مجله ژئوفیزیک ایران، جلد ۱۴، شماره ۱، ۱۳۹۹، صفحه ۱ - ۱۲

مقایسه حل عددی معادله فرارفت دوبعدی در هندسه کروی روی سه نوع شبکه یین- یَنگ

رسول میرزائی شیری[۱]، سرمد قادر[۲*] و علیرضا محب‌الحجه[۳]

[۱] دانشجوی دکترای هواشناسی، گروه فیزیک فضا، موسسه ژئوفیزیک، دانشگاه تهران، تهران، ایران
[۲] دانشیار، گروه فیزیک فضا، موسسه ژئوفیزیک، دانشگاه تهران، تهران، ایران
[۳] استاد، گروه فیزیک فضا، موسسه ژئوفیزیک، دانشگاه تهران، تهران، ایران

(تاریخ دریافت: ۱۳۹۸/۰۲/۲۸، تاریخ پذیرش: ۱۳۹۸/۰۷/۱۷)

چکیده

لایه¬های مختلف کره زمین ازجمله اقیانوس‌ها و جو، هندسه تقریباً کروی دارند و با توجه به پیچیدگی‌های موجود در شارش‌های جوی و اقیانوسی، استفاده از یک شبکه کروی مناسب برای حل عددی معادلات حاکم بر این شارش‌ها ضروری است. شبکه یین- یَنگ یکی از انواع شبکه‌های کروی هم‌پوشان است. این شبکه حاصل ترکیب دو شبکه به نام‌های یین و یَنگ با یک سطح هم‌پوشانی است که مقدار این هم‌پوشانی قابلیت تغییر دارد. در ادامه به برخی از مزایای این شبکه اشاره می‌شود. مؤلفه‌های تشکیل دهنده این شبکه، خود شبکه¬هایی متعامد براساس شبکه کروی متداول طول و عرض جغرافیایی هستند. این شبکه فاقد نقطه تکینه است و فاصله‌بندی شبکه‌ای آن به‌طور شبه‌یکنواخت طراحی شده است.

نقطه ضعف اصلی شبکه یین- یَنگ ضرورت استفاده از روش‌های درون‌یابی برای نقاط مرزی مؤلفه‌های شبکه‌ای تشکیل‌دهنده آن است. انواع مختلفی از شبکه‌های یین- یَنگ ارائه شده‌اند که سه نوع از آن، به نام‌های شبکه مستطیلی (پایه)، پیراسته و پیراسته با مؤلفه‌های یکسان در این پژوهش مقایسه می‌شوند. شایان ذکر است که شبکه یین- یَنگ پیراسته با مؤلفه‌های یکسان برای اولین بار در پژوهش حاضر معرفی می‌شود. در این پژوهش، معادله فرارفت دوبعدی در هندسه کروی با استفاده از روش مرتبه دوم مرکزی برای گسسته‌سازی مکانی و روش مرتبه چهارم رونگِ- کوتا برای پیمایش زمانی روی این سه شبکه یین- یَنگ به‌طور عددی حل شده است. علاوه بر این، از یک آزمون موردی استاندارد شناخته شده برای حل معادله فرارفت دوبعدی در هندسه کروی استفاده شده است. نتایج نشان می‌دهند که استفاده از شبکه یین- یَنگ برای حل این معادله در کاهش هزینه محاسباتی بسیار مؤثر است و در بین سه شبکه بررسی شده، استفاده از شبکه پیراسته و شبکه مستطیلی، هزینه محاسباتی کمتری نسبت به شبکه پیراسته با مؤلفه‌های یکسان دارد.

واژه‌های کلیدی: شبکه یین-یَنگ، مختصات کروی، رونگ- کوتا، معادله فرارفت دوبعدی

* نگارنده رابط: sghader@ut.ac.ir

۱ مقدمه

ازآنجاکه کره زمین و جو اطراف آن از لایه‌های تقریباً کروی تشکیل یافته‌اند، برای شبیه‌سازی عددی جو و سایر لایه‌های کره زمین مانند اقیانوس‌ها یا گوشته زمین، به استفاده از روش‌های گسسته‌سازی مکانی کارا برای معادلات حاکم بر آنها در یک هندسه کروی نیاز است. ازاین‌رو، شبکه‌های کروی مختلفی تعریف شده‌اند که بتوانند در یک پوسته کروی، نقش یک دستگاه مختصات کامل را ایفا کنند. همه شبکه‌های کروی تعریف‌شده برای سطح یا پوسته کروی مزایا و معایب خاص خود را دارند. به‌طور کلی شبکه کروی متعامدی وجود ندارد که تکینگی (singularity) و همگرایی مختصات را نداشته و هم‌زمان روی یک سطح کروی کامل تعریف شده باشد (کاگِیاما، ۲۰۰۵)؛ ازاین‌رو به‌ناچار در تعریف یک دستگاه مختصات کروی از یک یا دو مورد از ویژگی‌های ناسازگار چشم‌پوشی می‌شود. یک گزینه این است که شبکه روی یک سطح کروی کامل تعریف نشود؛ بنابراین، سطح کره باید به چند زیرناحیه تقسیم شود. روش‌های مختلفی برای این تقسیم‌بندی وجود دارد که به دو دسته کلی تقسیم می‌شوند. دسته اول به روش‌های شبکه وصله‌شده (patched grid) معروف هستند که در این روش‌ها مرزهای هریک از زیرناحیه‌ها بدون هیچ هم‌پوشانی کاملاً زیرنواحی را از هم جدا می‌کنند. دسته دوم، روش‌هایی هستند که در آنها مرزها می‌توانند هم‌پوشانی مختصری با هم داشته باشند که به این شبکه‌ها، شبکه‌های هم‌پوشان (overset) گفته می‌شود. شبکه یین–یَنگ (Yin-Yang)، یکی از انواع شبکه‌های هم‌پوشان است که کاگیاما و ساتو (۲۰۰۴) معرفی کردند. این مختصات، ترکیبی از دو شبکه به نام‌های یین و یَنگ، با یک سطح هم‌پوشانی است که مقدار این هم‌پوشانی قابلیت تغییر دارد. مزایای شبکه یین–یَنگ را به‌طورخلاصه می‌توان به‌صورت زیر بیان کرد (استانیفورث و توبورن، ۲۰۱۲):

۱- مؤلفه‌های شبکه‌ای یین و یَنگ که این شبکه را تشکیل می‌دهند، خود شبکه‌هایی متعامد هستند. شبکه یین همان شبکه کروی متداول براساس طول و عرض جغرافیایی است و شبکه یَنگ نیز از دوران آن به‌وجود آمده‌است؛

۲- مشکل تکینگی در شبکه یین–یَنگ وجود ندارد؛

۳- ضرایب سنجه (metric) برای دو مؤلفه شبکه‌ای یین و یَنگ، به‌طور تحلیلی، شناخته‌شده هستند؛

۴- مشکل همگرایی مختصات در این شبکه تقریباً وجود ندارد و فاصله‌بندی شبکه‌ای آن شبه‌یکنواخت (quasi-uniform) است؛

۵- در حالت عادی، نقاط کمتری (حدود ۲۰ تا ۲۵ درصد) برای تفکیک شبه‌یکنواخت این شبکه نسبت به شبکه متداول طول و عرض جغرافیایی وجود دارد؛

۶- برنامه‌های رایانه‌ای موجود برای شبکه کروی متداول بر پایه طول و عرض جغرافیایی را می‌توان برای این شبکه نیز با تغییراتی جزئی به‌کاربرد.

اصلی‌ترین اشکال این شبکه وجود هم‌پوشانی در مرزهای دو مؤلفه شبکه‌ای یین و یَنگ و لزوم استفاده از روش‌های درون‌یابی در مرزهای این دو مؤلفه شبکه‌ای است که می‌تواند باعث ایجاد اختلالاتی در پایستگی برخی از کمیت‌های پایستار شود و باید برای آن فکری شود. در این پژوهش، برای درون‌یابی از روش دوخطی (bilinear) استفاده شده است.

روش دوخطی یکی از ساده‌ترین روش‌های درون‌یابی است که می‌تواند روی یک شبکه مستطیلی استفاده شود. در این روش، مقدار تابع در هر نقطه با استفاده از مقادیر آن تابع روی رئوس مستطیلی از شبکه تخمین زده می‌شود

که نقطه موردنظر داخل آن قرار می‌گیرد. این روش را می‌توان به سه درون‌یابی خطی در راستای خطوطی به‌موازات محورهای x و y تجزیه کرد. در روش درون‌یابی خطی، از یک رابطه خطی (درجه یک) برای تخمین مقدار تابع در یک نقطه، با به‌کارگیری مقادیر آن تابع روی دو نقطه از شبکه در طرفین آن استفاده می‌شود (دورن، ۲۰۱۰).

در روش دوخطی، تخمین مقدار تابع در یک نقطه فقط براساس مکان نقطه موردنظر نسبت به نقاط دیگر شبکه صورت می‌گیرد و سایر شرایط فیزیکی حاکم بر آن تابع در آن نقطه و نقاط دیگر شبکه در این تخمین تأثیری ندارند. به همین دلیل، استفاده از روش درون‌یابی دوخطی لزوماً به محاسبه مقدار دقیق تابع در آن نقطه منجر نمی‌شود، اما تخمینی از آن را در اختیار قرار می‌دهد. در این پژوهش برای درون‌یابی‌های موردنیاز، از روش درون‌یابی دوخطی به‌دلیل سادگی و کم بودن هزینه محاسباتی آن استفاده شده است.

هدف این مطالعه، مقایسه نتایج حل عددی معادله فرارفت دوبعدی با استفاده از روش مرتبه دوم مرکزی، روی سه نوع از انواع شبکه‌های یین-یَنگ است. برای پیمایش زمانی نیز از روش رونگِ-کوتای مرتبه چهارم استفاده شده است. جزئیات این روش‌های گسسته‌سازی مکانی و پیمایش زمانی در مراجع مختلفی آورده شده است (برای مثال، دورَن، ۲۰۱۰).

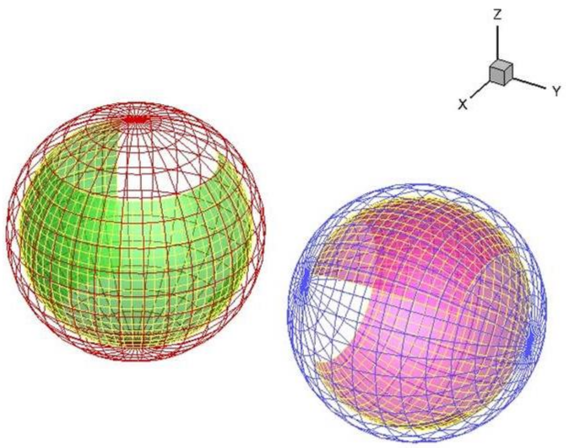
۲ شبکه یین-یَنگ

شبکه یین-یَنگ، ازجمله شبکه‌های هم‌پوشان است و از دو مؤلفه شبکه‌ای تشکیل شده‌است. در بیشتر موارد، این دو مؤلفه شبکه‌ای به‌طور دقیق، هم‌اندازه و هم‌شکل هستند و آنها را شبکه یین یا شبکه n (n-grid) و شبکه یَنگ یا شبکه e (e-grid) می‌نامند. انواع مختلفی از شبکه یین-یَنگ تعریف شده‌است که معمولاً اندازه و شکل دو مؤلفه شبکه‌ای یین و یَنگ در آنها با هم متفاوت است. ترکیب این دو شبکه، با اندکی هم‌پوشانی در مرزهای آنها، سطح کره را به‌طور کامل پوشش می‌دهد. شبکه یین-یَنگ در سال‌های اخیر بسیار موردتوجه پژوهشگران قرار گرفته است (برای مثال، لی و همکاران، ۲۰۰۸؛ اونو و کاگیاما، ۲۰۰۹؛ بابا و همکاران، ۲۰۱۰؛ قدوری و لی، ۲۰۱۱؛ قدوری، ۲۰۱۱؛ لی و همکاران، ۲۰۱۲؛ قدوری و همکاران، ۲۰۱۲ و آلن و زروکات، ۲۰۱۶).

یکی از ساده‌ترین انواع شبکه یین-یَنگ، به شبکه یین-یَنگ مستطیلی یا پایه معروف است. این شبکه را می‌توان اندکی تغییر داد تا شکل‌های دیگری از آن ایجاد شود. یکی از این شبکه‌ها که استانیفورث و توبورن (۲۰۱۲) معرفی کرده‌اند به نام شبکه یین-یَنگ پیراسته شناخته می‌شود. در شبکه یین-یَنگ پیراسته دو مؤلفه شبکه‌ای، هم‌اندازه و هم‌شکل نیستند. این تغییرات را می‌توان به صورت‌های دیگری نیز بر شبکه اعمال کرد تا انواع مختلفی از شبکه‌های یین-یَنگ ایجاد شوند. در این پژوهش سه نوع از شبکه‌های یین-یَنگ با عنوان شبکه یین-یَنگ مستطیلی، پیراسته و پیراسته با مؤلفه‌های یکسان بررسی می‌شود. در ادامه، توضیحات بیشتری در مورد این سه نوع شبکه داده می‌شود.

۲-۱ شبکه یین و یَنگ مستطیلی

ابتدایی‌ترین و ساده‌ترین شکل شبکه یین-یَنگ در شکل ۱ نشان داده شده است. به این نوع از شبکه یین-یَنگ، نوع مستطیلی‌شکل یا نوع پایه (از این به بعد، RYY) گفته می‌شود. هریک از دو مؤلفه شبکه‌ای، در عمل بخشی از شبکه کروی را تشکیل می‌دهند. برای مثال، شبکه یین در مختصات کروی متداول بر پایه طول و عرض جغرافیایی، با رابطه زیر تعریف می‌شود (کاگیاما و ساتو، ۲۰۰۴):



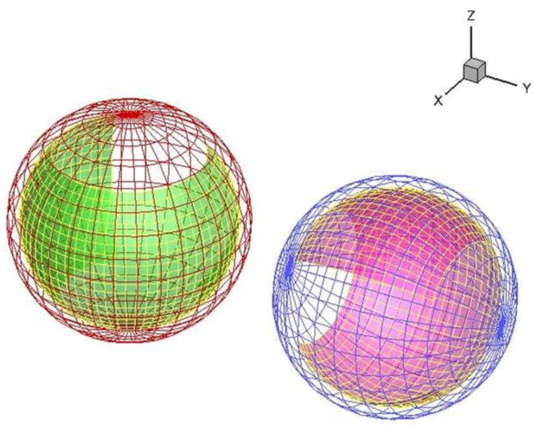
شکل ۲. مؤلفه‌های شبکه یین-یَنگ به‌عنوان بخشی از شبکه کروی طول و عرض جغرافیایی. محورهای هر دو دستگاه مختصات کروی برای شبکه یین (رنگ قرمز) و شبکه یَنگ (رنگ آبی) بر هم عمودند.

(۱)

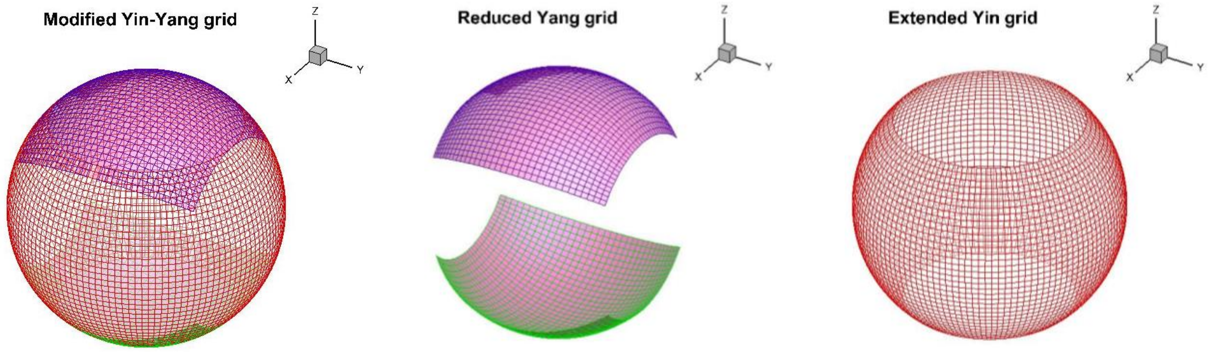
$$\left(\frac{\pi}{4}-\delta\le\phi\le\frac{3\pi}{4}+\delta\right)\bigcap\left(-\frac{3\pi}{4}-\delta\le\lambda\le\frac{3\pi}{4}+\delta\right)$$

که ϕ و λ، به‌ترتیب نشان‌دهنده عرض و طول جغرافیایی است. δ، یک حائل کوچک بین دو مؤلفه شبکه‌ای یین و یَنگ است که با فاصله شبکه‌ای متناسب است و باعث هم‌پوشانی مختصر بین دو مؤلفه می‌شود که از ملزومات روش‌های هم‌پوشان است. نماد $\cap$، بیانگر عملگر اشتراک بین دو شرط مشخص شده است؛ یعنی نشان می‌دهد که هم‌زمان باید هر دو شرط چپ و راست این علامت برقرار باشند.

اگر در رابطه (۱) حد δ به سمت صفر میل کند، مساحت این بخش از کره با شعاع واحد برابر $\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\mathrm{Cos}\phi d\phi\int_{-3\pi/4}^{3\pi/4}d\lambda=\frac{3\pi}{\sqrt{2}}\approx 2.12\pi$ می‌شود که مقدار آن کمی بیش از نصف مساحت کل این کره یعنی 2π است. مؤلفه شبکه‌ای یَنگ نیز مشابه رابطه (۱) تعریف می-شود، اما در دستگاه مختصات دیگری (شبکه آبی‌رنگ در شکل ۲) که با دستگاه مختصات اول (شبکه قرمزرنگ در شکل ۲) متعامد است. شکل ۲ هردو شبکه یین و یَنگ را همراه با مؤلفه‌های شبکه‌ای مربوط به آنها در یک شبکه یین-یَنگ مستطیلی نشان می‌دهد.



شکل ۲. مؤلفه‌های شبکه یین-یَنگ به‌عنوان بخشی از شبکه کروی طول و عرض جغرافیایی. محورهای هر دو دستگاه مختصات کروی برای شبکه یین (رنگ قرمز) و شبکه یَنگ (رنگ آبی) بر هم عمودند.



(ج) (ب) (الف)

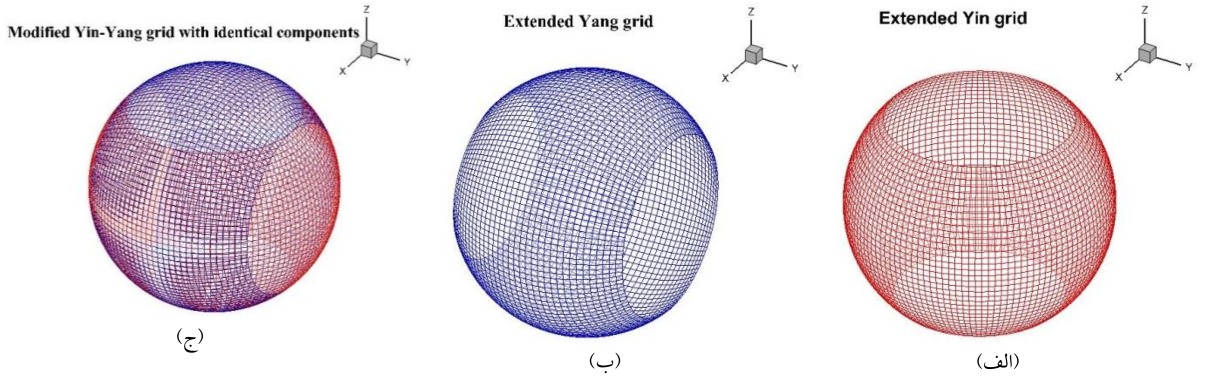
شکل ۳. شبکه یین- یَنگ پیراسته (الف) مؤلفه شبکه‌ای یین بسط‌یافته (ب) مؤلفه شبکه‌ای یَنگ کاهش‌یافته (ج) شبکه یین- یَنگ پیراسته پس از ترکیب برای تکمیل سطح کره همراه با هم‌پوشانی مختصر.

۲-۲ شبکه یین- یَنگ پیراسته

شبکه یین-یَنگ پایه با مؤلفه‌های مستطیلی را می‌توان با روش استانیفورث و توبورن (۲۰۱۲) با کمی تغییرات اصلاح کرد. در این روش، ابتدا مؤلفه شبکه‌ای یین به‌اندازه ۹۰ درجه در راستای طول یعنی به‌اندازه یک‌سوم گستره طول جغرافیایی آن بسط داده می‌شود. در این حالت، مؤلفه شبکه‌ای یین اصلاح‌شده به یک کمربند دوره‌ای حاره‌ای مطابق شکل ۳-الف تبدیل می‌شود. در ادامه، یک‌سوم میانی از مؤلفه شبکه‌ای یَنگ حذف می‌شود تا مؤلفه شبکه‌ای یَنگ اصلاح‌شده به دو بخش مجزای یکسان (شکل ۳-ب) تبدیل شود. ترکیب این دو مؤلفه شبکه‌ای یعنی مؤلفه شبکه‌ای یین بسط‌یافته و مؤلفه شبکه‌ای یَنگ کاهش‌یافته دوبخشی، شبکه یین-یَنگ پیراسته (Modified Yin-Yang grid) یا به‌اختصار MYY را به‌وجودمی‌آورد (شکل ۳-ج). تعداد درجات آزادی این شبکه با شبکه یین-یَنگ پایه یکسان است (استانیفورث و توبورن، ۲۰۱۲). شبکه یادشده برخی ویژگی‌های تقارنی اضافی نیز نسبت به شبکه پایه دارد؛ برای مثال، شبکه یین بسط‌یافته، تحت چرخش حول محور قطب ناورداست. همچنین، دو زیرشبکه تشکیل‌دهنده شبکه یَنگ کاهش‌یافته ،تحت چرخش ۱۸۰ درجه‌ای حول یک محور استوایی، ناوردا می‌مانند که در مورد شبکه یین-یَنگ پایه این‌طور نیست. به‌دلیل این ویژگی‌های اضافی تقارنی، شاید این شبکه پیراسته بتواند آسیب‌پذیری کمتری نسبت به شبکه اصلی یین-یَنگ از خود نشان‌دهد (استانیفورث و توبورن، ۲۰۱۲).

۳-۲ شبکه یین-یَنگ پیراسته با مؤلفه‌های یکسان

شبکه یین-یَنگ پیراسته با مؤلفه‌های یکسان (Modified Yin-Yang grid with Identical Components) یا به‌اختصار ICMMY، همانند شبکه یین-یَنگ پیراسته، با تغییرات اندکی در شبکه یین-یَنگ پایه ایجاد می‌شود. در این روش، هر دو مؤلفه شبکه‌ای یین و یَنگ به‌اندازه ۹۰ درجه در راستای طول یعنی به‌اندازه یک‌سوم گستره طول جغرافیایی آن بسط داده می‌شود. در این حالت، مؤلفه‌های شبکه‌ای یین و یَنگ اصلاح‌شده به‌صورت یک کمربند دوره‌ای مشابه با مؤلفه شبکه‌ای یین بسط‌یافته در شبکه یین-یَنگ پیراسته ایجاد می‌شوند. شکل ۴-الف، مؤلفه شبکه‌ای یین بسط‌یافته و شکل ۴-ب، مؤلفه شبکه‌ای یَنگ بسط‌یافته را نشان می‌دهد. در شکل ۴-ج ترکیب این مؤلفه‌ها دیده می‌شود که شبکه یین-یَنگ پیراسته با مؤلفه‌های یکسان را تشکیل می‌دهند. این شبکه برای اولین بار در پژوهش حاضر معرفی شده است.



شکل ۴. شبکه یین-یَنگ پیراسته با مؤلفه‌های یکسان (الف) مؤلفه شبکه‌ای یین بسط‌یافته (ب) مؤلفه شبکه‌ای یَنگ بسط‌یافته (ج) شبکه یین-یَنگ پیراسته پس از ترکیب برای تکمیل سطح کره همراه با هم‌پوشانی بیشتر نسبت به دو شبکه دیگر.

۳ معادله فرارفت دوبعدی در هندسه کروی

معمولاً هنگامی‌که جریان درون شاره سبب انتقال یک ماده شود، به این پدیده A فرارفت≅ گفته می‌شود. در این انتقال، ویژگی‌های آن ماده یا کمیت نیز همراه آن منتقل می‌شود. در طی فرارفت، خواص پایستگی نیز حفظ می‌شود؛ یعنی کمیت‌های پایستاری مانند انرژی و جرمِ شاره در حین فرارفت پایسته می‌مانند.

معادله فرارفت در حالت کلی یک معادله غیرخطی است که در اینجا شکل خطی آن مدنظر است. در دستگاه مختصات کروی بر پایه طول و عرض جغرافیایی می‌توان معادله فرارفت دوبعدی را به‌صورت زیر نوشت (ویلیامسون و همکاران، ۱۹۹۲):

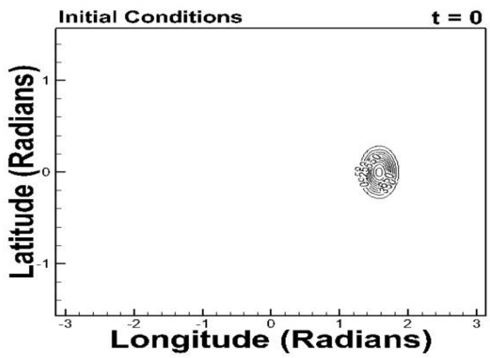
$$\frac{\partial \psi}{\partial t}+\frac{u}{a\cos\phi}\frac{\partial \psi}{\partial \lambda}+\frac{v}{a}\frac{\partial \psi}{\partial \phi}=0, \qquad (۲)$$

که a، شعاع کره؛ $\frac{\partial}{\partial \phi}$، مشتق پاره‌ای نسبت به عرض جغرافیایی و $\frac{\partial}{\partial \lambda}$، مشتق پاره‌ای نسبت به طول جغرافیایی و ψ یک تابع دلخواه است. همچنین u و v به‌ترتیب، مؤلفه‌های سرعت جریان در راستاهای مداری و نصف‌النهاری هستند. این معادله خطی حل تحلیلی دارد.

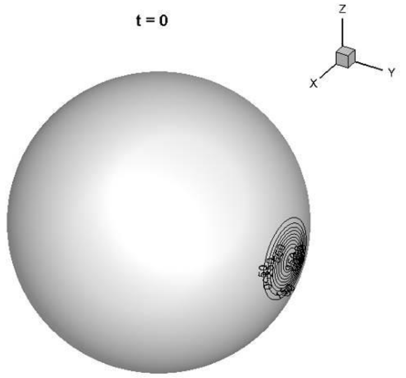
در پژوهش حاضر، این معادله با استفاده از روش تفاضل متناهی مرتبه دوم مرکزی با پیمایش زمانی رونگ-کوتای مرتبه چهارم برای یک آزمون موردی شناخته‌شده روی سه نوع شبکه یین-یَنگ معرفی‌شده در بخش قبل حل و خطای روش با استفاده از نُرم‌های قدرمطلق، مربع و بی-نهایت محاسبه و نتایج آن ارائه می‌شود. در ادامه، در مورد این آزمون موردی توضیحاتی داده خواهد شد.

۴ آزمون موردی

آزمون موردی به‌کاررفته در این پژوهش را ویلیامسون و همکاران (۱۹۹۲) با عنوان Aفرارفت زنگوله کسینوسی بر فراز قطب≅(Advection of cosine bell over the pole) معرفی کرده‌اند (برای جزئیات بیشتر به میرزائی شیری و همکاران (۱۳۹۸) رجوع کنید.) در این آزمون، یک زنگوله کسینوسی یک دور کامل در ۱۲ روز دور کره زمین و از روی دو قطب شمال و جنوب آن فرارفت می‌یابد تا به نقطه اولیه خود بازگردد. در آزمون یادشده شعاع کره زمین برابر ۶۳۷۱/۲۲ کیلومتر و شعاع زنگوله برابر یک‌سوم شعاع کره زمین فرض شده است. شکل ۵ شرایط اولیه زنگوله کسینوسی را روی کره زمین نشان



(الف)



(ب)

شکل ۵. نمایش شرایط اولیه در آزمون موردی فرارفت زنگوله کسینوسی بر فراز قطب در دو نمایش (الف) مرکاتور (ب) سه‌بعدی.

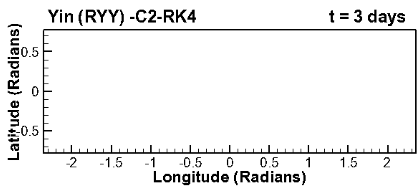
می‌دهد. در شکل ۵-الف، نمایش کره به شکل دوبعدی با تصویر مرکاتور (Mercator projection) یا به‌اختصار MP و در شکل ۵-ب نمایش کره به‌صورت سه‌بعدی است.

آزمون اشاره‌شده حل تحلیلی دارد و طی آن مرکز زنگوله کسینوسی در مدت ۱۲ روز با حرکت روی نصف‌النهار ثابت به نقطه اولیه خود بازمی‌گردد. در صورت ادامه حل، این حرکت به‌طور متناوب تکرار خواهد شد به‌گونه‌ای که دوره تناوب آن ۱۲ روز باشد.

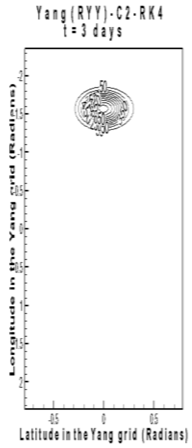
۵ نتایج

در این پژوهش، معادله (۲) در آزمون موردی معرفی‌شده، روی شبکه‌های یین-یَنگ مستطیلی (RYY)، پیراسته (MYY) و پیراسته با مؤلفه‌های یکسان (ICMYY) و شبکه متداول کروی براساس طول و عرض جغرافیایی (Trad) با استفاده از روش تفاضل متناهی مرتبه دوم مرکزی (C2) با پیمایش زمانی رونگ-کوتای مرتبه چهارم (RK4) به‌طور عددی حل شده است. در این حل عددی، از شبکه‌های کروی با تفکیک‌های ۶۴×۱۲۸ و ۱۲۸×۲۵۶ و ۲۵۶×۵۱۲ استفاده شده است. حل عددی معادله (۲) در این آزمون تا ۱۲ روز انجام گرفته است. شکل ۶ تحول زمانی زنگوله کسینوسی را هر سه روز یک‌بار، در حل عددی معادله (۲) روی شبکه RYY با تفکیک ۲۵۶×۵۱۲ با نمایش MP نشان می‌دهد. خاطرنشان می‌شود که در حل تحلیلی معادله فرارفت دوبعدی در آزمون موردی فرارفت زنگوله کسینوسی بر فراز قطب، زنگوله کسینوسی باید پس از ۱۲ روز بدون هیچ تغییری در اندازه و شکل آن، به جایگاه اولیه خود در ابتدای حرکت بازگردد. از مقایسه نتیجه این حل عددی برای انتهای روز دوازدهم با شرایط اولیه آن در آزمون مشخص می‌شود که شبکه کروی مورد استفاده عملکرد قابل قبولی داشته است. این مقایسه در شکل‌های ۶-د، ۶-ح و ۶-ل به‌ترتیب برای شبکه‌های یین، یَنگ و ترکیب آنها در کل کره نمایش داده شده است. نکته دیگری که از این مقایسه نتیجه‌گیری می‌شود این است که مقداری تغییر شکل در زنگوله کسینوسی دیده می‌شود. این موضوع می‌تواند به‌دلیل دقت کم روش عددی مورد استفاده و استفاده نکردن از هیچ نوع صافی در حل عددی باشد.

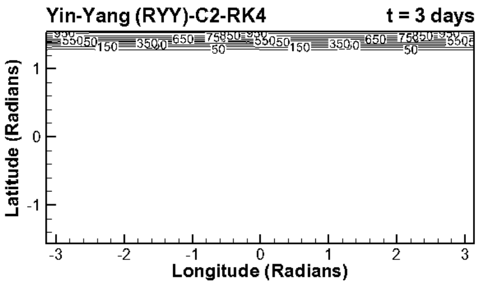
شکل ۶ تحول زنگوله در مدت زمان ۱۲ روز را به‌خوبی نشان می‌دهد. پس از سه روز ($t = 3\text{days}$)، مرکز زنگوله کسینوسی در قطب شمال قرار گرفته است که در شبکه یین (شکل ۶-الف) در محدوده مؤلفه



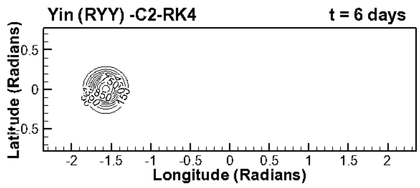
(الف)



(ه)

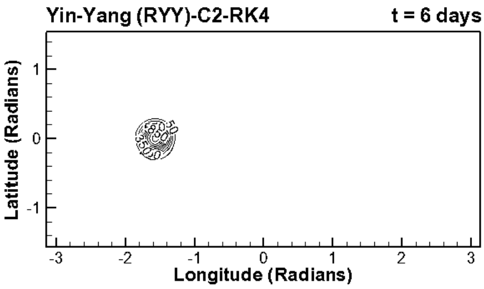


(ط)

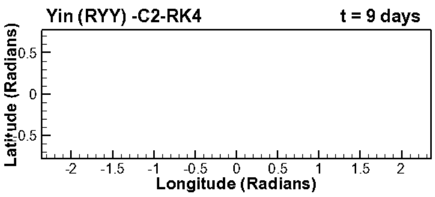


(ب)

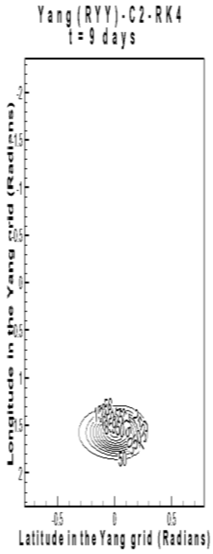
(و)



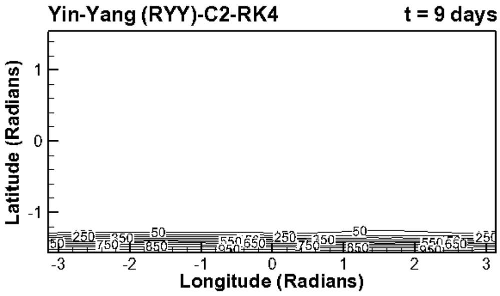
(ی)



(ج)

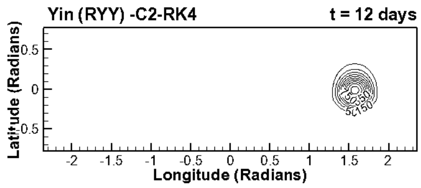


(ز)

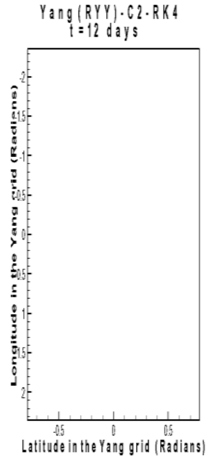


(ک)

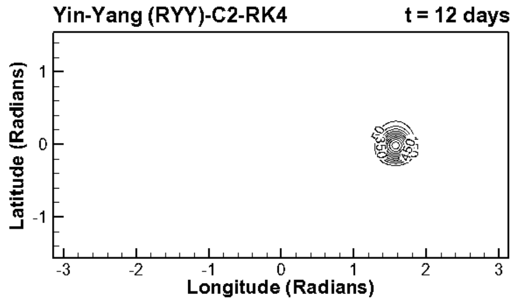
ادامه شکل ۶.



(د)



(ح)



(ل)

شکل ۶. تحول زمانی زنگوله کسینوسی در آزمون موردی با استفاده از روش C2-RK4 روی شبکه RYY با نمایش مرکاتور (الف)، (ب)، (ج) و (د) روی مؤلفه شبکه‌ای یین؛ (ه)، (و)، (ز) و (ح) روی مؤلفه شبکه‌ای یَنگ؛ (ط)، (ی)، (ک) و (ل) روی کل کره پس از ترکیب دو مؤلفه شبکه‌ای.

شبکه‌ای یین نیست و دیده نمی‌شود. در همین زمان، در شبکه یَنگ (شکل۶-ه)، مرکز زنگوله در عرض جغرافیایی صفر و طول جغرافیایی ۹۰- درجه قرار گرفته است. شکل ۶-ط وضعیت قرارگیری زنگوله را در ترکیب دو مؤلفه شبکه‌ای یعنی شبکه یین–یَنگ مستطیلی در همین زمان نشان می‌دهد که مرکز آن روی قطب شمال قرار گرفته است. در زمان $t = 9\,\text{days}$ نیز مرکز زنگوله در قطب جنوب است که در شکل ۶-ج باز هم مکان آن خارج از محدوده مؤلفه شبکه‌ای یین است و دیده نمی‌شود. در شکل‌های ۶-ز و ۶-ک ملاحظه می‌شود که مرکز زنگوله در قطب جنوب قرار دارد. همین توضیح را می‌توان به‌طور مشابه برای شکل‌های ۶-ب، ۶-و و ۶-ی در زمان $t = 6\,\text{days}$ و شکل‌های ۶-د، ۶-ح و ۶-ل در زمان $t = 12\,\text{days}$ ارائه کرد. ازآنجاکه معمولاً در شکل‌های جغرافیایی، سمت شمال در بالای صفحه است، برای شکل‌های شبکه یَنگ، عرض جغرافیایی روی محور افقی و طول جغرافیایی روی محور قائم و به‌صورت معکوس نمایش داده شده است.

در شکل ۷، وضعیت قرارگیری و شکل زنگوله کسینوسی پس از ۱۲ روز، حاصل از حل عددی روی هر چهار شبکه مورد بررسی با تفکیک ۵۱۲×۲۵۶ مقایسه شده است. این شکل نشان می‌دهد که هر سه شبکه یین–یَنگ از نظر کیفی، همانند شبکه کروی متداول بر پایه طول و عرض جغرافیایی عمل کرده‌اند.

۶ بررسی دقت و زمان محاسباتی روش

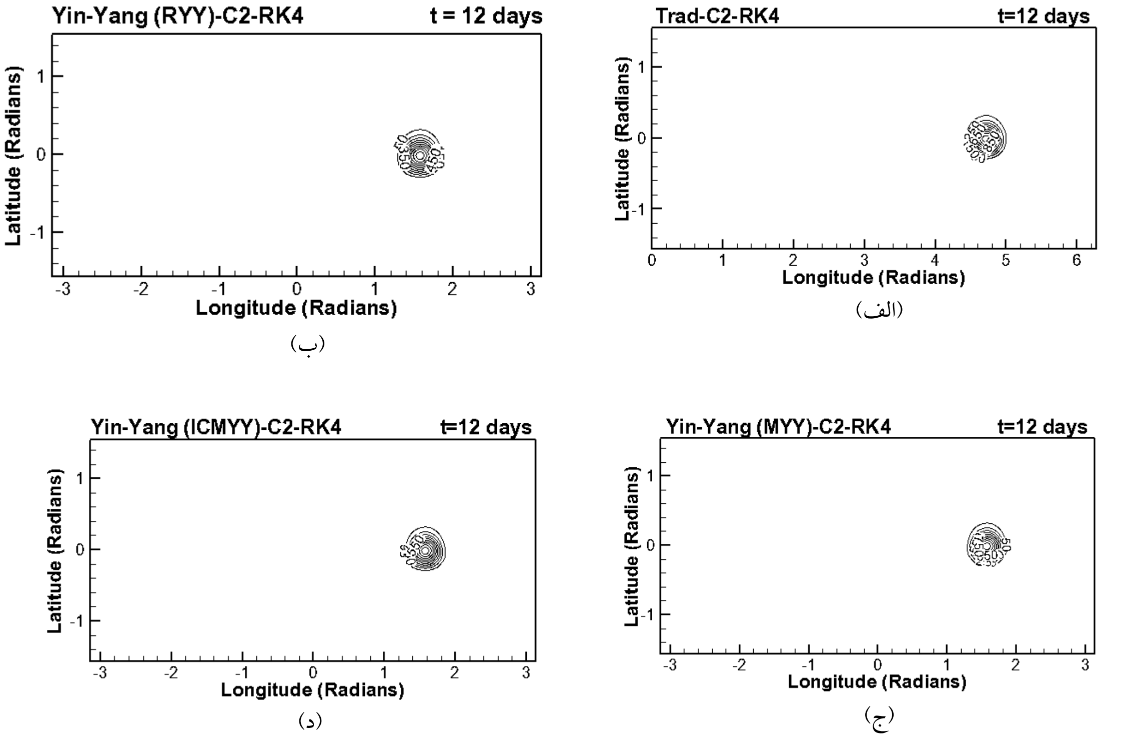
برای مقایسه کمی نتایج، مقادیر خطای کلی روش عددی روی شبکه‌های مورد بررسی پس از ۱۲ روز از شروع حل عددی، با استفاده از نُرم‌های قدرمطلق، مربع و بی‌نهایت محاسبه شده است. رابطه مربوط به نحوه محاسبه این نُرم‌ها روی کره با توجه به منظم بودن شبکه‌های کروی مورد استفاده به‌صورت زیر است (ویلیامسون و همکاران، ۱۹۹۲):

$$l_1(u)=\frac{\sum_{i=1}^{m}\left(\left|(\tilde{u}_i-u_i)\cos\phi_i\right|\right)}{\sum_{i=1}^{m}\left(\left|u_i\cos\phi_i\right|\right)},$$

$$l_2(u)=\frac{\left\{\sum_{i=1}^{m}\left(\left|(\tilde{u}_i-u_i)\cos\phi_i\right|^2\right)\right\}^{\frac{1}{2}}}{\left\{\sum_{i=1}^{m}\left(\left|u_i\cos\phi_i\right|^2\right)\right\}^{\frac{1}{2}}}, \qquad (۳)$$

$$l_\infty(u)=\frac{Max_{all}\left(\left|\tilde{u}_i-u_i\right|\right)}{Max_{all}\left(\left|u_i\right|\right)},$$

که m، تعداد نقاط شبکه؛ u_i، مقدار دقیق تابع (حاصل از روش حل تحلیلی) در هر نقطه i روی شبکه؛ ϕ_i، عرض جغرافیایی هر نقطه i و $\tilde{u}_i$، مقدار به‌دست‌آمده از روش حل عددی مورد استفاده در هر نقطه i است. l_1، مقدار خطای کل به‌دست‌آمده با استفاده از نرم قدرمطلق؛ l_2، مقدار خطای کل به‌دست‌آمده با استفاده از نرم مربع و l_∞، مقدار خطای کل به‌دست‌آمده با استفاده از نرم بی‌نهایت است. این نتایج برای روش عددی موردنظر روی چهار شبکه کروی موردبررسی با سه تفکیک مختلف در جدول ۱ آورده شده است. با توجه به نتایج، کاهش هزینه محاسباتی به میزان بسیار زیادی در حل عددی معادله فرارفت با استفاده از روش عددی C2-RK4 روی هرسه شبکه RYY، MYY و ICMYY نسبت به حل عددی با این روش روی شبکه Trad رخ داده است، اما خطای کل با استفاده از نُرم‌های قدرمطلق، مربع و بی‌نهایت برای حل عددی روی شبکه‌های یین-یَنگ نسبت به حل آن روی شبکه Trad به اندازه ناچیزی به‌دست آمده با نُرم‌های مربع و بی‌نهایت در شبکه‌های



شکل ۷. وضعیت زنگوله کسینوسی پس از ۱۲ روز در آزمون موردی Aفرارفت زنگوله کسینوسی بر فراز قطب≅ با استفاده از روش عددی C2-RK4 با تفکیک ۵۱۲×۲۵۶ به‌صورت مقایسه‌ای (الف) روی شبکه Trad (ب) روی شبکه RYY (ج) روی شبکه MYY و (د) روی شبکه ICMYY.

جدول ۱. مقادیر گام زمانی، هزینه محاسباتی و خطای کل حاصل از حل عددی با دو روش ذکرشده روی دو نوع شبکه کروی.

Scheme	Grid & Resolution	Error l_1	Error l_2	Error l_∞	Time Step (sec)	Computational Time (sec)
C2-RK4	Trad-512×256	1.63×10^{-1}	9.50×10^{-2}	8.68×10^{-2}	30	8206.74
C2-RK4	RYY-512×256	2.10×10^{-1}	1.03×10^{-1}	8.69×10^{-2}	3600	46.60
C2-RK4	MYY-512×256	2.11×10^{-1}	1.03×10^{-1}	8.69×10^{-2}	3600	81.09
C2-RK4	ICMYY-512×256	2.08×10^{-1}	1.03×10^{-1}	8.69×10^{-2}	3600	106.87
C2-RK4	Trad-256×128	6.00×10^{-1}	3.18×10^{-1}	2.81×10^{-1}	60	578.69
C2-RK4	RYY-256×128	6.98×10^{-1}	3.39×10^{-1}	2.84×10^{-1}	7200	12.67
C2-RK4	MYY-256×128	7.03×10^{-1}	3.39×10^{-1}	2.84×10^{-1}	7200	13.67
C2-RK4	ICMYY-256×128	6.91×10^{-1}	3.39×10^{-1}	2.84×10^{-1}	7200	15.41
C2-RK4	Trad-128×64	2.01	7.54×10^{-1}	5.79×10^{-1}	120	47.58
C2-RK4	RYY-128×64	2.22	7.12×10^{-1}	5.66×10^{-1}	10800	3.11
C2-RK4	MYY-128×64	2.23	7.12×10^{-1}	5.66×10^{-1}	10800	3.39
C2-RK4	ICMYY-128×64	2.19	7.11×10^{-1}	5.66×10^{-1}	10800	3.78

یین-یَنگ نسبت به شبکه Trad علاوه‌بر آنکه افزایش نداشته، کاهش نیز یافته است که این موضوع احتمالاً به‌جهت وجود خطاهای دیگر ناشی از تفکیک پایین شبکه است. به‌دست‌آمده با نُرم‌های مربع و بی‌نهایت در شبکه‌های یین-یَنگ نسبت به شبکه Trad علاوه‌بر آنکه افزایش نداشته، کاهش نیز یافته است که این موضوع احتمالاً به‌جهت وجود خطاهای دیگر ناشی از تفکیک پایین شبکه است.

کاهش دقت ناشی از استفاده از شبکه‌های یین-یَنگ در الگوریتم مورد بررسی حتماً باید مورد توجه قرار گیرد که احتمالاً می‌تواند در اثر درون‌یابی در طی مراحل حل عددی باشد. به‌هرحال، برای استفاده از شبکه‌های یین-یَنگ در حل عددی معادلات مختلف جوی و اقیانوسی در هندسه کروی، درون‌یابی بخشی ضروری از مراحل حل عددی است.

نکته دیگری که می‌توان در جدول ۱ به آن اشاره کرد، دقّت بیشتر بسیار جزئی شبکه ICMYY نسبت به دو شبکه RYY و MYY در تفکیک‌های یکسان است که البته این افزایش دقت همراه با افزایش نسبی هزینه محاسباتی است.

۷ نتیجه‌گیری

پس از حل عددی معادله فرارفت دوبعدی در هندسه کروی روی چهار شبکه Trad، RYY، MYY و ICMYY با استفاده از روش تفاضل متناهی مرتبه دوم مرکزی با پیمایش زمانی رونگ-کوتای مرتبه چهارم، نتایج کمی و کیفی، نشان‌دهنده عملکرد مناسب شبکه‌های یین-یَنگ مورد مطالعه در حل معادله مذکور است. نتایج نشان داد که حل این معادله با استفاده از روش یادشده روی شبکه‌های یین-یَنگ، نسبت به حل عددی آن روی شبکه متداول کروی بر پایه عرض و طول جغرافیایی با افزایش جزئی خطای به‌دست‌آمده از نُرم‌های قدرمطلق، مربع و بی‌نهایت همراه است. البته یادآوری می‌شود که دقت الگوریتم مورد استفاده روی شبکه ICMYY نسبت به دو شبکه یین-یَنگ دیگر اندکی بهتر است. همچنین استفاده از هر سه شبکه یین-یَنگ، به اندازه قابل توجهی هزینه محاسباتی را کاهش داده است. نکته دیگری که باید به آن اشاره شود این است که طبق نتایج موجود در جدول۱، استفاده از شبکه پیراسته و شبکه مستطیلی، هزینه محاسباتی کمتری نسبت به شبکه پیراسته با مؤلفه‌های یکسان دارد.

نتایج کمی و کیفی به‌دست‌آمده از الگوریتم

مورداستفاده روی سه نوع شبکه یین-یَنگ تفاوت قابل توجهی بین این شبکه‌ها نشان نمی‌دهد. این موضوع به روش عددی به‌کاررفته نیز ارتباط دارد؛ زیرا این روش یک روش تفاضل متناهی مرتبه دوم از نوع مرکزی است و اعمال شرایط مرزی در مرزهای هریک از مؤلفه‌های شبکه‌ای یین و یَنگ به‌آسانی انجام می‌شود. در روش‌های با دقت بیشتر، اعمال شرایط مرزی به‌مراتب دشوارتر است؛ برای مثال، در روش‌های فشرده، برای اعمال شرایط مرزی با روابط ضمنی روبه‌رو هستیم. در این موارد، شاید دوره‌ای بودن مرزها در راستای یکی از محورهای مختصات بتواند از کاهش بیشتر دقت در اثر درون‌یابی‌های بیشتر جلوگیری کند و تفاوت‌های بیشتری بین نتایج این سه شبکه یین-یَنگ مشاهده شود؛ بنابراین استفاده از این سه شبکه در حل عددی معادلاتی که حل تحلیلی دارند و استفاده از روش‌های با دقت بیشتر و مقایسه نتایج آنها با همدیگر می‌تواند در سایر پژوهش‌ها این موضوع را روشن سازد.

در یک نتیجه‌گیری کلی می‌توان گفت که هر سه شبکه یین-یَنگ موردمطالعه هزینه محاسباتی را بسیار کاهش داده‌اند و بااین‌حال، دقت روش عددی استفاده‌شده روی شبکه‌های یین-یَنگ قابل قبول و تقریباً در حد دقت آن روی شبکه Trad است. نتایج کیفی این حل عددی نیز موضوع فوق را تأیید می‌کنند؛ بنابراین استفاده از این شبکه‌ها برای حل عددی سایر معادلات جوی و اقیانوسی با استفاده از روش‌های عددی با مرتبه دقت بیشتر نیز می‌تواند در کارهای دیگر آزمایش شود.

منابع

میرزائی شیری، ر.، قادر، س.، محب‌الحجه، ع.، ۱۳۹۸، حل عددی معادله فرارفت دوبعدی در هندسه کروی روی یک شبکه یین-یَنگ با استفاده از روش مک‌کورمک فشرده مرتبه چهارم: مجله ژئوفیزیک ایران، پذیرش.

Allen, T., and Zerroukat, M., 2016, A deep non-hydrostatic compressible atmospheric model on aYin-Yang grid: Journal of Computational Physics, **319**, 44-60.

Baba, Y., Takahashi, K., and Sugimura, T., 2010, Dynamical core of an atmospheric general circulation model on a Yin–Yang grid: Monthly Weather Review, **138**, 3988-4005.

Durran, D. R., 2010, Numerical Methods for Fluid Dynamics with Applications to Geophysics: Springer.

Kageyama, A., and Sato, T., 2004, “Yin-Yang grid”: An overset grid in spherical geometry: Geochemestry, Geophysics, Geosystems, **5**(9), doi: 10.1029/2004GC000734.

Kageyama, A., 2005, Dissection of a sphere and Yin-Yang grids: Journal of The Earth Simulator, **3**, 20-28.

Li, X., Chen, D., Peng, X., Takahashi, K., and Xiao, F., 2008, A multimoment finite-volume shallow-water model on the Yin–Yang overset spherical grid: Monthly Weather Review, **136**, 3066-3086.

Li, X., Shen, X., Peng, X., Xiao, F., Zhuang, Z., and Chen, C., 2012, Fourth order transport model on Yin-Yang grid by multi-moment constrained finite volume scheme: Procedia Computer Science, **9**, 1004-1013.Ohno, N., and Kageyama, A., 2009, Visualization of spherical data by Yin–Yang grid: Computer Physics Communications, **180**, 1534-1538.

Qaddouri, A., 2011, Nonlinear shallow-water equations on the Yin-Yang grid: Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society, **137**, 810-818.

Qaddouri, A., and Lee, V., 2011, The Canadian global environmental multiscale model on the Yin-Yang grid system: Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society, **137**, 1913-1926.

Qaddouri, A., Pudykiewicz, J., Tanguay, M., Girard, C., and Cote, J., 2012, Experiments with different discretizations for the shallow-water equations on a sphere: Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society, **138**, 989–1003.

Staniforth, A., and Thuburn, J., 2012, Horizontal grids for global weather and climate prediction models: A review: Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society, **138**, 1-26.

Williamson, D. L., Drake, J. B., Hack, J. J., Jakob, R., and Swarztrauber, P. N., 1992, A standard test set for numerical approximation to the shallow water equations in spherical geometry: Journal of Computational Physics, **102**, 211-224.

Comparison of numerical solution of the spherical two-dimensional advection equation using three types of Yin–Yang grid

Rasoul Mirzaei-Shiri[1], Sarmad Ghader[2*] and Ali Reza Mohebalhojeh [3]

[1]Ph.D. Student, Space Physics Department, Institute of Geophysics, University of Tehran
[2]Associate Professor, Space Physics Department, Institute of Geophysics, University of Tehran
[3]Professor, Space Physics Department, Institute of Geophysics, University of Tehran

(Received: 18 May 2019, Accepted: 09 October 2019)

Summary

Due to the approximately spherical nature of the earth and the complex nature of atmospheric and oceanic flows, numerical solution of corresponding governing equations requires using an appropriate coordinate system on the spherical geometry. All spherical grids defined for the spherical surface or shell, have their own advantages and disadvantages generally. The Yin–Yang grid belongs to the family of overset grids. This coordinate is composed of two grid components named Yin and Yang with partial overlapping at their boundaries. Some advantages of the Yin–Yang grids are as follows:

1- Yin and Yang grid components are both orthogonal and based on the conventional latitude–longitude grid;

2- The singular points are absent;

3- The metric factors of the both grid components are analytically known;

4- The grid lengths are uniform approximately;

5- It requires less grid points than for the conventional latitude–longitude grid;

6- We can adapt the existing latitude–longitude discretizations and codes for the use with the Yin–Yang grids.

In this research, three types of the Yin–Yang grid are compared: the rectangular (basic), modified and modified with identical components. It is worth noting that the Yin–Ying grid with identical components is introduced for the first time in the present study. The central second-order finite difference scheme is applied to solve the two-dimensional advection equation on three types of Yin–Yang grid for a well-known test case. In addition, the fourth-order Runge–Kutta method is used to advance the governing equation in time.

Results show that using the Yin–Ying grids to solve the advection equation is highly effective in reducing the computational cost compared to the conventional latitude–longitude grid. However, the use of rectangular and modified Yin–Yang grids entails a lower computational cost than the modified Yin–Yang grid with identical components. In addition, global errors are computed using the absolute, square and infinite norms. By calculating the errors using these norms, it can be seen that there is a slight increase in the errors in all three grids compared to the conventional latitude–longitude grid.

Another point to note is a little higher accuracy of modified Yin–Yang grid with identical components relative to rectangular and modified Yin–Yang grids in the same resolution; though, the higher accuracy is associated with a relative increase in computational cost.

In the considered algorithm, reduction of the accuracy in using Yin-Yang grids is likely due to interpolation. However, interpolation is an essential part of numerical solving process for various oceanic and atmospheric equations on Yin-Yang grids in spherical geometry.

Keywords: Yin-Yang grid, spherical coordinates, Runge-Kutta, two-dimensional advection equation

---

*Corresponding author: sghader@ut.ac.ir