC4/2 و MC2، بیشینه مقدار گام زمانی باید حدود ۱۲ ثانیه فرض شود. همچنین باید توجه داشت که در روش CMC4/4 نسبت به این دو روش، محدودیت بیشتری در انتخاب گام زمانی وجود دارد (هیکسون و ترکل، ۲۰۰۰) و همین امر سبب شده است که مقدار گام زمانی برای این روش نسبت به دو روش دیگر کمتر باشد.

با توجه به نتایج، در هردو روش CMC4/2 و CMC4/4 روی شبکه RYY نسبت به حل عددی با این دو روش روی شبکه Trad به میزان شایان توجهی کاهش هزینه محاسباتی رخ داده است، اما خطای کل با استفاده از نُرم‌های قدرمطلق، مربع و بی‌نهایت برای هر دو روش عددی روی شبکه RYY نسبت به حل آنها روی شبکه Trad در حدود یک مرتبه بزرگی افزایش یافته است. نکته دیگری که از این جدول مشخص می‌شود، این است که در مورد روش مک‌کورمک مرتبه دوم همراه با پیمایش زمانی رونگ-کوتای مرتبه چهارم، استفاده از شبکه RYY به‌ویژه در تفکیک ۲۵۶×۵۱۲، باعث کاهش هزینه محاسباتی نشده است.

با استفاده از نتایج جدول ۱، کاهش دقت ناشی از استفاده از شبکه RYY در الگوریتم‌های مورد بررسی درخور توجه است و احتمالاً می‌تواند در اثر درون‌یابی در



(ب) (الف)

شکل ٦. (الف) مقادیرخطای کلی نرم مربع بر حسب تعداد نقاط شبکه (ب) زمان محاسباتی برحسب تعداد نقاط شبکه برای روش‌های مختلف روی دو شبکه Trad و RYY.

درخور توجه است و احتمالاً می‌تواند در اثر درون‌یابی در طی مراحل حل عددی باشد. به‌هرحال، برای استفاده از شبکه‌های ین-یَنگ در حل عددی معادلات مختلف جوی و اقیانوسی در هندسه کروی، درون‌یابی بخشی ضروری از مراحل حل عددی است. نکته دیگری که باید در جدول ۱ به آن اشاره کرد، دقّت بیشتر روش CMC4/4 نسبت به روش CMC4/2 در دستگاه مختصات یکسان با تفکیک یکسان است که البته این افزایش دقت همراه با افزایش هزینه محاسباتی است.

شکل ۶ برخی از نتایج جدول ۱ را به‌صورت نمودار نشان می‌دهد. در شکل ۶-الف مقادیر خطای کلی با استفاده از نُرم مربع برای هریک از روش‌های مورد بررسی روی دو شبکه Trad و RYY برحسب تعداد نقاط شبکه در راستای طول جغرافیایی و در شکل ۶-ب نیز زمان محاسباتی این الگوریتم‌ها برحسب تعداد نقاط شبکه نمایش داده شده است.

۸ نتیجه‌گیری

پس از حل عددی معادله فرارفت دوبعدی در هندسه کروی روی دو شبکه Trad و RYY با استفاده از روش مک‌کورمک فشرده مرتبه چهارم با پیمایش زمانی رونگ-کوتای مرتبه چهارم، نتایج کمی و کیفی، نشان‌دهنده عملکرد مناسب این روش در حل معادله مذکور است. نتایج نشان داد که حل این معادله با استفاده از روش‌های یادشده، روی شبکه ین-یَنگ با کاهش دقت عددی در حدود یک مرتبه بزرگی نسبت به حل آن روی شبکه متداول کروی بر پایه عرض و طول جغرافیایی همراه است، اما استفاده از شبکه ین-یَنگ به اندازه شایان‌توجهی هزینه محاسباتی را کاهش داده است. این مطلب، هم‌زمان با اینکه دقت روش استفاده‌شده روی شبکه RYY قابل‌قبول است و نتایج کیفی این حل عددی نیز این موضوع را تأیید می‌کند، می‌تواند سبب آزمایش کردن استفاده از آن روی این شبکه برای حل عددی سایر معادلات جوی و اقیانوسی در مطالعات بعدی شود.

نکته دیگری که از حل عددی معادله فرارفت در آزمون موردی مورد مطالعه می‌توان نتیجه گرفت آن است که در الگوریتم استفاده‌شده، برای روش مک‌کورمک مرتبه دوم همراه با پیمایش زمانی رونگ-کوتای مرتبه چهارم، استفاده از شبکه ین-یَنگ مستطیلی با تفکیک‌های بالا علاوه بر اینکه با کاهش دقت همراه است، در کاهش هزینه محاسباتی نیز تأثیر چندانی ندارد.

منابع

میرزائی شیری، ر.، قادر، س.، مزرعه فراهانی، م.، بیدختی، ع. ع.، ۱۳۹۶، حل عددی معادلات آب کم‌عمق با روش مک‌کورمک فشرده مرتبه چهارم: مجله فیزیک زمین و فضا، **۴۳**(۱)، ۲۰۹–۲۲۸.

Buning, P. G., Chiu, I. T., Obayashi, S., Rizk, Y. M., and Steger, J. L., 1988, Numerical simulation of the integrated space shuttle vehicle in ascent: AIAA Paper, 88-4359-CP, 265-283.

Cao, H. V., Su, T. Y., and Rogers, S. E., 1998, Navier-Stokes analysis of a 747 high lift configuration: AIAA, 98-2623, 402-409.

Duque, E. P. N., Strawn, R. C., Ahmad, J., and Biswas, R., 1996, An overset grid Navier-Stokes Kirchhoff-surface method for rotorcraft aeroacoustic predictions: AIAA, 96-0152, 1-13.

Durran, D. R., 2010, Numerical Methods for Fluid Dynamics with Applications to Geophysics: Springer.

Esfahanian, V., Ghader, S., and Mohebalhojeh, A. R., 2005, On the use of super compact scheme for spatial differencing in numerical models of the atmosphere: Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society, **131**, 2109-2130.

Ghader, S., Mohebalhojeh, A. R. and Esfahanian, V., 2009, On the spectral convergence of supercompact finite-difference schemes for the f-plane shallow-water equations: Monthly Weather Review, **137**, 2393-2406.

Ghader, S., and Nordström, J., 2015, High-order compact finite difference schemes for the vorticity–divergence representation of the spherical shallow water equations: International Journal of Numerical Methods in Fluids, **78**, 709–738.

Goddard, J. C., 2014, Viability of the Yin–Yang grid as a basis for future generations of atmospheric models: Ph.D. thesis, University of Exeter, Exeter, United Kingdom, 193 pp.

Hixon, R., and Turkel, E., 2000, Compact implicit MacCormack–type scheme with high accuracy: Journal of Computational Physics, **158**, 51–70.

JavanNezhad, R., Meshkatee, A. H., Ghader, S., and Ahmadi-Givi, F., 2016, High-order compact MacCormack scheme for two-dimensional compressible and non-hydrostatic equations of the atmosphere: Dynamics of Atmospheres and Oceans, **75**, 102-117.

Kageyama, A., and Sato, T., 2004, “Yin-Yang grid”: An overset grid in spherical geometry: Geochemestry, Geophysics, Geosystems, **5**(9), doi: 10.1029/2004GC000734.

Kageyama, A., 2005, Dissection of a sphere and Yin-Yang grids: Journal of The Earth Simulator, **3**, 20-28.

Lia, X., Shen, X., Peng, X., Xiao, F., Zhuang, Z., and Chen, C., 2012, Fourth order transport model on Yin-Yang grid by multi-moment constrained finite volume scheme: Procedia Computer Science, **9**, 1004-1013.

Meakin, R. L., 1992, Computations of the unsteady flow about a generic wing/pylon/finned-store configuration: AIAA, 92-4568-CP, 564-580.

Meakin, R. L., 1993, Moving body overset grid methods for complete aircraft tiltrotor simulations: AIAA, 93-3350-CP, 576-588.

Mohebalhojeh, A. R., and Dritschel, D. G., 2007, Assessing the numerical accuracy of complex spherical shallow water flows: Monthly Weather Review, **135**, 3876–3894.

Rogers, S. E., Cao, H. V., and Su, T. Y., 1998, Grid generation for complex high-lift configuration: AIAA, 98-3011, 1-11.

Staniforth, A., and Thuburn, J., 2012, Horizontal grids for global weather and climate prediction models: A review: Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society, **138**, 1-26.

Steger, J. L., 1982, On application of body conforming curvilinear grids for finite difference solution of external flow: in Numerical Grid Generation, Thompson, J. F., ed., North-Holland, New York, 295-316.

Skamarock, W. C., Klemp, J. B., Dudhia, J., Gill, D. O., Barker, D. M., Wang, W., and Powers, J. G., 2005, A description of the advanced research WRF version 2 (No. NCAR/TN-468+ STR): National Center for Atmospheric Research, Boulder Colorado, Mesoscale and Microscale Meteorology Division.

Williamson, D. L., Drake, J. B., Hack, J. J., Jakob, R., and Swarztrauber, P. N., 1992, A standard test set for numerical approximation to the shallow water equations in spherical geometry: Journal of Computational Physics, **102**, 211-224.

Iranian Journal of Geophysics, Vol 13, No 2, 2019, P. 3

Numerical solution of two-dimensional advection equation in spherical geometry using the fourth-order compact MacCormack scheme on a Yin-Yang grid

Rasoul Mirzaei-Shiri[1], Sarmad Ghader[2*] and Ali Reza Mohebalhojeh[3]

[1]*Ph.D. Student, Space Physics Department, Institute of Geophysics, University of Tehran*
[2]*Associate Professor, Space Physics Department, Institute of Geophysics, University of Tehran*
[3]*Professor, Space Physics Department, Institute of Geophysics, University of Tehran*

(Received: 21 January 2019, Accepted: 28 August 2019)

Summary

Due to the approximately spherical nature of the atmosphere, oceans and other layers of the Earth and the complex nature of atmospheric and oceanic flows, numerical solution of their governing equations requires using an appropriate coordinate on the spherical geometry. All spherical grids defined for the spherical surface or shell, generally have their own advantages and disadvantages. In general, it can be said that there is no spherical grid which has all the following characteristics:

1- The grid is orthogonal;
2- There is no singularity;
3- There is no grid convergence problem; and defined over entire spherical surface.

Thus, we have to discard one of these incompatible conditions. An overset grid is a type of grid that divides a spherical surface into subregions. Yin–Yang grid belongs to the family of overset grids. This coordinate is composed of two grid components named Yin and Yang with partial overlapping at their boundaries. Some of the advantages of the Yin–Yang grids are as follows:

1- Yin and Yang grid components are both orthogonal and based on the conventional latitude–longitude grid;
2- The singular points are absent;
3- The metric factors of the both grid components are analytically known;
4- The grid lengths are uniform approximately;
5- It requires less grid points than the conventional latitude–longitude grid; and
6- We can adapt the available latitude–longitude discretization and codes for the use with the Yin–Yang grids.

In addition, we have to use interpolation for setting boundary conditions for the two grid components. The interpolation scheme that has been used in this study is bilinear.

In this research, a type of the Yin–Yang grid called the rectangular (basic) is applied to solve the two-dimensional advection equation for a well-known test case using the fourth-order compact MacCormack scheme. Furthere, the fourth-order Runge–Kutta method is used for time stepping. Results show that using the Yin–Ying grids to solve the advection equation is highly effective in reducing the computational cost compared to the conventional latitude–longitude grid, however the use of rectangular Yin–Yang grid entails a lower accuracy than the conventional latitude–longitude grid.

In this numerical test, global errors are computed using the absolute-value, Euclidean and maximum norms. By calculating the errors using these norms, there is an order of magnitude increase in the errors in rectangular Yin-Yang grid compared to the conventional latitude–longitude grid. This increase in error can come from the inevitable interpolation process involved in the Yin-Yang grid.

Keywords: Yin-Yang grid, spherical coordinate, fourth-order compact MacCormack scheme, Runge-Kutta, two-dimensional advection equation

*Corresponding author: sghader@ut.ac.ir